ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME LXXV — ANNÉE 1958

(94e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1958

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-QUINZIÈME — ANNÉE 1958

(94e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

—

1958

© by Gauthier-Villars, 1958.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

UN THÉORÈME SUR L'INTÉGRALE DE LAPLACE-STIELTJES

PAR M. HUBERT DELANGE.

1. INTRODUCTION. — *Soit $\alpha(t)$ une fonction réelle ou complexe définie pour $t \geq 0$ et à variation bornée sur tout intervalle fini, et supposons que l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, d\alpha(t)$$

ait une abscisse de convergence σ_c finie et soit égale pour $\mathcal{R}s > \sigma_c$ à $f(s)$.

Dans des travaux précédents (1), nous avons établi des théorèmes permettant d'affirmer, moyennant des hypothèses convenables, l'existence d'un point singulier pour la fonction $f(s)$, soit au point σ_c, soit sur un certain segment de la droite $\mathcal{R}s = \sigma_c$. Nous nous proposons ici d'établir encore le théorème suivant, que nous avons déjà énoncé sans démonstration par ailleurs (2) :

Supposons que l'on ait

$$\alpha(t) = \int_0^t e^{i\psi(u)}\, d\varphi(u),$$

(1) *Sur certaines intégrales de Laplace* [*Bull. Sc. Math.*, (2), t. 77, 1953, p. 141-168]; *Sur les points singuliers de la fonction définie par une intégrale de Laplace-Stieltjes* (*J. Anal. Math.*, t. 5, 1956-1957, p. 1-33).

(2) *Sur les singularités des fonctions définies par des intégrales de Laplace* (*Rend. Sem. Matem. Fis. di Milano*, t. 26, 1954-1955).

où $\varphi(t)$ est une fonction réelle non décroissante pour $t \geq 0$ et $\psi(t)$ une fonction réelle continue pour $t \geq 0$ ([3]).

Supposons, en outre, qu'il existe un nombre positif k tel que l'on ait quels que soient t' et $t'' \geq 0$

$$|\psi(t'') - \psi(t')| \leq k|t'' - t'|, \tag{1}$$

ce qui implique évidemment que la fonction $\psi(t)$ soit à variation bornée sur tout intervalle fini.

Alors, si l'on a, quand t tend vers $+\infty$,

$$\int_0^t |d\psi(u)| = o[t], \tag{2}$$

le point σ_c est un point singulier de la fonction $f(s)$.

On voit immédiatement que ce théorème entraîne comme corollaire le théorème bien connu suivant de Fabry ([4]) :

Soit la série entière $\sum_0^{+\infty} a_n z^n$, de rayon de convergence 1 et de somme $F(z)$, et supposons que, pour chaque $n \geq 0$,

$$a_n = r_n e^{i\theta_n}, \qquad \text{avec} \quad r_n \geq 0 \quad \text{et} \quad \theta_n \text{ réel.}$$

Si, quand N tend vers $+\infty$,

$$\sum_1^N |\theta_n - \theta_{n-1}| = o[N],$$

le point 1 est un point singulier de $F(z)$.

Il est évident qu'on peut sans inconvénient supposer que, pour chaque $n \geq 1$, $|\theta_n - \theta_{n-1}| \leq \pi$.

En effet, si cette condition n'était pas réalisée, on pourrait définir une suite $\{\theta'_n\}$ en prenant $\theta'_0 = \theta_0$, puis déterminant θ'_n pour $n \geq 1$, par

$$e^{i\theta'_n} = e^{i\theta_n} \qquad \text{et} \qquad \theta'_{n-1} - \pi \leq \theta'_n < \theta'_{n-1} + \pi.$$

On aurait ainsi $a_n = r_n e^{i\theta'_n}$ pour tout $n \geq 0$ et

$$\sum_1^N |\theta'_n - \theta'_{n-1}| \leq \sum_1^N |\theta_n - \theta_{n-1}| \quad \text{pour tout } N \geq 1,$$

([3]) Notons que ceci implique que la variation de $\alpha(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ soit $\varphi(T) - \varphi(0)$.

([4]) *Sur les points singuliers d'une fonction...* [*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 13, 1896, p. 367-399].

puisque, pour chaque $n \geqq 1$,

$$|\theta'_n - \theta'_{n-1}| \leqq |\theta_n - \theta_{n-1}|.$$

Si maintenant on définit les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ pour $t \geqq 0$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0, \\ \sum_0^n r_j & \text{pour } n < t \leqq n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$\psi(n) = \theta_n \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

et ψ linéaire sur chaque intervalle $[n, n+1]$,
on voit que ces fonctions satisfont aux hypothèses de notre théorème avec $k = \pi$, et que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, d\alpha(t), \qquad \text{où} \quad \alpha(t) = \int_0^t e^{i\psi(u)}\, d\varphi(u),$$

se ramène à la série $\sum_0^{+\infty} a_n e^{-ns}$, donc a pour abscisse de convergence O et est égale pour $\mathcal{R}s > 0$ à $F(e^{-s})$.

Notre théorème implique donc que le point O soit un point singulier de $F(e^{-s})$.

2. Remarques préliminaires. — 2.1. Remarquons d'abord qu'*on peut sans inconvenient se restreindre au cas où* $\sigma_c = 0$.

En effet, si $\sigma_c \neq 0$, posons

$$\alpha_1(t) = \int_0^t e^{-\sigma_c u}\, d\alpha(u) \qquad \text{et} \qquad \varphi_1(t) = \int_0^t e^{-\sigma_c u}\, d\varphi(u).$$

Quel que soit s, on a pour $T > 0$

$$\int_0^T e^{-st}\, d\alpha_1(t) = \int_0^T e^{-(s+\sigma_c)t}\, d\alpha(t).$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\, d\alpha_1(t)$ est convergente ou non en même temps que $\int_0^{+\infty} e^{-(s+\sigma_c)t}\, d\alpha(t)$ et, lorsqu'il y a convergence, les deux intégrales sont égales. Autrement dit, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\, d\alpha_1(t)$ a pour abscisse de convergence O et représente la fonction $f(s+\sigma_c)$.

Si le point O est un point singulier de $f(s+\sigma_c)$, σ_c est un point singulier de $f(s)$.

Mais on a $\alpha_1(t)=\int_0^t e^{i\psi(u)}\,d\varphi_1(u)$, et $\varphi_1(t)$ est encore une fonction non décroissante pour $t\geqq 0$.

2.2. *On peut aussi sans inconvénient supposer que la fonction $\psi(t)$ est linéaire par morceaux sur tout intervalle fini* ([5]).

Pour le voir, introduisons la fonction ψ_1 définie pour $t\geqq 0$ par

$$\psi_1(\log n)=\psi(\log n) \qquad \text{pour} \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

avec ψ_1 linéaire sur chaque intervalle $[\log n,\ \log(n+1)]$.

Il est clair que l'on a encore, quels que soient t' et $t''\geqq 0$,

$$|\psi_1(t'')-\psi_1(t')|\leqq k\,|t''-t'|.$$

D'autre part, pour $\log n\leqq t<\log(n+1)$,

$$\int_0^t |d\psi_1(u)|\leqq\int_0^{\log(n+1)} |d\psi(u)|,$$

d'où

$$\frac{1}{t}\int_0^t |d\psi_1(u)|\leqq\frac{1}{t}\int_0^{\log(n+1)} |d\psi(u)|\leqq\frac{\log(n+1)}{\log n}\,\frac{1}{\log(n+1)}\int_0^{\log(n+1)} |d\psi(u)|.$$

Donc, quand t tend vers $+\infty$,

$$\int_0^t |d\psi_1(u)|=o[t].$$

Mais nous allons voir que, si l'on pose

$$\beta(t)=\int_0^t e^{i\psi_1(u)}\,d\varphi(u),$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\,d\beta(t)$ a même abscisse de convergence que $\int_0^{+\infty} e^{-st}\,d\alpha(t)$ et la fonction qu'elle représente a les mêmes points singuliers que $f(s)$ sur la droite $\mathcal{R}s=\sigma_c$.

Ce résultat sera évidemment établi quand nous aurons prouvé que, si

$$\delta(t)=\beta(t)-\alpha(t),$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\,d\delta(t)$ est absolument convergente pour $\mathcal{R}s>\sigma_c-1$, autrement dit, quel que soit σ réel $>\sigma_c-1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma t}\,|d\delta(t)|$ est convergente.

([5]) Nous disons qu'une fonction est *linéaire par morceaux* sur un intervalle si celui-ci peut être partagé en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels la fonction est linéaire.

On voit d'abord que, si $\log n \leq t < \log(n+1)$, avec $n \geq 1$, on a

$$|\psi(t) - \psi(\log n)| \leq k(t - \log n) \leq k \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et

$$|\psi_1(t) - \psi(\log n)| \leq k(t - \log n) \leq k \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

d'où

$$|\psi_1(t) - \psi(t)| \leq 2k \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{2k}{n}.$$

Or

$$\frac{2k}{n} = \frac{2k}{n+1}\,\frac{n+1}{n} \leq \frac{4k}{n+1} \leq 4k\,e^{-t}.$$

Donc, pour tout $t \geq 0$,

$$|\psi_1(t) - \psi(t)| \leq 4k\,e^{-t},$$

et, par suite,

$$|e^{i\psi_1(t)} - e^{i\psi(t)}| \leq 4k\,e^{-t}.$$

Soit maintenant un nombre réel $\sigma > \sigma_c - 1$.

Fixons un nombre positif $a < \frac{\pi}{2k}$ et un nombre réel σ' satisfaisant à $\sigma_c < \sigma' < \sigma + 1$.

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma' t}\,d\alpha(t)$ est convergente, $\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\,d\alpha(u)$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$. Il existe donc un $T_0 \geq 0$ tel que, pour $t \geq T_0$,

$$\left|\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\,d\alpha(u)\right| \leq \cos ka.$$

Mais

$$\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\,d\alpha(u) = \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\,e^{i\psi(u)}\,d\varphi(u),$$

d'où

$$e^{-i\psi(t)} \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\,d\alpha(u) = \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\,e^{i[\psi(u)-\psi(t)]}\,d\varphi(u),$$

de sorte que

$$\mathcal{R}\left\{e^{-i\psi(t)} \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\,d\alpha(u)\right\} = \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} \cos[\psi(u) - \psi(t)]\,d\varphi(u),$$
$$\geq \cos ka \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\,d\varphi(u),$$

puisque, pour $t \leq u \leq t + a$,

$$|\psi(u) - \psi(t)| \leq ka.$$

Donc, pour $t \geq T_0$,

$$\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\,d\varphi(u) \leq 1.$$

Par ailleurs,

$$\delta(t)=\int_0^t [e^{i\psi_1(u)}-e^{i\psi(u)}]\,d\varphi(u),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\int_t^{t+a} e^{-\sigma u}\,|\,d\delta(u)\,|&=\int_t^{t+a} e^{-\sigma u}\,|\,e^{i\psi_1(u)}-e^{i\psi(u)}\,|\,d\varphi(u),\\ &\leq 4k\int_t^{t+a} e^{-(\sigma+1)u}\,d\varphi(u),\\ &\leq 4k\,e^{-(\sigma+1-\sigma')t}\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\,d\varphi(u),\end{aligned}$$

car, pour $t\leq u\leq t+a$,

$$(\sigma+1)u\geq\sigma' u+(\sigma+1-\sigma')t.$$

Donc, pour $t\geq T_0$,

$$\int_t^{t+a} e^{-\sigma u}\,|\,d\delta(u)\,|\leq 4k\,e^{-(\sigma+1-\sigma')t}.$$

En particulier, pour $n\geq\dfrac{T_0}{a}$,

$$\int_{na}^{(n+1)a} e^{-\sigma u}\,|\,d\delta(u)\,|\leq 4k\,e^{-na(\sigma+1-\sigma')},$$

et, par suite, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{na}^{(n+1)a} e^{-\sigma u}\,|\,d\delta(u)\,|$ est convergente.

2.3. Rappelons par ailleurs le résultat suivant, valable sous la seule hypothèse que $\sigma_c=0$:

Soit une suite de fonctions réelles ou complexes $h_n(y)$ définies sur l'intervalle fermé $[-l,+l]$ et à variation bornée sur cet intervalle.

Supposons que l'on ait

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left[\int_{-l}^{+l}|\,dh_n(y)\,|\right]^{\frac{1}{n}}\leq 1$$

et posons

$$H_n(t)=\int_{-l}^{+l} e^{-iyt}\,dh_n(y).$$

Alors, si la fonction $f(s)$ est holomorphe sur le segment fermé $[-il,+il]$, on a, quels que soient $x>0$ et λ et μ satisfaisant à $0<\lambda<1<\mu$,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left\{\frac{1}{n!}\left|\int_{\frac{\lambda n}{x}}^{\frac{\mu n}{x}} e^{-xt}t^n H_n(t)\,d\alpha(t)\right|\right\}^{\frac{1}{n}}<\frac{1}{x}.$$

Nous avons démontré ce résultat au début de notre article : *Sur les points singuliers de la fonction définie par une intégrale de Laplace-Stieltjes* (6).

3. Démonstration du théorème. — Compte tenu des remarques qui précèdent, *nous supposerons que* $\sigma_c = 0$ *et que la fonction* $\psi(t)$ *est linéaire par morceaux sur tout intervalle fini.*

Nous prouverons, à l'aide du théorème rappelé au paragraphe précédent, que, quel que soit l positif, la fonction $f(s)$ ne peut être holomorphe sur le segment fermé $[-il, +il]$.

3.1. Fixons-nous d'abord un nombre positif φ inférieur à $\frac{\pi}{4}$, un nombre positif h au plus égal à $\frac{\varphi}{k}$, et un nombre positif ω inférieur à 1.

3.2. Définissons une fonction $\Phi(t)$ pour $t > \frac{2h}{\omega}$ par

$$\Phi(t) = \int_{(1-\omega)t}^{t-2h} \left\{ \log \left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(t-u) \right] \right\} |d\psi(u)| + \int_{t+2h}^{(1+\omega)t} \left\{ \log \left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(u-t-h) \right] \right\} |d\psi(u)|.$$

On va voir que l'on a

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = 0. \tag{3}$$

En effet, soit η réel satisfaisant à $0 < \eta < \omega$.

Pour $t > \frac{2h}{\eta}$, on peut écrire

$$\Phi(t) = A(t) + B(t) + C(t) + D(t), \tag{4}$$

avec

$$A(t) = \int_{(1-\omega)t}^{(1-\eta)t} \left\{ \log \left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(t-u) \right] \right\} |d\psi(u)|,$$

$$B(t) = \int_{(1-\eta)t}^{t-2h} \left\{ \log \left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(t-u) \right] \right\} |d\psi(u)|,$$

$$C(t) = \int_{t+2h}^{(1+\eta)t} \left\{ \log \left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(u-t-h) \right] \right\} |d\psi(u)|,$$

$$D(t) = \int_{(1+\eta)t}^{(1+\omega)t} \left\{ \log \left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(u-t-h) \right] \right\} |d\psi(u)|.$$

(1) montre que l'on a

$$B(t) \geqq k \int_{(1-\eta)t}^{t-2h} \left\{ \log \left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(t-u) \right] \right\} du$$

(6) *J. Anal. Math.*, t. 5, 1956-1957, p. 1-33.

et

$$C(t) \geqq k \int_{t+2h}^{(1+\eta)t} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(u-t-h) \right] \right\} du.$$

Mais on a, en faisant le changement de variable $u = t(1-\varphi)$,

$$\int_{(1-\eta)t}^{t-2h} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(t-u) \right] \right\} du = t \int_{\frac{2h}{t}}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} \varphi \right] \right\} d\varphi > t \int_{0}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} \varphi \right] \right\} d\varphi,$$

et, en faisant le changement de variable $u = (t+h)(1+\varphi)$,

$$\int_{t+2h}^{(1+\eta)t} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(u-t-h) \right] \right\} du = (t+h) \int_{\frac{h}{t+h}}^{\frac{\eta t-h}{t+h}} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(t+h)\varphi \right] \right\} d\varphi$$

$$> (t+h) \int_{0}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} \varphi \right] \right\} d\varphi.$$

Donc

$$B(t) + C(t) \geqq k(2t+h) \int_{0}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} \varphi \right] \right\} d\varphi. \tag{5}$$

Par ailleurs, on a évidemment pour $t > \frac{2h}{\eta}$

$$A(t) \geqq \left[\log\left(\sin \frac{\pi\eta}{4\omega} \right) \right] \int_{(1-\omega)t}^{(1-\eta)t} |d\psi(u)|$$

et

$$D(t) \geqq \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi\eta}{4\omega}\left(1 - \frac{h}{\eta t}\right) \right] \right\} \int_{(1+\eta)t}^{(1+\omega)t} |d\psi(u)| \geqq \left[\log\left(\sin \frac{\pi\eta}{8\omega} \right) \right] \int_{(1+\eta)t}^{(1+\omega)t} |d\psi(u)|,$$

de sorte que

$$A(t) + D(t) \geqq \left[\log\left(\sin \frac{\pi\eta}{8\omega} \right) \right] \int_{0}^{(1+\omega)t} |d\psi(u)|. \tag{6}$$

(4), (5) et (6) montrent que, pour $t > \frac{2h}{\eta}$,

$$\frac{\Phi(t)}{t} \geqq k \frac{2t+h}{t} \int_{0}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} \varphi \right] \right\} d\varphi + \frac{1}{t} \left[\log\left(\sin \frac{\pi\eta}{8\omega} \right) \right] \int_{0}^{(1+\omega)t} |d\psi(u)|,$$

et, en tenant compte de (2), ceci entraîne

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} \geqq 2k \int_{0}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} \varphi \right] \right\} d\varphi.$$

Comme η peut être pris arbitrairement petit, on en déduit en faisant tendre η vers zéro

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} \geqq 0,$$

d'où (3) puisque $\Phi(t) \leqq 0$.

3.3. Désignons maintenant par ψ'_n et ψ''_n le minimum et le maximum de $\psi(t)$ dans l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$.

On a évidemment

$$\psi'_n \leq \psi(nh) \leq \psi''_n.$$

3.3.1. Si l'on a

$$(7) \qquad \psi(nh) - \pi + 2\varphi \leq \psi'_n \leq \psi''_n \leq \psi(nh) + \pi - 2\varphi \qquad \text{et} \qquad \psi''_n - \psi'_n \leq \pi,$$

on peut trouver un nombre réel γ_n satisfaisant à

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi \leq \gamma_n \leq \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi,$$

tel que

$$\cos[\psi(t) - \gamma_n] \geq 0 \qquad \text{pour} \quad (1-\omega)nh \leq t \leq (1+\omega)nh.$$

On peut prendre, par exemple,

$$\gamma_n = \psi''_n - \frac{\pi}{2} \qquad \text{si} \quad \psi''_n \geq \psi(nh) + 2\varphi,$$

$$\gamma_n = \psi'_n + \frac{\pi}{2} \qquad \text{si} \quad \psi''_n < \psi(nh) + 2\varphi \quad \text{et} \quad \psi'_n \leq \psi(nh) - 2\varphi,$$

$$\gamma_n = \psi(nh) \qquad \text{si} \quad \psi(nh) - 2\varphi < \psi'_n \leq \psi''_n < \psi(nh) + 2\varphi.$$

Notons que les inégalités (7) ont certainement lieu pour $n \leq \frac{2}{\omega}$, car, si $n \leq \frac{2}{\omega}$, on a pour $(1-\omega)nh \leq t \leq (1+\omega)nh$,

$$|\psi(t) - \psi(nh)| \leq k|t - nh| \leq k\omega nh \leq 2kh \leq 2\varphi < \frac{\pi}{2},$$

et, par suite,

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} < \psi'_n \leq \psi''_n < \psi(nh) + \frac{\pi}{2}.$$

3.3.2. Si l'on n'a pas les inégalités (7), quel que soit γ satisfaisant à

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi \leq \gamma \leq \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi,$$

la fonction $\cos[\psi(t) - \gamma]$ prend des valeurs de signe contraire dans l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$.

Si $\psi''_n - \psi'_n > \pi$, c'est évident puisque $\psi(t) - \gamma$ parcourt un intervalle de longueur supérieure à π.

Si $\psi'_n < \psi(nh) - \pi + 2\varphi$, $\psi(t) - \gamma$ a un minimum inférieur à $-\frac{\pi}{2}$ et prend une valeur au moins égale à $-\frac{\pi}{2} + 2\varphi$ pour $t = nh$; donc, pour ε positif assez petit, $\psi(t) - \gamma$ prend les valeurs $-\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

Si $\psi''_n > \psi(nh) + \pi - 2\varphi$, le maximum est supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et la valeur pour

$t = nh$ est au plus égale à $\frac{\pi}{2} - 2\varphi$; donc, pour ε positif assez petit, $\psi(t) - \gamma$ prend les valeurs $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

La fonction $\psi(t)$ étant linéaire par morceaux sur l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$, celui-ci peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels sur chacun desquels $\cos[\psi(t) - \gamma]$ est croissante, ou décroissante, ou constante. Il en résulte que l'ensemble des points de l'intervalle ouvert $](1-\omega)nh, (1+\omega)nh[$ où $\cos[\psi(t) - \gamma] \neq 0$ se compose d'un nombre fini d'intervalles ouverts sur chacun desquels $\cos[\psi(t) - \gamma]$ a un signe constant.

Deux intervalles ouverts consécutifs sur lesquels $\cos[\psi(t) - \gamma]$ a des signes contraires sont séparés, soit par un point t_0 tel que $\cos[\psi(t_0) - \gamma] = 0$, soit par un intervalle fermé $[t'_0, t''_0]$ sur lequel $\cos[\psi(t) - \gamma] = 0$.

Dans le premier cas, nous dirons qu'il y a changement de signe pour $\cos[\psi(t) - \gamma]$ au point t_0, dans le second qu'il y a changement de signe au point $\frac{t'_0 + t''_0}{2}$.

Le nombre total des points de changement de signe dans l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ est borné supérieurement par un nombre indépendant de γ. En effet, si $[t', t'']$ est un intervalle fermé contenu dans $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ et dans lequel $\psi(t)$ est linéaire, le nombre des points de changement de signe de $\cos[\psi(t) - \gamma]$ appartenant à $[t', t'']$ ne peut dépasser $\frac{|\psi(t'') - \psi(t')|}{\pi} + 1$.

D'autre part, il n'y a aucun point de changement de signe de $\cos[\psi(t) - \gamma]$ dans l'intervalle ouvert $](n-2)h, (n+2)h[$.

En effet, sur cet intervalle,

$$|\psi(t) - \psi(nh)| \leq k|t - nh| < 2kh \leq 2\varphi,$$

d'où

$$\psi(nh) - 2\varphi < \psi(t) < \psi(nh) + 2\varphi,$$

et, par suite, $-\frac{\pi}{2} < \psi(t) - \gamma < +\frac{\pi}{2}$, de sorte que

$$\cos[\psi(t) - \gamma] > 0.$$

3.3.3. Ceci étant, dans le cas où l'on n'a pas les inégalités (7), nous définirons une fonction $G_n(\gamma)$ sur l'intervalle $\left[\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi, \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi\right]$ de la façon suivante :

$t_1, t_2, \ldots, t_p$ étant les points de changement de signe de $\cos[\psi(t) - \gamma]$ dans l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$, on prend

$$G_n(\gamma) = \sum_{j=1}^{p} L_n(t_j),$$

avec

$$L_n(t) = \begin{cases} \log\left[\sin\frac{\pi}{4\omega nh}(nh-t)\right] & \text{pour } (1-\omega)nh \leq t \leq (n-2)h, \\ \log\left\{\sin\frac{\pi}{4\omega nh}[t-(n+1)h]\right\} & \text{pour } (n+2)h \leq t \leq (1+\omega)nh. \end{cases}$$

3.3.4. $G_n(\gamma)$ est bornée sur l'intervalle $\left[\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi, \psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi\right]$ puisque p est borné supérieurement et

$$\log\left[\sin\frac{\pi}{4\omega n}\right] \leq L_n(t) \leq 0.$$

On va voir qu'elle est continue, sauf peut-être en un nombre fini de points, donc intégrable au sens de Riemann, et que l'on a

$$\int_{\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi}^{\psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi} G_n(\gamma)\,d\gamma \geq \Phi(nh), \tag{8}$$

où Φ est la fonction définie au paragraphe 3.2.

En effet, d'après nos hypothèses, l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ peut être décomposé en intervalles partiels $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{q-1}, a_q]$ sur chacun desquels la fonction $\psi(t)$ est linéaire.

Nous supposerons que, sur $[a_{r-1}, a_r]$,

$$\psi(t) = b_r t + c_r.$$

Pour chaque entier r satisfaisant à $0 \leq r \leq q$, il existe exactement un nombre réel θ'_r satisfaisant à

$$\psi(nh)-\frac{\pi}{2} \leq \theta'_r < \psi(nh)+\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos[\psi(a_r)-\theta'_r] = 0.$$

Ceux des points θ'_r qui sont intérieurs à l'intervalle

$$\left[\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi, \psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi\right]$$

partagent celui-ci en un nombre fini d'intervalles partiels, que nous désignerons par $[\theta_0, \theta_1], [\theta_1, \theta_2], \ldots$.

Lorsque γ varie dans un intervalle ouvert $]\theta_{m-1}, \theta_m[$, le nombre p des points de changement de signe de $\cos[\psi(t)-\gamma]$ sur l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ reste constant et, si $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sont ces points *rangés par ordre croissant*, pour chaque j, t_j reste à l'intérieur de l'un des intervalles $[a_{r-1}, a_r]$ pour lesquels $b_r \neq 0$, soit $[a_{r_j-1}, a_{r_j}]$.

On a pour chaque j une relation de la forme

$$t_j = \frac{1}{b_{r_j}}\gamma + d_j,$$

ce qui montre que $G_n(\gamma)$ est continue sur l'intervalle ouvert $]\theta_{m-1}, \theta_m[$, et, quand γ parcourt cet intervalle, chaque t_j parcourt un intervalle ouvert $]\alpha_{m,j}, \beta_{m,j}[$ contenu dans l'intervalle ouvert $]a_{r_{j-1}}, a_{r_j}[$.

On a

$$\beta_{m,j} \leqq (n-2)h \quad \text{ou} \quad \alpha_{m,j} \geqq (n+2)h,$$

puisque t_j ne peut jamais appartenir à l'intervalle $](n-2)h, (n+2)h[$.

Les différents intervalles $[\alpha_{m,j}, \beta_{m,j}]$ sont donc tous contenus dans la réunion des intervalles fermés $[(1-\omega)nh, (n-2)h]$ et $[(n+2)h, (1+\omega)nh]$.

On voit que l'on a

$$\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} G_n(\gamma)\, d\gamma = \sum_{j=1}^{p} \int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} L_n(t_j)\, d\gamma.$$

Mais, en faisant le changement de variable $\frac{1}{b_{r_j}}\gamma + d_j = u$, on obtient

$$\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} L_n(t_j)\, d\gamma = \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u)\, |b_{r_j}|\, du = \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u)\, |d\psi(u)|.$$

On a donc

$$\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} G_n(\gamma)\, d\gamma = \sum_{j=1}^{p} \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u)\, |d\psi(u)|,$$

et, par suite,

$$\int_{\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi}^{\psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi} G_n(\gamma)\, d\gamma = \sum_{m,j} \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u)\, |d\psi(u)|.$$

On voit par ailleurs que les intervalles $[\alpha_{m,j}, \beta_{m,j}]$ sont non empiétants. Deux de ces intervalles correspondant à un même m sont évidemment non empiétants s'ils ne sont pas contenus dans le même intervalle $[a_{r-1}, a_r]$. Ils le sont encore s'ils sont contenus dans le même intervalle $[a_{r-1}, a_r]$, car alors $\psi(t)$ parcourt des intervalles non empiétants lorsque t les parcourt. Enfin, deux intervalles correspondant à deux valeurs différentes m' et m'' de m sont aussi non empiétants. En effet, s'ils avaient un point intérieur commun, soit τ, celui-ci serait point de changement de signe de $\cos[\psi(t)-\gamma]$ pour deux valeurs γ' et γ'' de γ appartenant l'une à l'intervalle ouvert $]\theta_{m'-1}, \theta_{m'}[$, l'autre à l'intervalle ouvert $]\theta_{m''-1}, \theta_{m''}[$, et l'on aurait

$$\cos[\psi(\tau)-\gamma'] = \cos[\psi(\tau)-\gamma''] = 0,$$

ce qui exigerait que $\gamma''-\gamma'$ soit multiple de π. Or ceci n'est pas possible avec $\gamma' \neq \gamma''$, puisque γ' et γ'' doivent appartenir à l'intervalle $\left[\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi, \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi\right]$ dont la longueur est $\pi - 4\varphi$.

La fonction $L_n(t)$ étant négative sur les intervalles

$$[(1-\omega)nh, (n-2)h] \quad \text{et} \quad [(n+2)h, (1+\omega)nh],$$

on voit finalement que

$$\int_{\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi}^{\psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi} G_n(\gamma)\,d\gamma \geqq \int_{(1-\omega)nh}^{(n-2)h} L_n(u)\,|\,d\psi(u)\,| + \int_{(n+2)h}^{(1+\omega)nh} L_n(u)\,|\,d\psi(u)\,|.$$

Mais le second membre est précisément $\Phi(nh)$.

3.3.5. L'inégalité (8) montre qu'on peut trouver un nombre réel γ_n satisfaisant à

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi \leqq \gamma_n \leqq \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi$$

et tel que

$$G_n(\gamma_n) \geqq \frac{\Phi(nh)}{\pi - 4\varphi}.$$

Notons que ceci entraîne que, pour $\gamma = \gamma_n$, le nombre des t_j soit au plus égal à

$$\frac{-\Phi(nh)}{(\pi - 4\varphi)\log\sqrt{2}},$$

car, comme on le voit immédiatement, on a pour chaque j,

$$L_n(t_j) \leqq \log\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = -\log\sqrt{2}.$$

3.4. Dans ce qui suit, on supposera qu'on a déterminé une suite $\{\gamma_n\}$ en choisissant γ_n comme il est dit au paragraphe 3.3.1 dans le cas où l'on a les inégalités (7), et comme il est dit au paragraphe 3.3.5 dans le cas où l'on n'a pas ces inégalités.

Dans ce dernier cas, on désignera par $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_{p_n}^{(n)}$ les points de changement de signe de $\cos[\psi(t) - \gamma_n]$ dans l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$, et par q_n le nombre des $t_j^{(n)}$ qui sont supérieurs à nh.

D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$p_n \leqq \frac{-\Phi(nh)}{(\pi - 4\varphi)\log\sqrt{2}}.$$

3.5. Nous allons maintenant montrer, en utilisant le résultat rappelé au paragraphe 2.3, que, quel que soit l positif, on arriverait à une contradiction si l'on supposait que $f(s)$ soit holomorphe sur le segment fermé $[-il, +il]$.

Fixons donc un l positif.

3.5.1. Observons d'abord que, d'après (3), il existe un $n_0 > \frac{2}{\omega}$ tel que,

pour $n \geqq n_0$,

$$\frac{\Phi(nh)}{nh} > -\frac{4\omega(\pi - 4\varphi)\log\sqrt{2}}{\pi} l,$$

d'où

$$\frac{-\Phi(nh)}{(\pi - 4\varphi)\log\sqrt{2}} < \frac{4\omega nh}{\pi} l. \tag{9}$$

Ceci étant, définissons la suite des fonctions $h_n(y)$ sur l'intervalle fermé $[-l, +l]$ de la façon suivante :

Pour $n < n_0$, nous prenons $h_n(y)$ absolument arbitraire.

Pour $n \geqq n_0$, si l'on a les inégalités (7), nous prenons

$$h_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -l \leqq y < 0, \\ 1 & \text{pour } 0 \leqq y \leqq l, \end{cases}$$

de sorte que

$$H_n(t) = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| = 1.$$

Si l'on n'a pas les inégalités (7), nous remarquons que, d'après la formule d'Euler,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

on a

$$(-1)^{q_n} \prod_{j=1}^{p_n} \sin\frac{\pi}{4\omega nh}[t - t_j^{(n)}] = \sum_{r=0}^{p_n} A_r^{(n)} \exp\left\{ i\frac{p_n - 2r}{4\omega nh}\pi t \right\},$$

où les $A_r^{(n)}$ sont des constantes, et, puisque

$$p_n \leqq \frac{-\Phi(nh)}{(\pi - 4\varphi)\log\sqrt{2}},$$

on a d'après (9)

$$\frac{p_n \pi}{4\omega nh} < l.$$

Nous prenons alors

$$h_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -l \leqq y < -\dfrac{p_n\pi}{4\omega nh}, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{r} A_j^{(n)} & \text{pour } \dfrac{(2r - p_n)\pi}{4\omega nh} \leqq y < \dfrac{(2r + 2 - p_n)\pi}{4\omega nh} \quad (r = 0, 1, \ldots, p_n - 1), \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{p_n} A_j^{(n)} & \text{pour } \dfrac{p_n\pi}{4\omega nh} \leqq y \leqq l, \end{cases}$$

de sorte que

$$H_n(t) = (-1)^{q_n} \prod_{j=1}^{p_n} \sin\frac{\pi}{4\omega nh}[t - t_j^{(n)}].$$

Comme on a $|A_r^{(n)}| \leq \frac{1}{2^{p_n}} \binom{p_n}{r}$, on voit que

$$\int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| = \sum_0^{p_n} |A_r^{(n)}| \leq 1.$$

3.5.2. Comme, pour tout $n \geq n_0$,

$$\int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| \leq 1,$$

on a

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \left[\int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| \right]^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Par suite, en prenant $x = \frac{1}{h}$, $\lambda = 1 - \omega$ et $\mu = 1 + \omega$, le théorème rappelé au paragraphe 2.3 permet d'affirmer que, si $f(s)$ était holomorphe sur le segment fermé $[-il, +il]$, en posant

$$\Omega_n = \frac{1}{n!} \left| \int_{(1-\omega)nh}^{(1+\omega)nh} e^{-\frac{t}{h}} t^n H_n(t) \, d\alpha(t) \right|,$$

on aurait

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \Omega_n^{\frac{1}{n}} < h.$$

3.5.3 On a évidemment

$$\Omega_n \geq \frac{1}{n!} \mathcal{R} \left\{ e^{-i\gamma_n} \int_{(1-\omega)nh}^{(1+\omega)nh} e^{-\frac{t}{h}} t^n H_n(t) \, d\alpha(t) \right\},$$

$$\geq \frac{1}{n!} \int_{(1-\omega)nh}^{(1+\omega)nh} e^{-\frac{t}{h}} t^n H_n(t) \cos[\psi(t) - \gamma_n] \, d\varphi(t).$$

Mais, pour $n \geq n_0$, on a

$$H_n(t) \cos[\psi(t) - \gamma_n] \geq 0$$

sur tout l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$.

Dans le cas où l'on a les inégalités (7), cela résulte de ce que $\cos[\psi(t) - \gamma_n] \geq 0$ et $H_n(t) = 1$. Dans le cas contraire, cela tient à ce que $\cos[\psi(t) - \gamma_n]$ et $H_n(t)$ sont positifs pour $t = nh$ et $H_n(t)$ change de signe en tous les points de changement de signe de $\cos[\psi(t) - \gamma_n]$.

Donc, pour $n \geq \text{Max}\left[n_0, \frac{1}{\omega} \right]$,

$$\Omega_n \geq \frac{1}{n!} \int_{nh}^{(n+1)h} e^{-\frac{t}{h}} t^n H_n(t) \cos[\psi(t) - \gamma_n] \, d\varphi(t).$$

3.5.4. Par ailleurs, pour $nh \leq t \leq (n+1)h$,

$$e^{-\frac{t}{h}} t^n \geq (n+1)^n e^{-n-1} h^n,$$

puisque la fonction $e^{-\frac{t}{h}} t^n$ est décroissante pour $t \geq nh$.

D'autre part, $\cos[\psi(t)-\gamma_n]\geqq\sin\varphi$, puisque

$$|\psi(t)-\gamma_n|\leqq|\psi(t)-\psi(nh)|+|\psi(nh)-\gamma_n|\leqq kh+\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)\leqq\frac{\pi}{2}-\varphi.$$

Enfin

$$H_n(t)\geqq\exp\left[\frac{\Phi(nh)}{\pi-4\varphi}\right].$$

En effet, dans le cas où l'on a les inégalités (7), $H_n(t)=1$, alors que $\Phi(nh)\leqq 0$. Dans le cas où l'on n'a pas les inégalités (7),

$$H_n(t)>0 \qquad \text{et} \qquad \log H_n(t)=\sum_{j=1}^{p_n}\log\left|\sin\frac{\pi}{4\omega nh}[t-t_j^{(n)}]\right|;$$

mais, pour les $t_j^{(n)}$ au plus égaux à $(n-2)h$,

$$\log\left|\sin\frac{\pi}{4\omega nh}[t-t_j^{(n)}]\right|\geqq\log\left\{\sin\frac{\pi}{4\omega nh}[nh-t_j^{(n)}]\right\},$$

et, pour les $t_j^{(n)}$ au moins égaux à $(n+2)h$,

$$\log\left|\sin\frac{\pi}{4\omega nh}[t-t_j^{(n)}]\right|\geqq\log\sin\left\{\frac{\pi}{4\omega nh}[t_j^{(n)}-(n+1)h]\right\};$$

par suite

$$\log H_n(t)\geqq G_n(\gamma_n)\geqq\frac{\Phi(nh)}{\pi-4\varphi}.$$

3.5.5. Finalement, on voit que, pour $n\geqq\operatorname{Max}\left[n_0,\frac{1}{\omega}\right]$,

$$\Omega_n\geqq\frac{(n+1)^n e^{-n-1}h^n}{n!}(\sin\varphi)\exp\left[\frac{\Phi(nh)}{\pi-4\varphi}\right]\{\varphi[(n+1)h]-\varphi(nh)\},$$

d'où

$$\{\varphi[(n+1)h]-\varphi(nh)\}^{\frac{1}{n}}\leqq\frac{1}{h}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}e}{n+1}\left(\frac{e}{\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{n}}\exp\left[\frac{-\Phi(nh)}{nh}\frac{h}{\pi-4\varphi}\right]\Omega_n^{\frac{1}{n}}.$$

Comme, quand n tend vers $+\infty$,

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}e}{n+1}\left(\frac{e}{\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{n}}\exp\left[\frac{-\Phi(nh)}{nh}\frac{h}{\pi-4\varphi}\right] \quad \text{tend vers } 1,$$

il en résulte que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\{\varphi[(n+1)h]-\varphi(nh)\}^{\frac{1}{n}}\leqq\frac{1}{h}\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,\Omega_n^{\frac{1}{n}}.$$

3.5.6. L'hypothèse que $f(s)$ soit holomorphe sur le segment fermé $[-il,+il]$ entraînerait donc

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\{\varphi[(n+1)h]-\varphi(nh)\}^{\frac{1}{n}}<1.$$

Mais ceci ne peut avoir lieu.

En effet, dans ce cas, on pourrait trouver un ε positif tel que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\{\varphi[(n+1)h]-\varphi(nh)\}^{\frac{1}{n}}<e^{-\varepsilon h}.$$

Comme

$$\int_{nh}^{(n+1)h} e^{\varepsilon t}\,d\varphi(t)\leq e^{\varepsilon(n+1)h}\{\varphi[(n+1)h]-\varphi(nh)\},$$

d'où

$$\left\{\int_{nh}^{(n+1)h} e^{\varepsilon t}\,d\varphi(t)\right\}^{\frac{1}{n}}\leq e^{\varepsilon\frac{n+1}{n}h}\{\varphi[(n+1)h]-\varphi(nh)\}^{\frac{1}{n}},$$

on en déduirait

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left\{\int_{nh}^{(n+1)h} e^{\varepsilon t}\,d\varphi(t)\right\}^{\frac{1}{n}}\leq e^{\varepsilon h}\overline{\lim_{n\to+\infty}}\{\varphi[(n+1)h]-\varphi(nh)\}^{\frac{1}{n}}<1,$$

ce qui entraînerait la convergence de la série

$$\sum_{0}^{+\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} e^{\varepsilon t}\,d\varphi(t),$$

donc de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{\varepsilon t}\,d\varphi(t)$, et par suite la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\,d\alpha(t)$ pour $s=-\varepsilon$, contrairement à l'hypothèse que $\sigma_c=0$.

PROBLÈME AUX LIMITES AUX DÉRIVÉES TANGENTIELLES POUR L'ÉQUATION PARABOLIQUE

PAR M. W. POGORZELSKI.

1. INTRODUCTION. — Le problème aux limites aux dérivées tangentielles posé pour la première fois par H. Poincaré [1], consiste en la recherche d'une fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine plan qui, en tout point de la courbe limitant ce domaine, vérifie une relation linéaire entre les valeurs limites : 1° de la dérivée dans la direction de la normale; 2° de la dérivée dans la direction de la tangente; 3° de la fonction elle-même.

Le problème de H. Poincaré a fait l'objet des recherches de plusieurs auteurs. Les résultats les plus approfondis ont été obtenus par les mathématiciens géorgiens B. Hvédélidzé [2] et I. Vécoua [3]. Le problème de H. Poincaré a été généralisé par l'auteur du présent travail dans le cas d'une relation non linéaire entre les valeurs limites des dérivées au bord du domaine donné (*voir* [4]).

Dans le présent travail nous poserons et résoudrons le problème aux limites aux dérivées tangentielles pour une équation parabolique de la forme

$$(1)\qquad \hat{\Psi}(u)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+c(A,t)\,u$$
$$-\frac{\partial u}{\partial t}=F\left(A,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

dans l'espace à $n+1$ dimensions.

2. FORMULES ET THÉORÈMES PRINCIPAUX. — Nous admettons les suppositions suivantes :

I. Les fonctions réelles $a_{\alpha\beta}(A,t)$ sont définies dans le domaine fermé

$$(2)\qquad A(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega+S;\qquad 0\leq t\leq T$$

et vérifient une condition de Hölder de la forme

$$|a_{\alpha\beta}(A, t) - a_{\alpha\beta}(A_1, t_1)| < \text{Cte} \times [r_{AA_1}^h + |t - t_1|^{h'}]. \tag{3}$$

Ω désigne un domaine borné dans l'espace euclidien à n dimensions, limité par la surface fermée S; $(x_1, \ldots, x_n)$ désignent les coordonnées rectangulaires du point A; r_{AA_1} désigne la distance des deux points A, A_1; h et h' sont des constantes positives non supérieures à l'unité.

II. Les fonctions réelles $b_\alpha(A, t)$, $c(A, t)$ sont définies et continues dans le domaine fermé (2) et vérifient la condition de Hölder par rapport aux variables spatiales ;

$$\begin{cases} |b_\alpha(A, t) - b_\alpha(A_1, t)| < \text{Cte} \times r_{AA_1}^h, \\ |c\ (A, t) - c\ (A_1, t)| < \text{Cte} \times r_{AA_1}^h. \end{cases} \tag{4}$$

III. La fonction réelle $F(A, t, u, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est définie et continue dans la région fermée

$$A \in \Omega + S; \quad 0 \leq t \leq T; \quad |u| \leq R; \quad |u_\alpha| \leq R \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n); \tag{5}$$

en outre, cette fonction vérifie une condition de Hölder par rapport aux variables $A, u, u_1, \ldots, u_n$.

IV. La forme quadratique

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\ (A, t)\, X_\alpha X_\beta \tag{6}$$

est définie positive dans le domaine (2).

V. La surface S vérifie les conditions suivantes, dites de Liapounoff :

a. Il existe un plan tangent en tout point de la surface S;

b. L'angle (N_P, N_Q), entre deux normales aux points arbitraires P, Q de la surface S, vérifie l'inégalité

$$(N_P, N_Q) < \text{Cte} \times r_{PQ}^\varkappa, \tag{7}$$

$\varkappa$ étant une constante positive, non supérieure à l'unité;

c. Il existe un nombre positif δ tel que la sphère K centrée au point arbitraire P de la surface S et ayant pour rayon δ, découpe une portion S_K de cette surface, située à l'intérieur de la sphère K, dont la projection orthogonale sur le plan tangent en P est un ensemble de points qui correspondent dans cette projection d'une façon biunivoque aux points de la portion S_K.

D'après le travail [5], la solution fondamentale Γ de l'équation

$$\hat{\Psi}(u) = 0 \tag{8}$$

est donnée par la formule (1)

$$\Gamma(A, t; B, \tau) = w^{B,\tau}(A, t; B, \tau) + \int_0^t \iiint_{\Omega'(M)} w^{M,\zeta}(A, t; M, \zeta)\Phi(M, \zeta; B, \tau)\, dM\, d\zeta, \tag{9}$$

où l'on a

$$w^{M,\zeta}(A, t; B, \tau) = (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\mathfrak{P}^{M,\zeta}(A, B)}{4(t-\tau)}\right], \tag{9'}$$

$$\mathfrak{P}^{M,\zeta}(A, B) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(M, \zeta)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta). \tag{9''}$$

$a^{\alpha\beta}$ désigne les éléments de la matrice *inverse* de la matrice $\|a_{\alpha\beta}\|$; Ω' désigne un domaine fermé arbitraire, borné dans l'espace à n dimensions considéré, contenant $\Omega + S$, où les fonctions $a_{\alpha\beta}(A, t)$, $b_\alpha(A, t)$, $c(A, t)$ sont prolongées d'une façon arbitraire, mais sous la condition de satisfaire aux inégalités (3), (4) et de conserver la propriété de la forme quadratique (6); $A(x_1, \ldots, x_n)$ et $B(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ désignent deux points arbitraires du domaine Ω', en outre, on a $0 \leq \tau < t \leq T$.

La fonction $\Phi(A, t; B, \tau)$ est une solution de l'équation intégrale

$$\Phi(A, t; B, \tau) = f(A, t; B, \tau) + \lambda \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} N(A, t; M, \zeta)\Phi(M, \zeta; B, \tau)\, dM\, d\zeta, \tag{10}$$

où l'on a

$$\begin{cases} N(A, t; M, \zeta) = \sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A, t)|}\, \hat{\Psi}_{A,t}[w^{M,\zeta}(A, t; M, \zeta)], \\ f(A, t; B, \tau) = \lambda N(A, t; B, \tau), \\ \lambda = (2\sqrt{\pi})^{-n}, \end{cases} \tag{11}$$

B, τ jouent le rôle des paramètres fixés arbitrairement dans le domaine Ω', resp. dans l'intervalle $(0, T)$. D'après le travail [5], le noyau N de l'équation (10) admet une limitation aux singularités séparées faibles

$$|N(A, t; M, \zeta)| < \frac{\text{Cte}}{(t-\zeta)^\mu} \frac{1}{r_{AM}^{n+2-2\mu-h_1}}, \tag{12}$$

où $h_1 = \min(h, 2h')$ et μ est un nombre positif arbitrairement fixé à l'intérieur de l'intervalle $\left(1 - \frac{h_1}{2}, 1\right)$. La solution Φ de l'équation (10) vérifie l'inégalité de la même forme

$$|\Phi(A, t; B, \tau)| < \frac{\text{Cte}}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{r_{AB}^{n+2-2\mu-h_1}}. \tag{13}$$

Définition 1. — Nous appelons potentiel de simple couche, relative à

(1) Nous conservons dans ce travail le signe d'intégrale triple pour l'intégrale de volume et le signe d'intégrale double pour l'intégrale de surface (à $n-1$ dimensions) dans l'espace à n dimensions; dM désigne l'élément de volume au point M.

l'équation parabolique $\hat{\Psi}(u) = 0$, l'intégrale de surface suivante :

$$U(A, t) = \int_0^t \iint_S \Gamma(A, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau, \tag{14}$$

où la fonction $\varphi(Q, \tau)$, dite densité de simple couche, est définie dans la région $[Q \in S ; 0 \leq \tau \leq T]$ où elle est bornée et intégrable; dQ désigne l'élément d'aire au point Q de la surface S.

La fonction (14) vérifie l'équation (8) en tout point intérieur A du domaine Ω, pour $0 < t < T$. Nous avons étudié plusieurs propriétés de l'intégrale (14) et de ses dérivées dans le travail [6]. Ici nous citons trois des propriétés dont nous aurons besoin.

THÉORÈME 1. — *Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ de simple couche est une fonction bornée et intégrable, alors le potentiel (14) dans l'ensemble $[\Omega + S ; (0, T)]$ vérifie une condition de Hölder de la forme*

$$|U(A, t) - U(A_1, t_1)| < \text{Cte. sup}|\varphi| \left[r_{AA_1}^{\theta} + |t - t_1|^{\frac{1}{2}\theta'} \right], \tag{14'}$$

où θ, θ' étant deux constantes positives arbitraires, inférieures à l'unité.

THÉORÈME 2. — *Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ de la couche est continue, une certaine combinaison linéaire des dérivées premières du potentiel de simple couche (14),*

$$\frac{d}{dT_P}[U(A, t)] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, t) \cos(N_P, x_\beta) U_{x_\alpha}(A, t), \tag{15}$$

dite dérivée transversale, relative au point P de la surface S, possède la propriété limite suivante :

$$\lim_{A \to P} \frac{d}{dT_P}[U(A, t)] = -\frac{1}{2} \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det |a^{\alpha\beta}(P, t)|}} \varphi(P, t) + \int_0^t \iint_S \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)]\varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau. \tag{16}$$

La dérivée transversale de la solution fondamentale vérifie l'inégalité suivante aux singularités séparées :

$$\left| \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)] \right| < \frac{\text{Cte}}{(t - \tau)^{\mu'}} \frac{1}{r_{PQ}^{n+1-2\mu'-\varkappa_1}}, \tag{17}$$

où $\varkappa_1 = \min(h, 2h', \varkappa)$ et μ' est une constante positive choisie arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle $\left(1 - \frac{\varkappa_1}{2}, 1\right)$. Les singularités de la limitation (17) sont faibles, d'après l'inégalité $n + 1 - 2\mu' - \varkappa_1 < n - 1$, et l'intégrale (16) a un sens.

THÉORÈME 3. — *Si les conditions du théorème* I *sont satisfaites, l'intégrale*

$$H(P, t) = \int_0^t \iint_S \frac{d}{d\Gamma_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)]\varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau, \tag{17'}$$

qui figure dans la propriété limite (16), *vérifie en tout point* P *de la surface* S *la condition de Hölder suivante :*

$$|H(P, t) - H(P_1, t_1)| < \text{Cte. sup}\,|\varphi|\left[r_{PP_1}^{\theta\varkappa_1} + |t - t_1|^{\frac{1}{3}\theta'\varkappa_1}\right], \tag{17''}$$

θ, θ' *étant deux constantes positives arbitraires, inférieures à l'unité.*

Soit maintenant, défini sur la surface S, un champ des directions $\{s_P\}$, qui à tout point P de la surface S fait correspondre un axe déterminé s_P tangent en P à la surface S. Nous admettons que l'angle, que font les directions du champ aux deux points arbitraires P et Q de la surface S, vérifie l'inégalité

$$(s_P, s_Q) < \text{Cte}\, r_{PQ}^{h_s}, \tag{18}$$

où h_s est une constante positive non supérieure à l'unité.

Dans nos considérations actuelles les deux propriétés suivantes des dérivées tangentielles du potentiel de simple couche (14), que nous avons démontrées dans le travail [7], possèdent une importance essentielle.

THÉORÈME 4. — *Si la densité de la couche est continue et vérifie une condition de Hölder de la forme*

$$|\varphi(Q, \tau) - \varphi(Q_1, \tau)| < k_\varphi r_{QQ_1}^{h_\varphi} \qquad (k_\varphi > 0;\ 0 < h_\varphi \leq 1), \tag{19}$$

alors la dérivée du potentiel de simple couche (14), *au point intérieur* $A \in \Omega$ (*pour* $0 < t < T$) *dans la direction de la tangente* s_P *au point arbitraire* $P \in S$, *possède une limite déterminée par la formule*

$$\lim_{A \to P} \frac{d}{ds_P}[U(A, t)] = U_{s_P}(P, t) = \int_0^t \iint_S \Gamma_{s_P}(P, t; Q, \tau)\, \varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau. \tag{20}$$

Nous signalons que la dérivée tangentielle de la solution fondamentale admet la limitation

$$|\Gamma_{s_P}(P, t; Q, \tau)| < \frac{\text{Cte}}{(t - \tau)^\mu} \frac{1}{r_{PQ}^{n+1-2\mu}}; \tag{20'}$$

elle a une singularité trop forte pour en conclure la convergence absolue de l'intégrale (20). C'est pourquoi la preuve d'existence de la limite (20) dans le travail [7] exigeait des considérations plus délicates que pour l'intégrale (16). Nous avons démontré, sous l'hypothèse (19) que l'intégrale de surface dans la formule (20) qui n'est pas absolument convergente, admet une limitation à singularité faible

$$\left| \iint_S \Gamma_{s_P}(P, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\, dQ \right| < \frac{\text{Cte.}}{(t - \tau)^{\mu_1}} \tag{21}$$

$\left[\text{où } 1-\frac{\varkappa'}{2}<\mu_1<1,\ \varkappa'=\min(h, h_\varphi, \varkappa)\right]$ qui assure l'existence de l'intégrale (20) par rapport à la variable τ. Nous ajoutons encore que, d'après le travail [7], l'intégrale singulière a aussi le sens de valeur principale de Cauchy, c'est-à-dire qu'elle est égale à la limite suivante :

$$U_{s_P}(P, t)=\lim_{r_{II}\to 0}\int_0^t \iint_{S-S_{II}} \Gamma_{s_P}(P, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau, \tag{22}$$

où S_{II} est une portion de la surface S au voisinage du point P, découpée par le cylindre II de l'axe Px_n, normal en P à la surface S, et de rayon r_{II}.

Théorème 5. — *Si le champ* $\{s_P\}$ *de directions de tangentes sur la surface* S *vérifie la condition* (18), *si la densité de la couche* $\varphi(Q, \tau)$ *vérifie la même condition de Hölder* (19) *que dans le théorème précédent, et si en outre les exposants donnés vérifient l'inégalité*

$$h_\varphi<\min(h, 2h', 2\varkappa, h_s), \tag{23}$$

alors les valeurs limites (20) des dérivées du potentiel de simple couche (14) dans les directions du champ des tangentes $\{s_P\}$ vérifient une inégalité de Hölder de la forme

$$|U_{s_P}(P, t)-U_{s_{P_1}}(P_1, t_1)|<(C_1M_\varphi+C_2k_\varphi)\left(r_{PP_1}^{h_\varphi}+|t-t_1|^{\frac{1}{3}\theta\varkappa_*}\right) \tag{24}$$

avec la même valeur h_φ de l'exposant de Hölder que la densité φ; on a

$$\varkappa_*=\min\left(h, 2h', 3\varkappa, \frac{3}{2}h_\varphi\right), \tag{25}$$

$M_\varphi=\sup|\varphi|$, C_1 et C_2 sont des constantes positives, indépendantes de la fonction φ, et θ, une constante positive arbitraire inférieure à l'unité.

Remarque. — La valeur limite de la dérivée tangentielle (20), elle-même, vérifie une inégalité de la forme

$$|U_{s_P}(P, t)|<C_1'M_\varphi+C_2'k_\varphi, \tag{26}$$

où C_1' et C_2' sont des constantes positives indépendantes de la fonction φ.

Définition 2. — Nous appelons potentiel de charge spatiale relatif à l'équation parabolique (1), l'intégrale de volume

$$V(A, t)=\int_0^t \iiint_\Omega \Gamma(A, t; B, \tau)\rho(B, \tau)\, dB\, d\tau, \tag{27}$$

où la fonction $\rho(B, \tau)$ — dite la densité de la charge — est définie dans la région $[\Omega, (0, T)]$.

Théorème 6. — *Si la densité* $\rho(B, \tau)$ *est une fonction bornée et intégrable, le*

potentiel de charge spatiale (27) *satisfait par rapport à la variable t à une condition de Hölder de la forme*

$$|V(A, t) - V(A, t_1)| < \text{Cte.} \sup|\rho| . |t - t_1|^{0}, \tag{28}$$

et les premières dérivées spatiales de ce potentiel satisfont à une condition de Hölder de la forme

$$|V_{x_\alpha}(A, t) - V_{x_\alpha}(A_1, t_1)| < \text{Cte.} \sup|\rho| . \left[r_{AA_1}^{0} + |t - t_1|^{\frac{0'}{2}} \right] \tag{29}$$
$$(0 < \theta < 1,\ 0 < \theta' < 1).$$

Théorème 7. — *Si la densité* $\rho(B, \tau)$ *est une fonction continue par rapport à la variable t et vérifie une condition de Hölder par rapport à la variable* B, *alors le potentiel de charge spatiale admet des dérivées secondes spatiales en tout point intérieur* A *du domaine* Ω *pour* $0 < t < T$, *qui vérifient l'équation généralisée de Poisson :*

$$\hat{\Psi}[V(A, t)] = - \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A, t)|}} \rho(A, t). \tag{30}$$

3. Énoncé du problème. — Soient q champs de directions des tangentes

$$\{s_P^{(1)}\},\quad \{s_P^{(2)}\},\quad \ldots,\quad \{s_P^{(q)}\} \tag{31}$$

définies sur la surface S; on suppose que

$$1 \leq q \leq n - 1.$$

Nous admettons que tous les champs (27) vérifient une condition de la forme (18), c'est-à-dire que l'angle entre deux directions du même champ, correspondant aux deux points arbitraires P et Q de la surface S, vérifient l'inégalité

$$(s_P^{(\alpha)} s_Q^{(\alpha)}) < \text{Cte.} r_{PQ}^{h_s} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q), \tag{32}$$

où $0 < h_s \leq 1$.

Nous posons le problème de la détermination d'une fonction $u(A, t)$ qui :

1° vérifie l'équation donnée (1) en tout point intérieur de la région

$$[A \in \Omega;\ 0 < t < T];$$

2° satisfait à une condition limite aux dérivées tangentielles de la forme

$$\frac{du}{dT_P} + g(P, t)u(P, t) = G[P, t, u(P, t), u_{s_P^{(1)}}(P, t), \ldots, u_{s_P^{(q)}}(P, t)] \tag{33}$$

en tout point $P \in S$ pour $0 < t < T$;

3° vérifie la condition initiale

$$\lim_{t \to 0} u(A, t) = 0 \tag{34}$$

en tout point intérieur $A \in \Omega$.

Nous admettons que la fonction donnée $G(P, t, u_0, u_1, \ldots, u_q)$ est définie, continue dans la région fermée

$$(35) \qquad P \in S; \quad 0 \leq t \leq T; \quad |u_\alpha| \leq R \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, q)$$

et qu'elle vérifie une condition de Hölder de la forme

$$(36) \qquad |G(P, t, u_0, u_1, \ldots, u_q) - G(P', t', u'_0, u'_1, \ldots, u)_q^k| < k_G \left[r_{PP'}^{h_G} + |u_0 - u'_0|^{h'_G} + \sum_{\alpha=1}^{q} |u_\alpha - u'_\alpha| \right].$$

En outre, on suppose l'égalité

$$(37) \qquad G(P, 0, u_0, u_1, \ldots, u_q) = 0.$$

Quant à la fonction donnée $g(P, t)$, on suppose qu'elle soit définie dans la région

$$[P \in S; \ 0 \leq t \leq T],$$

qu'elle soit continue par rapport à la variable t et qu'elle vérifie une condition de Hölder de la forme

$$(38) \qquad |g(P, t) - g(P', t)| < k_g r_{PP'}^{h_g}.$$

4. Résolution du problème. — Nous allons chercher la solution du problème sous la forme d'une somme

$$(39) \qquad u(A, t) = \int_0^t \iiint_{\Omega(B)} \Gamma(A, t; B, \tau) F_1\left[B, \tau, u(B, \tau), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right] dB\, d\tau + \int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma(A, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau$$

du potentiel de charge spatiale et du potentiel de simple couche de densité inconnue $\varphi(Q, \tau)$. On pose

$$(40) \qquad F_1(B, \tau, u, u_1, \ldots, u_n) = -(2\sqrt{\pi})^{-n} \sqrt{\det |a^{\alpha\beta}(B, \tau)|}\, F(B, \tau, u, u_1, \ldots, u_n).$$

En demandant que la fonction (39) vérifie la condition limite (33), sous l'hypothèse que la fonction $\varphi(Q, \tau)$ vérifie une condition de Hölder par rapport à la variable Q, d'après les théorèmes 1 et 2, on obtient l'équation suivante :

$$(41) \qquad \begin{aligned} &- \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det |a^{\alpha\beta}(P, t)|}} \varphi(P, t) \\ &+ \int_0^t \iint_{S(Q)} \left\{ \frac{d}{d\Gamma_P} [\Gamma(P, t; Q, \tau)] + g(P, t) \Gamma(P, t; Q, \tau) \right\} \varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau \\ &+ \int_0^t \iiint_{\Omega(B)} \left\{ \frac{d}{d\Gamma_P} [\Gamma(P, t; B, \tau)] + g(P, t) \Gamma(P, t; B, \tau) \right\} \\ &\quad \times F_1\left[B, \tau, u(B, \tau), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right] dB\, d\tau \\ &= G\left[P, t, u(P, t), u_{s_P^{(1)}}(P, t, \ldots, u_{s_P^{(q)}}(P, t)\right], \end{aligned}$$

où

$$(42)\quad u_{s_P^{(\alpha)}}(P,t)=\int_0^t\iint_{\Omega(B)}\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;B,\tau)F_1\left[B,\tau,u(B,\tau),\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\right]dB\,d\tau$$
$$+\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau\qquad(\alpha=1,2,\ldots,q).$$

Notre problème se ramène à la résolution du système d'équations intégrodifférentielles (39), (41) aux deux fonctions inconnues : $u(A,t)$ et $\varphi(P,t)$; la première dans la région $[\Omega;(0,T)]$, la seconde dans la région $[S;(0,T)]$. Les équations précédentes présentent des singularités fortes sous le signe de l'intégrale de surface dans les expressions (42). Les autres intégrales admettent des singularités faibles.

Pour résoudre le système d'équations (39), (41), considérons le système suivant d'équations intégrales :

$$(43)\quad\begin{cases}u_0(A,t)=\displaystyle\int_0^t\iint_{\Omega(B)}\Gamma(A,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u_0(B,\tau),u_1(B,\tau),\ldots,u_n(B,\tau)]\,dB\,d\tau\\ \qquad+\displaystyle\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau,\\ u_\nu(A,t)=\displaystyle\int_0^t\iint_{\Omega(B)}\Gamma_{x_\nu}(A,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u_0(B,\tau),\ldots,u_n(B,\tau)]\,dB\,d\tau\\ \qquad+\displaystyle\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma_{x_\nu}(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau\\ \qquad\qquad(\nu=1,2,\ldots,n);\end{cases}$$

$$(44)\quad-\frac{(2\sqrt{\tau})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\varphi(P,t)$$
$$+\int_0^t\iint_{S(Q)}\left\{\frac{d}{d\mathrm{T}_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau]+g(P,t)\Gamma(P,t;Q,\tau)\right\}\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$
$$+\int_0^t\iint_{\Omega(B)}\left\{\frac{d}{d\mathrm{T}_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)]\right.$$
$$\left.+g(P,t)\Gamma(P,t;B,\tau)\right\}F_1[B,\tau,u_0(B,\tau),\ldots,u_n(B,\tau)]\,dB\,d\tau$$
$$=G\left[P,t,u_0(P,t),\overline{u}_{s_P^{(1)}}(P,t),\ldots,\overline{u}_{s_P^{(q)}}(P,t)\right]$$

aux $n+2$ fonctions inconnues

$$u_0(A,t),\quad u_1(A,t),\quad\ldots,\quad u_n(A,t),\quad\varphi(P,t).$$

On a

$$(45)\quad\overline{u}_{s_P^{(\alpha)}}(P,t)$$
$$=\int_0^t\iint_{\Omega(B)}\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u_0(B,\tau),u_1(B,\tau),\ldots,u_n(B,\tau)]\,dB\,d\tau$$
$$+\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau\qquad(\alpha=1,2,\ldots,q).$$

Le système d'équations intégrales (43), (44), aux fortes singularités, étant irrésoluble par les méthodes d'analyse classique, nous démontrerons l'existence de la solution par l'application du théorème topologique suivant de J. Schauder [8] sur le point invariant d'une transformation dans l'espace de Banach :

Toute transformation continue d'un ensemble de points, convexe, borné et fermé dans un espace linéaire, normé et complet, en un sous-ensemble compact, admet au moins un point invariant.

Soit donc un espace fonctionnel A composé de tous les systèmes

$$[u_0(A, t), u_1(A, t), \ldots, u_n(A, t), \varphi(P, t)]$$

de fonctions *continues réelles*, définies soit dans la région fermée $[A \in \Omega + S;\ 0 \leq t \leq T]$, soit dans la région fermée $[P \in S;\ 0 \leq t \leq T]$.

On définit, comme d'habitude, la somme de deux points et le produit d'un point par le nombre réel, par les formules

$$\begin{aligned} &[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi] + [u'_0, u'_1, \ldots, u'_n, \varphi'] = [u_0 + u'_0, u_1 + u'_1, \ldots, u_n + u'_n, \varphi + \varphi'], \\ &\gamma[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi] = [\gamma u_0, \gamma u_1, \ldots, \gamma u_n, \gamma\varphi], \end{aligned} \tag{46}$$

la norme d'un point $U[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ par la formule

$$\| U \| = \sum_{\nu=0}^{n} \sup | u_\nu(A, t) | + \sup | \varphi(P, t) | \tag{47}$$

et la distance des deux points, par la formule

$$\delta(U, V) = \| U - V \|. \tag{48}$$

Il est facile de conclure, que l'espace A est linéaire, normé et complet, donc un espace de Banach.

Considérons maintenant dans l'espace A l'ensemble E de tous les points $U[u_0(A, t), u_1(A, t), \ldots, u_n(A, t), \varphi(P, t)]$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} | u_\nu(A, t) | \leq R & (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ | \varphi(P, t) | \leq \rho, & \varphi(P, 0) = 0, \\ | \varphi(P, t) - \varphi(P_1, t) | \leq k_\varphi r_{PP_1}^{h_\varphi}, \end{cases} \tag{49}$$

R étant un nombre positif donné, figurant dans les conditions concernant les fonctions F et G, ρ et k_φ étant deux constantes positives arbitraires, non fixées pour le moment, l'exposant h_φ est un nombre positif fixé *arbitrairement*, mais sous la condition que les inégalités suivantes soient satisfaites :

$$0 < h_\varphi \begin{cases} \leq \min(h_G, h_g) < 1, \\ < h'_G \leq 1, \\ < h_s \leq 1, \\ < \varkappa_1 = \min(h, 2h', \varkappa). \end{cases} \tag{50}$$

L'ensemble E est évidemment *fermé*, en outre il est *convexe*, puisque tout point

$$(1-\gamma)U+\gamma V \qquad (0\leq\gamma\leq 1)]$$

du segment, joignant les deux points arbitraires U et V de l'ensemble E, appartient à cet ensemble.

Remarque faite de la forme des équations intégrales (43) et (44), transformons l'ensemble E par les relations suivantes :

$$(51)\quad \begin{cases} \varphi_0(A,t)=\displaystyle\int_0^t \iiint_{\Omega(B)} \Gamma(A,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u_0(B,\tau),u_1(B,\tau),\ldots,u_n(B,\tau)]\,dB\,d\tau \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma(A,t;Q,\tau)\psi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau; \\ \varphi_\nu(A,t)=\displaystyle\int_0^t \iiint_{\Omega(B)} \Gamma_{x_\nu}(A,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u_0(B,\tau),u_1(B,\tau),\ldots,u_n(B,\tau)]\,dB\,d\tau \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma_{x_\nu}(A,t;Q,\tau)\psi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau \qquad (\nu=1,2,\ldots,n); \end{cases}$$

$$(51')\quad -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}\psi(P,t)$$

$$+\int_0^t \iint_{S(Q)} \left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]+g(P,t)\Gamma(P,t;Q,\tau)\right\}\psi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$

$$+\int_0^t \iiint_{\Omega(B)} \left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)]+g(P,t)\Gamma(P,t;B,\tau)\right\}$$

$$\times F_1[B,\tau,u_0(B,\tau),\ldots,u_n(B,\tau]\,dB\,d\tau$$

$$=G\left[P,t,\varphi_0(P,t),\overline{u}_{s_P^{(1)}}(P,t),\ldots,\overline{u}_{s_P^{(q)}}(P,t)\right].$$

Cherchons les conditions pour que ces relations fassent correspondre à tout point $U(u_0, u_1, \ldots, u_n, \psi)$ de l'ensemble E un point déterminé $V(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi)$ du même ensemble.

D'abord faisons l'analyse des relations (51). En s'appuyant sur les limitations

$$(52)\quad \begin{cases} |\Gamma(A,t;B,\tau)|<\dfrac{\text{Cte}}{(t-\tau)^\mu}\,\dfrac{1}{r_{AB}^{n-2\mu}}, \\ |\Gamma_{x_\nu}(A,t;B,\tau)|<\dfrac{\text{Cte}}{(t-\tau)^\mu}\,\dfrac{1}{r_{AB}^{n+1-2\mu}} \end{cases}$$

et sur la décomposition

$$(53)\quad \int_0^t \iint_S \Gamma_{x_\nu}(A,t;Q,\tau)\psi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau=\int_0^t \psi(P,\tau)\left[\iint_S \Gamma_{x_\nu}(A,t;Q,\tau)\,dQ\right]d\tau$$

$$+\int_0^t \iint_S \Gamma_{x_\nu}(A,t;Q,\tau)[\psi(Q,\tau)-\psi(P,\tau)]\,dQ\,d\tau,$$

P étant le point de la surface S le plus rapproché du point intérieur $A\in\Omega$, nous

concluons que les fonctions (51) vérifient les inégalités

$$(54)\quad \begin{cases} |\varphi_0(A, t)| < c_1 t^{1-\mu} \sup|F| + c_2 t^{1-\mu} \sup|\varphi|, \\ |\varphi_\nu(A, t)| < c'_1 t^{1-\mu} \sup|F| + c'_2 \sup_{0,t}|\varphi| + c'_3 t^{1-\mu} k_\varphi \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

μ étant fixé à l'intérieur de l'intervalle $\left(1 - \frac{1}{2}h_\varphi, 1\right)$, c_1, c_2, c'_1, c'_2, c'_3 sont des constantes positives, indépendantes des fonctions F et φ, et de T. D'après le théorème 1, la fonction $\varphi_0(A, t)$ vérifie une condition de Hölder sous la forme

$$(55)\quad |\varphi_0(A, t) - \varphi_0(A_1, t_1)| < [\bar{c}_1 \sup|F| + \bar{c}_2 \sup|\varphi|]\left[r^{\theta}_{AA_1} + |t - t_1|^{\frac{1}{2}\theta'}\right];$$

$\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ sont des constantes positives indépendantes des fonctions F et φ.

En outre, grâce à la condition $\varphi(P, o) = o$, et en admettant les valeurs limites des fonctions φ_0, φ_ν comme les *valeurs* de ces fonctions à la surface S, nous concluons que les fonctions $\varphi_0(A, t)$, $\varphi_\nu(A, t)$ sont *continues* dans l'ensemble fermé $[A \in \Omega + S,\ o \leq t \leq T]$.

Remarquons encore qu'on peut fixer les constantes c'_1, c'_2, c'_3, pour que les inégalités de la même forme (54) soient vérifiées par les fonctions (45)

$$(56)\quad \left|\overline{u}_{s^{(\alpha)}_P}(P, t)\right| < c'_1 t^{1-\mu} \sup|F| + c'_2 \sup|\varphi| + c'_3 t^{1-\mu} k_\varphi.$$

Passons maintenant à l'analyse de la relation (51′). Tout d'abord nous voyons, d'après (56), que le membre droit G aura un sens et sera continu, si les constantes positives arbitraires ρ et k_φ vérifient les inégalités

$$(57)\quad \begin{cases} c_1 T^{1-\mu} \sup|F| + c_2 T^{1-\mu}\rho \leq R, \\ c'_1 T^{1-\mu} \sup|F| + c'_2 \rho + c'_3 T^{1-\mu} k_\varphi \leq R. \end{cases}$$

D'après les théorèmes (24), (29) et les inégalités (36), (50), (55), le membre droit de la relation (51′) vérifie une inégalité de Hölder de la forme

$$(58)\quad \begin{aligned} &\Big|G\Big[P, t, \varphi_0(P, t), \overline{u}_{s^{(1)}_P}(P, t), \ldots, \overline{u}_{s^{(q)}_R}(P, t)\Big] \\ &\qquad - G\Big[P_1, t, \varphi_0(P_1, t), \overline{u}_{s^{(1)}_{P_1}}(P_1, t), \ldots, \overline{u}_{s^{(q)}_{P_1}}(P_1, t)\Big]\Big| \\ &\leq k_G\Big[r^{h_G}_{PP_1} + (\bar{c}_1 M_F + \bar{c}_2\rho)^{h'_G} r^{\theta h'_G}_{PP_1} + c_0 M_F r^{\theta}_{PP_1} + q(C_1\rho + C_2 k_\varphi) r^{h_\varphi}_{PP_1}\Big] \\ &\leq k_G\Big[a_1 + a_2(M_F + \rho)^{h'_G} + a_3 M_F + a_4\rho + a_5 k_\varphi\Big] r^{h_\varphi}_{PP_1}, \end{aligned}$$

on désigne par a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 des constantes positives, indépendantes des fonctions F, G et $M_F = \sup|F|$.

La relation (51) définit la fonction $\psi(P, t)$ comme une solution de l'équation de Volterra,

$$(59)\quad -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P, t)|}}\psi(P, t) + \int_0^t \iint_{S(Q)} \left\{\frac{d}{d\tau_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)] + g(P, t)\Gamma(P, t; Q, \tau)\right\}\psi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau = f(P, t),$$

où $f(P, t)$ est une fonction continue déterminée.

D'après la limitation (17), l'équation (59) admet une solution, déterminée par la formule

$$\psi(P,t) = -\frac{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,t)|}}{(2\sqrt{\pi})^n} f(P,t) \tag{60}$$
$$- 2(2\sqrt{\pi})^n \int_0^t \iint_{S(Q)} \mathfrak{N}(P,t;Q(t)\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,\tau)|}\, f(Q,\tau)\, dQ\, d\tau,$$

où $\mathfrak{N}$ désigne le noyau résolvant du noyau de l'équation (59).

La fonction ψ vérifie donc l'inégalité

$$|\psi(P,t)| < (1 + K_{\mathfrak{N}}) K_a \sup|f(P,t)|, \tag{61}$$

où $K_{\mathfrak{N}}$, K_a désignent les bornes supérieures des fonctions

$$\begin{cases} K_{\mathfrak{N}} = \sup \int_0^t \iint_{S(Q)} |\mathfrak{N}(P,t;Q,\tau)|\, dQ\, d\tau, \\ K_a = \sup\left[2(2\sqrt{\pi})^{-n}\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P,\tau)|}\right]. \end{cases} \tag{62}$$

Or, nous avons la limitation

$$\left|\frac{d}{d T_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)] + g(P,t)\Gamma(P,t;B,\tau)\right| < \frac{C}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{1}{r_{PB}^{n+1-2\mu}}.$$

Il en résulte qu'au point $U(u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi)$ de l'ensemble E correspond la solution unique continue $\psi(P,t)$ de l'équation (51′) vérifiant l'inégalité

$$|\psi(P,t)| < (1 + K_{\mathfrak{N}}) K_a \left[\frac{C\bar{C}K_a}{1-\mu} T^{1-\mu} M_F + \sup|G|\right], \tag{63}$$

où

$$\bar{C} = \sup\left[\iint_{\Omega(B)} \frac{dB}{r_{PB}^{n+1-2\mu}}\right].$$

Nous signalons que, d'après la propriété admise (37) de la fonction G, on a

$$\psi(P,0) = \lim_{t\to 0} \psi(P,t) = 0. \tag{64}$$

Cherchons une condition de Hölder pour la fonction $\psi(P,t)$. Dans ce but remarquons, en nous appuyant sur la *continuité* de la fonction ψ et sur les théorèmes 1 et 3, que la première, $I_1(P,t)$, des intégrales dans le membre gauche de l'équation (51′), vérifie l'inégalité de Hölder

$$|I_1(P,t) - I_1(P_1,t)| < \text{Cte.}\sup|\psi|\, r_{PP_1}^{h_\varphi} \tag{65}$$

[en tenant compte des inégalités admises (50)] et que la seconde, $I_2(P,t)$, d'après le théorème 6, vérifie l'inégalité de Hölder de la même forme

$$|I_2(P,t) - I_2(P_1,t)| < \text{Cte.}\sup|\psi|\, r_{PP_1}^{h_\varphi}. \tag{65'}$$

Mais nous avons vu, que le membre droit vérifie aussi une condition de

Hölder (58) avec l'exposant h_φ, nous en concluons que la solution $\psi(P, t)$ de l'équation (51′) vérifie une condition de Hölder sous la forme

$$(66)\qquad \begin{aligned} |\psi(P, t) - \psi(P_1, t)| < \{ & D_1 \sup|\psi| \\ & + D_2 k_G [a_1 + a_2 (M_F + \rho)^{h'_G} + a_3 M_F + a_4 \rho + a_5 k_\varphi] \} r_{PP_1}^{h_\varphi}. \end{aligned}$$

D_1, D_2 étant des constantes positives, indépendantes des fonctions F et G.

En rapprochant les inégalités obtenues (54), (63), (66), nous pouvons affirmer que l'ensemble transformé E′ de l'ensemble E par les relations (51) et (51′) ferait partie de l'ensemble E[c'est-à-dire vérifierait les conditions (49)], si les constantes du problème vérifient les inégalités suivantes :

$$(67)\qquad \begin{cases} c_1 T^{1-\mu} M_F + c_2 T^{1-\mu} \rho \leq R, \\ c'_1 T^{1-\mu} M_F + c'_2 \rho + c'_3 T^{1-\mu} k_\varphi \leq R, \\ (1 + K_{\mathcal{R}}) K_a \left(\dfrac{C \bar{C} K_a}{1-\mu} T^{1-\mu} M_F + \sup|G| \right) \leq \rho, \\ D_1 \rho + D_2 k_G [a_1 + a_2 (M_F^1 + \rho)^{h'_G} + a_3 M_F + a_4 \rho + a_5 k_\varphi] \leq k_\varphi. \end{cases}$$

Avant d'appliquer le théorème de Schauder, nous démontrerons encore les deux théorèmes suivants :

Théorème 8. — *La transformation de l'ensemble* E, *définie par les relations* (51) *et* (51′), *est* continue *dans l'espace fonctionnel* Λ, *les conditions* (57) *étant vérifiées.*

Démonstration. — Soit une suite arbitraire de points $U_m[u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \ldots, u_n^{(m)}, \varphi^{(m)}]$ de l'ensemble E tendant vers le point limite $U[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ du même ensemble

$$\delta(U_m, U) = \| U_m - U \| \to 0 \qquad \text{si} \quad m \to \infty.$$

Cela veut dire que les suites fonctionnelles $\{u_\nu^{(m)}(A, t)\}$ et $\{\varphi^{(m)}(P, t)\}$ tendent *uniformément* vers les fonctions $u_\nu(A, t)$ resp. $\varphi(P, t)$. Soit la suite

$$V_m[\varphi_0^{(m)}, \varphi_1^{(m)}, \ldots, \varphi_n^{(m)}, \psi^{(m)}]$$

de points de l'espace Λ correspondant aux points U_m par les relations (51) et (51′). Le théorème sera démontré, si nous prouvons que le point limite

$$\lim_{m \to \infty} V_m = V[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi]$$

de la suite transformée correspond par les relations (51) et (51′) au point limite $U[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ de la suite $\{u_\nu^{(m)}\}$. Dans ce but il suffit de démontrer que toutes les intégrales, dans les expressions (51) et (51′), contenant les fonctions $u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \ldots, u_n^{(m)}, \varphi^{(m)}$, tendent uniformément vers les mêmes intégrales, contenant les fonctions limites $u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi$. Cette propriété est évidente pour les intégrales aux singularités faibles, d'après le théorème classique sur la convergence des intégrales. Il suffit donc d'étudier les intégrales à singularité

forte

$$(68)\qquad J^{(m)}(P,t)=\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\varphi^{(m)}(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$

étant les « sommandes » des fonctions (45). Nous démontrerons que les intégrales singulières (68) tendent uniformément vers l'intégrale singulière

$$(69)\qquad J(P,t)=\int_0^t\iint_{S(Q)}\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau\qquad\text{si}\quad\varphi^{(m)}\to\varphi.$$

Écrivons donc

$$(70)\qquad J^{(m)}(P,t)=\int_0^t\varphi^{(m)}(P,\tau)\left[\iint_S\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\,dQ\right]d\tau$$
$$+\int_0^t\iint_S\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\left[\varphi^{(m)}(Q,\tau)-\varphi^{(m)}(P,\tau)\right]dQ\,d\tau,$$

$$(70')\qquad J(P,t)=\int_0^t\varphi(P,\tau)\left[\iint_S\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\,dQ\right]d\tau$$
$$+\int_0^t\iint_S\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\left[\varphi(Q,\tau)-\varphi(P,\tau)\right]dQ\,d\tau.$$

La différence des premières sommandes des sommes (70) et (70′) a pour expression

$$(71)\qquad J_1^{(m)}(P,t)-J_1(P,t)=\int_0^t\left[\varphi^{(m)}(P,\tau)-\varphi(P,\tau)\right]\left[\iint_S\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\,dQ\right]d\tau,$$

d'où, remarque faite de la limitation (21), nous concluons immédiatement que cette différence tend uniformément vers zéro, si $m\to\infty$. Pour étudier la différence des secondes sommandes des sommes (70) et (70′), décomposons ces intégrales en sommes des intégrales

$$(72)\qquad\begin{cases}J_2^{(m)}(P,t)=J_2^{(m)\sigma}(P,t)+J_2^{(m)S-\sigma}(P,t),\\ J_2(P,t)=J_2^{\sigma}(P,t)+J_2^{S-\sigma}(P,t),\end{cases}$$

étendues à une portion σ de surface S, contenant à son intérieur le point P, et à la partie restante $S-\sigma$. D'après les inégalités (20′) et (49), nous avons la limitation aux faibles singularités

$$(73)\qquad\left|\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\left[\varphi(Q,\tau)-\varphi(P,\tau)\right]\right|<\frac{\text{Cte}}{(t-\tau)^{\mu}}\,\frac{1}{r_{FQ}^{n+1-2\mu-h_\varphi}}$$

où $1-\frac{h_\varphi}{2}<\mu<1$, donc les secondes intégrales dans les formules (70) et (70′) sont absolument convergentes et nous pouvons à tout nombre positif ε faire correspondre une portion σ de la surface S de diamètre assez petit pour qu'on ait

$$(74)\qquad|J_2^{(m)\sigma}|<\frac{\varepsilon}{3};\qquad|J_2^{\sigma}|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

La portion σ étant fixée et le point P étant extérieur à la surface $S - \sigma$, les sommandes (72) étendues à la surface $S - \sigma$, sont des intégrales régulières, par conséquent nous pouvons ensuite faire correspondre au nombre ε un indice m_ε, tel qu'on ait

$$|J_2^{(m)S-\sigma}(P, t) - J_2^{S-\sigma}(P, t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad m > m_\varepsilon. \tag{75}$$

En somme, nous concluons avec la propriété limite

$$\lim_{m\to\infty} J^{(m)}(P, t) = J(P, t). \tag{76}$$

D'une façon analogue, on peut étudier la seconde intégrale dans l'expression [formule (51)] pour $\varphi_\nu(A, t)$. Il en résulte la thèse du théorème 8.

Théorème 9. — *L'ensemble transformé* E′ *de l'ensemble* E *est* compact.

Démonstration. — D'après les théorèmes 1, 2, 3, 4, 5, 6, toutes les intégrales, qui figurent dans les relations (51) et (51′) [excepté la dernière dans (51)], vérifient des conditions de Hölder par rapport aux variables spatiales et par rapport à la variable t. Quant à la dernière intégrale dans les relations (51), on sait que ses valeurs limites à la surface S vérifient une condition de Hölder et que la tendance vers les valeurs limites est uniforme. Il est facile d'en déduire que l'estimation de la continuité de la dernière intégrale dans (51) ne dépend que des constantes k_φ, h_φ, caractérisant les fonctions φ. Nous en concluons que les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ concernant l'ensemble transformé E′ forment une famille de fonctions *également continues* et *également bornées*. Il en résulte, d'après un théorème connu d'Arzelà, que l'ensemble de points E′ dans l'espace A est *compact*. C. Q. F. D.

En s'appuyant sur les propriétés démontrées de l'ensemble E′, nous en concluons, d'après le théorème de Schauder, l'existence d'un point $U^*(u_0^*, u_1^*, \ldots, u_n^*, \varphi^*)$ de l'ensemble E invariant relativement à la transformation (51), (51′). Ce système $[u_0^*(A, t), u_1^*(A, t), \ldots, u_n^*(A, t), \varphi^*(P, t)]$ de fonctions présente donc une solution du système d'équations (43) et (44′). Or, d'après les propriétés du potentiel de simple couche et de charge spatiale, nous avons

$$u_\nu^*(A, t) = \frac{\partial u_0^*(A, t)}{\partial x_\nu} \qquad (A \in \Omega;\ 0 < t < T),$$

donc les fonctions $u_0^*(A, t)$, $\varphi^*(P, t)$ forment une solution du système d'équations intégrodifférentielles (39) et (41). Nous allons montrer que la fonction $u_0^*(A, t)$ est une solution du problème aux limites proposé. En effet, d'après le théorème 6, les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}[u_0^*(B, \tau)]$$

vérifient une condition de Hölder par rapport à la variable B, dans tout domaine

fermé $\Omega^* \subset \Omega$, donc la fonction

$$F\left[B, \tau, u_0^*(B, \tau) \frac{\partial u_0^*}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u_0^*}{\partial \xi_n}\right]$$

vérifie une condition de Hölder par rapport à la variable B. Il en résulte, en vertu du théorème 7, que la fonction $u_0^*(A, t)$ admet les secondes dérivées vérifiant l'équation donnée (1) en tout point intérieur A du domaine Ω, pour $0 < t < T$. Cette fonction vérifie la condition limite (33) en tout point P de la surface S, d'après l'équation (42). En outre, elle vérifie évidemment la condition initiale (34), donc la fonction $u_0^*(A, t)$ est une solution du problème proposé. Nous pouvons par conséquent énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 10. — *Si les coefficients de l'équation différentielle* (1), *les fonctions* F, G, *g et la surface* S, *limitant le domaine* Ω, *vérifient les conditions* I, II, III, IV, V, (36), (37), (38), *si en outre les q champs de directions* $\{s_P^{(\alpha)}\}$ *sur la surface* S *vérifient les conditions* (32) *et si enfin les constantes du problème vérifient les conditions* (67), *alors il existe au moins une fonction* $u(A, t)$ *dans la région* $[A \in \Omega ; 0 \leq t \leq T]$, *vérifiant en tout point intérieur de cette région l'équation* (1) *et les conditions : limite* (33) *et initiale* (34).

A la fin de ce travail nous allons discuter encore les conditions (67) d'existence de la solution. Le choix des constantes positives ρ et k_φ étant arbitraires, les inégalités (67) seront satisfaites, si les bornes supérieures M_F, $\sup|G|$ et le coefficient de Hölder k_G sont suffisamment petites. Si la borne supérieure M_F est un nombre positif, donné *a priori*, alors les inégalités (67) seront satisfaites, si la longueur T de l'intervalle de la variable t et le coefficient k_G sont suffisamment petits, puisque $\sup|G| \to 0$, si $T \to 0$. Il est bien naturel de profiter de cette circonstance, que les constantes ρ, k_φ sont arbitraires et de choisir ces valeurs, pour que les longueurs des intervalles de variation permise soient les plus grandes possible.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. POINCARÉ, *Mécanique céleste*, vol. III, Paris, 1910.

[2] B. HVÉDÉLIDZÉ, *Sur le problème aux limites de Poincaré* (en russe) (*C. R. Acad. S. S. S. R.*, 1941, p. 195-198).

[3] I. N. VÉCOUA, *Problèmes aux limites dans la théorie des équations elliptiques* (en russe) (*C. R. Acad. Sc. S. S. S. R.*, 1940).

[4] W. POGORZELSKI), *Problème aux limites de Poincaré généralisé* (*Annales Polonici Mathematici*, vol. 2, 1955).

[5] W. POGORZELSKI, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique* (*Ricerche di Matematica*, vol. 5, Napoli, 1956).

[6] W. POGORZELSKI, *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique* (*Annales Polonici Mathematici*, vol. 5, 1957).

[7] W. POGORZELSKI, *Propriétés des dérivées tangentielles d'une intégrale de l'équation parabolique* (*Ricerche di Matematica*, vol. 7, Napoli, 1957).

[8] J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen* (*Studia Mathematica*, vol. 2, 1930).

CERTAINES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION MAXIMUM D'UNE FONCTION MÉROMORPHE

PAR MM. S. K. BOSE ET R. P. SRIVASTAV.

1. Soit $f(z)$, une fonction méromorphe d'ordre ρ dont les zéros et les pôles, respectivement à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ et $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sont rangés en une suite non décroissante. Nous décrivons les cercles de rayons $|a_n|^{-h_1}$ et $|b_n|^{-h_2}$ dont chaque zéro et chaque pôle sont les centres. Puisque $\sum |a_n|^{-h_1}$ et $\sum |b_n|^{-h_2}$ convergent pour $h_1 > \rho_1$ et $h_2 > \rho_2$, où ρ_1 et ρ_2 sont les exposants de convergence des zéros et des pôles de $f(z)$, la somme des rayons des cercles est finie et, par conséquent, il existe des cercles avec centre à l'origine et de rayons arbitrairement grands se trouvant entièrement dans la « région exclue ». Bose ([1], p. 70) a défini les fonctions « maximum » et « minimum » $S(r)$ et $s(r)$ de $f(z)$ comme suit :

$$S(r) = \frac{M_1(r)}{m_2(r)} \geqq \max_{|z|=r} |f(z)| \tag{1.1}$$

et

$$s(r) = \frac{m_1(r)}{M_2(r)} \leqq \min_{|z|=r} |f(z)|, \tag{1.2}$$

où $M_1(r)$, $m_1(r)$ et $M_2(r)$, $m_2(r)$ sont les modules maximum et minimum respectivement de $f_1(z)$ et $P(z)$ pour $|z| = r$, où $P(z)$ est le produit canonique formé par les pôles de $f(z)$ et où

$$f_1(z) = f(z)\,P(z).$$

Le but du présent article est l'étude de quelques propriétés de $S(r)$ dans la « région exclue ».

PREMIÈRE PARTIE.

2. Théorème 1. — *Si* $S(r)$ *est la fonction maximum de* $f(z)$ *et* $S^{(1)}(r)$ *celle de* $f'(z)$, *où* $f'(z)$ *est la dérivée de* $f(z)$, *et s'il existe des points* w *et* w' *du plan* z *tels que* $|f(w)| = S(r)$ *et* $|f'(w')| = S^{(1)}(r)$, *on a*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\left\{r\frac{S^{(1)}(r)}{S(r)}\right\}}{\log r} = \rho. \tag{2.1}$$

Démonstration. — Nous avons ([1], [2] et [3])

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log S^{*}(r)}{\log r} = \rho, \tag{2.2}$$

où $\log S^{*}(r)$ est la plus grande des deux fonctions maxima de $\log f(z)$ et de $\log\frac{1}{f(z)}$, et

$$S^{(1)}(r) \geqq \frac{S(r)\log S^{*}(r)}{r\log r} \quad \text{pour} \quad r > r_0. \tag{2.3}$$

Ceci conduit à

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\left\{r\frac{S^{(1)}(r)}{S(r)}\right\}}{\log r} \geqq \rho. \tag{2.4}$$

De plus, nous avons

$$f'(z) = f(z)\left\{\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} - \frac{P'(z)}{P(z)}\right\},$$

où

$$|f'(z)| \leqq |f(z)|\left\{\left|\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right| + \left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right|\right\},$$

par conséquent [4]

$$|f'(\omega')| \leqq S(r)\,O(r^{\rho+\varepsilon-1}).$$

Donc

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\left\{r\frac{S^{(1)}(r)}{S(r)}\right\}}{\log r} \leqq \rho. \tag{2.5}$$

Des relations (2.4) et (2.5), nous obtenons le théorème 1.

Corollaire. — *Soient* $f^{(1)}(z)$, $f^{(2)}(z)$, $\ldots$, $f^{(n)}(z)$ *les dérivées de* $f(z)$ *et* $S^{(1)}(r)$, $S^{(2)}$, (r) $\ldots$, $S^{(n)}(r)$ *les fonctions maxima correspondantes; et s'il existe une suite de points* w_1, w_2, $\ldots$, w_n, *tels que*

$$|f^{(1)}(w_1)| = |S^{(1)}(r)|, \qquad |f^{(2)}(w_2)| = S^{(2)}(r), \qquad \ldots, \qquad |f^{(n)}(w_n)| = S^{(n)}(r),$$

on a alors

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\left[r\left\{\frac{S^{(n)}(r)}{S(r)}\right\}^{\frac{1}{n}}\right]}{\log r} = \rho. \tag{2.6}$$

3. THÉORÈME 2. — *Soient* $f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), \ldots, f^{(n)}(z)$ *les dérivées successives de* $f(z)$ *et* $S^{(1)}(r), S^{(2)}(r), \ldots, S^{(n)}(r)$ *les fonctions maxima correspondantes; s'il existe un suite de points* $w_1, w_2, \ldots, w_n$, *tels que*

$$|f^{(1)}(w_1)| = S^{(1)}(r), \quad |f^{(2)}(w_2)| = S^{(2)}(r), \quad \ldots, \quad |f^{(n)}(w_n)| = S^{(n)}(r),$$

on a alors

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\log\left[r\left\{\frac{S^{(n)}(r)}{S(r)}\right\}^{\frac{1}{n}}\right]}{\log r} \geqq \lambda, \tag{3.1}$$

où λ *est l'ordre inférieur de la fonction*

$$\lambda = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log\log S^*(r)}{\log r}. \tag{3.2}$$

Démonstration. — La relation (2.3) conduit à

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\log\left\{r\frac{S^{(1)}(r)}{S(r)}\right\}}{\log r} \geqq \lambda. \tag{3.3}$$

d'où l'on déduit facilement

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\log\left[r\left\{\frac{S^{(n)}(r)}{S(r)}\right\}^{\frac{1}{n}}\right]}{\log r} \geqq \lambda.$$

COROLLAIRE. — *Pour* $r \geqq r_0 = r_0(f)$, *et dans les conditions du théorème* 1, *on a*

$$S(r)r^{(\lambda-\varepsilon-1)n} < S^{(n)}(r) < S(r)r^{(\rho+\varepsilon-1)n}.$$

4. THÉORÈME 3. — *Soient* $n(r;\infty)$ *le nombre des pôles de* $f(z)$ *pour* $|z| \leqq r$ *et* $T(r)$ *la fonction caractéristique de R. Nevanlinna* ([5], p. 17). *On a donc*

$$T(r) \leqq \log S^*(r) + n(r)\log r \leqq \frac{R+r}{R-r}T(R) + kn(R)\log R,$$

où k *est une constante et où* $0 < r < R$, *pourvu que* $f(z)$ *soit régulière pour* $|z| \leqq 1$, *et où il existe une valeur de* θ *telle que*

$$|f(re^{i\theta})| = S(r).$$

Démonstration. — Nous avons

$$\begin{aligned} T(r) &= m(r;\infty) + N(r;\infty) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta + \int_0^r \frac{n(x;\infty)}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta + \int_1^k \frac{n(x;\infty)}{x}\,dx \\ &\leqq \log S^*(r) + n(r)\log r. \end{aligned}$$

On a aussi, d'après la formule de Poisson-Jensen,

$$\begin{aligned}\log|f(re^{i\theta})| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\log|f(Re^{i\Phi})|}{R^2-2Rr\cos(\Phi-\theta)+r^2}\,d\Phi \\ &\quad - \sum_{|a_n|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_n re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-a_n)}\right| \\ &\quad + \sum_{|b_n|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_n re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-b_n)}\right| \\ &\leq \frac{R+r}{R-r}T(R)+\sum_{|b_n|<R}\log\frac{R+|b_n|}{|r-|b_n||} \\ &\leq \frac{R+r}{R-r}T(R)+n(R)[\log 2R+\rho\log R]\end{aligned}$$

ou

$$\log S^*(r) \leq \frac{R+r}{R-r}T(R)+n(R)[\log 2+(1+\rho)\log R].$$

5. Applications. — S'il existe une suite de points w_1, w_2, w_n, tels que

$$|f(w)|=S(r), \qquad |f'(w_2)|=S^{(1)}(r), \qquad |f^{(n)}(w_{n+1})|=S^{(n)}(r),$$

on a les relations suivantes :

(*a*) Pour $\lambda>1$ et $r\geq r_0=r_0(f)$,

$$S(r),\quad [\Phi(r)]^{-1}S^{(1)}(r),\quad \ldots,\quad [\Phi(r)]^{-n}S^{(n)}(r)$$

forment une suite croissante où $\Phi(r)$ est une fonction croissante telle que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log\Phi(r)}{\log r}=0.$$

(*b*) Pour $\rho<1$ et $r\geq r_0=r_0(f)$,

$$S(r),\quad \Phi(r)S^{(1)}(r),\quad \ldots,\quad [\Phi(r)]^{n}S^{(n)}(r)$$

forment une suite décroissante où $\Phi(r)$ est une fonction croissante définie plus haut.

(*c*) Pour $\lambda>1$ et $r\geq r_0=r_0(f)$, on a

$$S^{(n)}(r)>S(r)\left[\frac{\log S^*(r)}{r\log r}\right]^n.$$

(*d*) Pour $\rho>1$, il existe une suite de valeurs de r tendant vers l'infini pour laquelle $S(r)$, $[\Phi(r)]^{-1}S^{(1)}(r)$, $\ldots$, $[\Phi(r)]^{-n}S^{(n)}(r)$ forment une suite croissante.

(*e*) Pour $\lambda<1$, il existe une suite de valeurs de r tendant vers l'infini pour laquelle $S(r)$, $\Phi(r)S^{(1)}(r)$, $\ldots$, $[\Phi(n)]^nS^{(n)}(r)$ forment une suite décroissante.

(*f*) Si pour les valeurs de $r \geqq r_0$,

$$S(r), \quad [\Phi(r)]^{-1}S^{(1)}(r), \quad \ldots, \quad [\Phi(r)]^{-n}S^{(n)}(r)$$

forment une suite croissante, on a $\lambda \geqq 1$.

(*g*) Si pour les valeurs de $r \geqq r_0$,

$$S(r), \quad \Phi(r)S^{(1)}(r), \quad \ldots, \quad [\Phi(r)]^{n}S^{(n)}(r)$$

forment une suite décroissante, on a $\rho \leqq 1$.

(*h*) Si $\rho < 1$, on a

$$\lim_{r\to\infty}\left\{r^p \frac{S^{(n)}(r)}{S(r)}\right\} = 0$$

à condition que $p < n(1-\rho)$.

Ce résultat s'obtient directement de (3.6).

6. Whittaker ([6], p. 257) a démontré que si $f(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre ρ et si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum\left[\left\{\frac{P_0 + P_1(z) + \ldots + P_{\mu-1}z^{\mu-1}}{(z-b_0)^{\lambda_0}\ldots(z-b_\lambda)^{\lambda_k}}\right\} + Q(z)\right],$$

on a alors $\rho = \max(\sigma, \tau, \varkappa)$, où σ est l'ordre de la fonction entière $\sum a_n z^n$,

$$\tau = \overline{\lim_{|b_0|\to\infty}} \frac{\overset{+}{\log}\overset{+}{\log} P}{\log|b_0|} \qquad \left(P = \max_{0\leqq i\leqq\mu}|P_i|\right)$$

et $\varkappa$ est l'exposant de convergence des pôles, c'est-à-dire

$$\varkappa = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log n(r;\infty)}{\log r},$$

où $n(r;\infty)$ est le nombre des pôles de $f(z)$ dans $|z| \leqq r$.

Du résultat ci-dessus, nous pouvons tirer les remarques suivantes :

(i) Puisque $\sigma \leqq \rho$, on a alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\log n}{\log\frac{1}{|a_n|}} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \leqq \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log S^*(r)}{\log r},$$

où $M(r)$ est le module maximum de la fonction entière $\sum a_n z^n$ pour $|z| = r$.

(ii) Puisque $\tau \leqq \rho$, on a alors

$$\overline{\lim_{|b_0|\to\infty}} \frac{\overset{+}{\log}\overset{+}{\log} P}{\log|b_0|} \leqq \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log S^*(r)}{\log r}.$$

(iii) Comme Whittaker l'a remarqué, nous obtenons les relations précises

entre la « grandeur » (size) de la fonction et la « grandeur » des coefficients de la série de Taylor, dans le cas des fonctions entières. Les inégalités

$$|a_n|r^n \leq M(r) \leq \sum |a_n| r^n,$$

nous permettent, à l'aide des résultats ci-dessus, de faire des remarques analogues. Si la fonction méromorphe est grande, alors certains coefficients P peuvent être grands ou certains coefficient de Taylor a peuvent l'être aussi. De plus, si la fonction est petite, alors tous les coefficients P et a sont petits.

7. Bose ([1], p. 73) a étendu le lemme de Schwarz aux fonctions méromorphes comme suit :

Soit C un cercle $|z| = R$ ne passant par aucune des singularités de $f(z)$ et $f(0) = 0$, on a donc

$$(7.1) \qquad |f(re^{i\theta})| \leq r R_m^{-1} S \qquad \text{pour} \qquad R_1 R_2 \ldots R_m \geq \lambda \geq 1$$

valable pour $|z| = r < R$, $|z - b_i| = R_i$ et $z = re^{i\theta}$ où $\max_{|z|=r} |f(z)| \leq S$, et définie comme dans le paragraphe 2.

Au lieu de l'inégalité (7.1), ceci doit être

$$|f(re^{i\theta})| \leq 2^m r R^{m-1} S.$$

C'est ainsi, puisque dans la démonstration, R_i a été pris comme inférieur ou égal à R, tandis qu'on aurait dû avoir $R_i < 2R$, parce que z est un point du cercle $|z| = R$ et que b_i peut être sur la ligne joignant z à l'origine et sur le côté opposé de celui de z par rapport à l'origine.

DEUXIÈME PARTIE.

8. Dans cette partie, nous démontrerons d'abord les deux inégalités suivantes que nous utiliserons souvent.

Soit $S^*(r, f)$, la fonction maximum de $f(z)$. On a donc

$$(8.1) \qquad \begin{cases} (i) & \log S^*(r, af) = \log|a| + \log S^*(r, f), \\ (ii) & \log S^*(r, f + \theta_n(a)) \leq |a| + \log S^*(r, f), \end{cases}$$

où

$$\theta_n(a) = a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots + \frac{a^n}{n!}.$$

Le premier résultat de (8.1) s'obtient directement de (1.1). Quant à (ii), nous observons ceci :

$$\log S^*(r, f + \theta_n(a)) \leq \log(1 + |\theta_n(a_n)|) + \log S^*(r, f) \leq |a| + \log S^*(r, f).$$

9. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ ayant des pôles ou des zéros distribués également (evenly) suivant qu'on prend la fonction maximum de $f(z)$ ou $\frac{1}{f(z)}$.

Nous dirons que $f(z)$ est du type maximal, normal ou minimal, selon que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \log \frac{S^*(r)}{r^\rho}$$

est infini, fini ou zéro, et nous dirons qu'il appartient au type convergent ou divergent suivant que

$$\int^{\infty} r^{-\rho-1} \log S^*(r)\, dr$$

converge ou diverge. Nous donnons ci-dessous les propriétés de la fonction maximum $S^*(r)$.

(i) Une fonction méromorphe du type convergent appartient toujours au type minimal.

Étant donné $\varepsilon(>0)$, si petit qu'il soit, il existe r_0 tel que pour $r \geqq r_0 = r_0(f)$, on a

$$\varepsilon > \int_r^{\infty} t^{-\rho-1} \log S^*(t)\, dt \geqq \frac{1}{\rho} r^{-\rho} \log S^*(r),$$

d'où ce résultat.

(ii) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe et $r_n(a)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ les modules des points-a de $f(z)$. Donc

$$\int^{\infty} r^{-q-1} N(r; a)\, dr, \quad \int^{\infty} r^{-q-1} n(r; a)\, dr \quad \text{et} \quad \sum \{r_n(a)\}^{-q}$$

convergent si

$$\int^{\infty} r^{-q-1} \log S^*(r)\, dr$$

converge pour chaque $q > 0$.

10. Théorème 4. — *Si pour q donné positif, l'intégrale*

$$\int^{\infty} r^{-q-1} \log S^*(r)\, dr$$

est convergente; pour chaque $\varepsilon > 0$, on a

$$\log S^*(r) < \varepsilon r^q$$

sauf au plus sur un ensemble de points où la variation de $\log r$ *est bornée.*

Démonstration. — Soit E, l'ensemble des points où, pour ε donné positif, $\log S^*(r) \geqq \varepsilon r^q$, On a donc

$$\int^{\infty} r^{-q-1} \log S^*(r)\, dr \geqq \int_E r^{-q-1} \log S^*(r)\, dr \geqq \varepsilon \int_E \frac{d}{dr} (\log r)\, dr$$

et dans le cas où la variation de $\log r$ n'est pas bornée dans l'ensemble E, ce qui contredit notre hypothèse que l'intégrale $\int^{\infty} r^{-q-1}\log S^*(r)\,dr$ est convergente. D'où ce résultat :

THÉORÈME 5. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe qui est le quotient de deux produits canoniques et soit w un point tel que $|f(w)| = S(r)$, on a alors*

$$\log S^*(r) < cr^q\left(\int_0^r \frac{N(t,f)+N\left(t,\frac{1}{f}\right)}{t}\,dt + r\int_0^{\infty}\frac{N(t,f)+N\left(t,\frac{1}{f}\right)}{t^2}\,dt\right),$$

où q est le genre de la fonction méromorphe et c un nombre indépendant de r.

Démonstration. — Soit

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} = \frac{\prod E\left(\frac{z}{a_n}, q\right)}{\prod E\left(\frac{z}{b_n}, q\right)},$$

où $P_1(z)$ et $P_2(z)$ sont les produits canoniques et où $P_1(z)$ est d'ordre supérieur ou égal à celui de $P_2(z)$.

Nous avons

$$\log|f(z)| \leq \sum \log\left|E\left(\frac{z}{a_n}, q\right)\right| + \sum \log\left|E\left(\frac{z}{b_n}, q\right)\right|$$

pour toutes valeurs de z; ce qui conduit à

$$\log S^*(r) \leq \sum \log\left|E\left(\frac{w}{a_n}, q\right)\right| + \sum \log\left|E\left(\frac{w}{b_n}, q\right)\right|.$$

Procédant exactement comme Nevanlinna ([5], p. 36) nous arrivons à ce résultat pour (1) $c = b(q+1)^2$. Dans le cas où $P_2(z)$ est d'ordre supérieur à celui de $P_1(z)$, le résultat s'obtient si nous prenons la fonction maximum de $\frac{1}{f(z)}$ et nous procédons comme dans le cas ci-dessus.

THÉORÈME. 6. — *Soit q un grand nombre entier tel que*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S^*(r)}{r^{q+1}} = 0.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les zéros et les pôles de $f(z)$ dans $|z| < R$. Si $f(0) \neq 0, \infty$ pour chaque valeur finie de $|z| \leq r$, on a $f(z)$ ou $[f(z)]^{-1}$ égal à

$$\exp\left(\sum_0^q c_\nu z^\nu\right)\frac{\prod\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_n}\right)^q}}{\prod\left(1-\frac{z}{b_n}\right)e^{\frac{z}{b_n}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_n}\right)^q}}.$$

(1) b étant un nombre indépendant de r.

Démonstration. — Écrivons $\log f(z)$ d'après la formule de Poisson-Jensen pour $|z|<R$, et dérivons $(q+1)$ fois successivement; nous obtenons

$$D^{q+1}\log f(z)=\sum_{|a_n|<R}\frac{(-)^q q!}{(z-a_n)^{q+1}}-\sum_{|b_n|<R}\frac{(-)^q q!}{(z-b_n)^{q+1}}+\sigma_R(z)+I_R(z),$$

où

$$\sigma_R(z)=q!\left\{\sum_{|a_n|<R}\left[\frac{\bar a_n}{R^2-\bar a_n z}\right]^{q+1}-\sum_{|b_n|<R}\left[\frac{\bar b_n}{R^2-\bar b_n z}\right]^{q+1}\right\}$$

et

$$I_R(z)=\frac{q+1!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\Phi})|\frac{2Re^{i\Phi}}{(Re^{i\Phi}-z)^{q+2}}d\Phi.$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\sigma_R(z)&\leq q!\,(R-r)^{-q-1}[n(R;0)+n(R;\infty)]\\&<A(R-r)^{-q-1}\log S^*(r).\end{aligned}$$

Le second nombre tend vers zéro uniformément lorsque R tend vers l'infini. De plus

$$\begin{aligned}I_R(z)&\leq\frac{q+1!}{2\pi}\frac{2R}{(R-r)^{q+2}}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|f(Re^{i\Phi})|\,d\Phi\\&\leq\frac{q+1!}{\pi}\frac{R}{(R-r)^{q+2}}\log S^*(R)\end{aligned}$$

et, par conséquent, $I(z)$ tend uniformément vers zéro lorsque R tend vers l'infini. Donc

$$D^{q+1}\log f(z)=\sum\frac{(-)^q q!}{(z-a_n)^{q+1}}-\sum\frac{(-)^q q!}{(z-b_n)^{q+1}}.$$

En intégrant successivement $(q+1)$ fois, nous obtenons ce résultat.

Théorème 7. — *Soit $f(z)$, une fonction méromorphe d'ordre fini. On a*

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<\overset{+}{\log}R+2\overset{+}{\log}\frac{1}{R-r}+2\overset{+}{\log}\log S^*(r)+O(1),$$

pour $0<r<R\leq 2r$, où $O(1)$ est une fonction bornée de r pour des valeurs suffisamment grandes de r.

Démonstration. — En représentant la fonction $f(z)$ dans le cercle $|z|<R$ d'après la formule de Poisson-Jensen, et en prenant la dérivée, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)}=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|f(Re^{i\Phi})|\frac{2Re^{i\Phi}}{(Re^{i\Phi}-z)^2}d\Phi\\&+\sum_{|a_n|<R}\frac{R^2-|\bar a_n|^2}{(z-a_n)|R^2-\bar a_n z|}-\sum_{|b_n|<R}\frac{R^2-|b_n|^2}{(z-b_n)|R^2-\bar b^n z|}.\end{aligned}$$

Donc, pour $|z| = r < \mathrm{R}$, on a

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{2\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\,|f(\mathrm{R}\,e^{i\Phi})|\,d\Phi + \sum_{|a_n|<\mathrm{R}} \frac{\mathrm{R}^2-|a_n|^2}{|z-a_n|.|\mathrm{R}^2-\bar{a}_n z|} + \sum_{|b_n|<\mathrm{R}} \frac{\mathrm{R}^2-|b_n|^2}{|z-b|.|\mathrm{R}^2-\bar{b}_n z|}.$$

Mais

$$|\mathrm{R}^2-\bar{a}_n z| \geq \mathrm{R}^2-|a_n|\,r > \mathrm{R}(\mathrm{R}-r)$$

et

$$\frac{\mathrm{R}^2-|a_n|^2}{|z-a_n|.|\mathrm{R}^2-\bar{a}_n z|} = \frac{\mathrm{R}(\mathrm{R}^2-|a_n|^2)}{|\mathrm{R}^2-\bar{a}_n z|^2}\left|\frac{\mathrm{R}^2-\bar{a}_n z}{\mathrm{R}(z-a_n)}\right| < \frac{\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^2}\left|\frac{\mathrm{R}^2-\bar{a}_n z}{\mathrm{R}(z-a_n)}\right|.$$

Donc

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \frac{2\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\,|f(\mathrm{R}\,e^{i\Phi})|\,d\Phi\right] + \sum_{|a_n|<\mathrm{R}}\left|\frac{\mathrm{R}^2-\bar{a}_n z}{\mathrm{R}(z-a_n)}\right| + \sum_{|b_n|<\mathrm{R}}\left|\frac{\mathrm{R}^2-\bar{b}_n z}{\mathrm{R}(z-b_n)}\right|.$$

Utilisant maintenant les inégalités suivantes, nous obtenons

$$\overset{+}{\log}(a_1 a_2 \ldots a_h) \leq \overset{+}{\log} a_1 + \overset{+}{\log} a_2 + \ldots + \overset{+}{\log} a_h,$$

$$\overset{+}{\log}(a_1 + a_2 + \ldots + a_h) \leq \overset{+}{\log} a_1 + \overset{+}{\log} a_2 + \ldots + \overset{+}{\log} a_h + \overset{+}{\log} h,$$

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \log 2 + \overset{+}{\log}\mathrm{R} + \overset{+}{\log}\frac{1}{\mathrm{R}-r} + \overset{+}{\log}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\,|f(\mathrm{R}\,e^{i\Phi})|\,d\Phi\right\} + \sum_{|a_n|<\mathrm{R}} \overset{+}{\log}\left|\frac{\mathrm{R}^2-\bar{a}_n z}{\mathrm{R}(z-a_n)}\right| + \sum_{|b_n|<\mathrm{R}} \overset{+}{\log}\left|\frac{\mathrm{R}^2-\bar{b}_n z}{\mathrm{R}(z-b_n)}\right| + \overset{+}{\log}\left[n(\mathrm{R},f) + n\left(\mathrm{R},\frac{1}{f}\right) + 1\right].$$

Donc, après l'intégration (*cf.* [5], p. 14), nous avons

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) < \overset{+}{\log}\mathrm{R} + 2\,\overset{+}{\log}\frac{1}{\mathrm{R}-r} + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\mathrm{S}^*(r) + \mathrm{N}(\mathrm{R},f) + \mathrm{N}\left(\mathrm{R},\frac{1}{f}\right) - \mathrm{N}(r,f) - \mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \overset{+}{\log}\left|n(\mathrm{R},f) + n\left(\mathrm{R},\frac{1}{f}\right)\right| + \mathrm{O}(1)$$

et

$$\mathrm{N}(\mathrm{R},f) + \mathrm{N}\left(\mathrm{R},\frac{1}{f}\right) - \mathrm{N}(r,f) - \mathrm{N}\left(r\,\frac{1}{f}\right) < \mathrm{O}(1)$$

et enfin

$$n(\mathrm{R},f) + n\left(\mathrm{R},\frac{1}{f}\right) < \mathrm{N}(e\mathrm{R},f) + \mathrm{N}\left(e\mathrm{R},\frac{1}{f}\right) < \log \mathrm{S}^*(e\mathrm{R},f) + \mathrm{O}(1).$$

Puisque $f(z)$ est d'ordre fini, nous avons

$$\log\log S^*(er) = O(\log r),$$

d'où

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \overset{+}{\log} R + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{R-r} + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log} S^*(r) + O(1).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. K. Bose, *Bull. Cal. Math. Soc.*, t. 44, 1952, p. 69-74.
[2] S. K. Bose, *Math. Z.*, t. 56, 1952, p. 222-226.
[3] S. K. Bose, *Math. Z.* t. 66, 1957, p. 487-489.
[4] R. P. Srivastav, *Rivista di Mathematica* (sous presse).
[5] R. Nevanlinna, *Acta Math.*, t. 46, 1925, p. 1-99.
[6] J. M. Whittaker, *Proc. London Math. Soc.*, t. 40, 1936, p. 255-272.

SUR

L'ÉQUIVALENCE DE DEUX PROBLÈMES

DE LA

THÉORIE CONSTRUCTIVE DES FONCTIONS

PAR MM. P. MALLIAVIN ET S. MANDELBROJT.

1. On se propose d'étudier l'équivalence du problème d'approximation polynomiale pondérée et du problème de Watson généralisé suivants :

Problème B. — E désignera une partie fermée, composée de segments de l'axe réel R. $C_0(E)$ notera l'espace des fonctions continues définies sur E nulles à l'infini, $p(x)$ une fonction continue sur E (ou sur un ensemble $\supset E$) paire, telle que $x^n p(x) \in C_0(E)$ $(n \geq 0)$, on dira que $p \in B_E$ si $\{x^n p(x)\}$ est « totale » dans $C_0(E)$ c'est-à-dire si le sous-espace engendré par cette suite est dense dans $C_0(E)$.

Problème W. — $M(r)$ désignant une fonction définie pour $r \geq 0$, s un entier ≥ 0, on notera par $W(E, M, s)$ la classe des fonctions $F(z)$ holomorphe et uniforme dans le complémentaire dans le plan complexe de l'ensemble E, non identiquement nulle et vérifiant

$$|F(z)| < |y|^{-s} M(|z|) \qquad (z = x + iy). \tag{1.0.1}$$

Lorsque $s = 0$, on remplacera cette inégalité par le système

$$|F(x)| < M(|x|) \qquad (x \in E), \tag{1.0.2}$$

$$F(x + iy_0) = o(x^{-n}) \qquad (x \to +\infty, y_0 \text{ fixé}, n > 0), \tag{1.0.3}$$

$$\limsup_{|z| = \infty} \frac{\log |F(z)|}{|z|} = 0. \tag{1.0.4}$$

Ce système d'égalité est moins strict que celui qu'on aurait obtenu en faisant

$s = 0$ dans (1.0.1). Nous noterons par $W(E, M, 0)$ la classe des fonctions satisfaisant à (1.0.2) quel que soit x réel et à (1.0.4); $\overline{W}(E, M, 0) \subset W(E, M, 0)$. Nous utiliserons de plus les notations suivantes :

Si $g(x)$ est une fonction définie sur une partie $F \subset R$, on lui associe la fonction définie sur R par

$$g^c(x) = \inf_n |x|^{-n} A_n \qquad \text{où} \quad A_n = \sup |x|^n |g(x)|.$$

On note par E_a :

$$E_a = \{x ; x = y + t, y \in E \quad \text{et} \quad |t| \leq a\}.$$

Les relations entre les problèmes B et W sont données par les énoncés :

1.1. *Si* $p \notin B_E$, *alors* $W(E, p^c, 1)$ *est non vide.*

1.2. *Si* $W(E, M, 0)$ *est non vide, alors* $M \notin B_E$.

On a d'autre part les relations suivantes dans le cadre du problème W.

1.3. $W(E, M, s)$ *et* $W(E, (r+1)^{-n} M(r), s)$ *sont simultanément vides.*

1.4. *Supposons que* $M(r)$ *soit décroissante et que* $\overline{\lim} \frac{M(r-a)}{M(r)} < +\infty$ pour *pour a fixé,* $a > 0$, *alors* $W(E, M, s)$ *non vide entraîne* $\overline{W}(E_a, M, 0)$ *non vide.*

2. Rappelons la démonstration de 1.1 ([5]).

Si $p \notin B_E$ il existe une mesure μ portée par E telle que

$$\|\mu\| = \int |d\mu| < \infty, \qquad \text{et que} \quad \int x^n p(x)\, d\mu(x) = 0 \qquad (n \geq 0).$$

Posons

$$F(z) = \int \frac{p(t)}{z - t} d\mu(t),$$

l'identité de la division de $(z-t)^{-1}$ suivant les puissances croissantes de t donne

$$F(z) = \frac{1}{z^n} \int \frac{t^n p(t)}{z - t} d\mu(t),$$

d'où

$$|F(z) y \|\mu\|^{-1}| < \inf_n |z|^{-n} \sup_t |t^n p(t)| = p^c(|z|),$$

d'où

$$F \in W(E, p^c, 1).$$

3. Démontrons 1.3. On utilisera le lemme :

3.1. *Soit* E *compact non vide, alors on peut trouver* $F(z)$ *holomorphe dans le complémentaire de* E, *telle que*

$$|F(z)| < (|z| + 1)^{-n}.$$

Démonstration. — Soit $f(t)$ une fonction n fois continûment dérivable ayant son support contenu dans E, posons

$$F(z)=\int \frac{f^{(n-1)}(t)}{z-t}\,dt=(n-1)!\int \frac{f(t)}{(z-t)^n}\,dt$$

au voisinage de E, $F(z)$ est bornée, en effet si $z=t_0+iy$:

$$F(z)=f^{(n-1)}(t_0)\int_\alpha^\beta \frac{dt}{z-t}+\int_\alpha^\beta \frac{f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(t_0)}{iy+t-t_0}\,dt,$$

où $(\alpha,\beta)\supset E$; la seconde intégrale est majorée par $\|f^n\|_\infty(\beta-\alpha)$, la première donne $\log\frac{z-\beta}{z-\alpha}$, expression bornée uniformément sur E d'après le choix de α et β. La seconde forme de $F(z)=O(|z|^{-n})$, d'où 3.1.

3.2. *Démonstration de* 1.3. — Soit $G\in W(E, M, s)$. Soit E_1 une partie compacte de E et soit F la fonction construite en 3.1 relativement à E_1 alors

$$G_1=FG\in W(E, M(r+1)^{-n}, s).$$

3.3. *Démonstration de* 1.2. — Soit $F\in W(E, M, o)$, posons

$$h(x)=\lim_{\substack{y=0\\ y>0}}(F(x+iy)-F(x-iy)).$$

On a

$$|h(x)|<2M(|x|)\qquad [h(x)=o,\ x\notin E]. \tag{3.3.1}$$

Montrons que

$$2i\pi F(z)=\int \frac{h(t)}{z-t}\,dt. \tag{3.3.2}$$

En effet si $y>o$, calculons l'intégrale de $\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ sur le segment $-R<x<+R$, $y=+o$, et le demi-cercle Γ_R :

$$\Gamma_R=\{\zeta;\ \zeta=\xi+i\eta,\ |\zeta|=R \text{ et } \eta\geqq o\}.$$

L'intégrale sur Γ_R tend vers zéro en vertu de [2] et de (1.o.3) et (1.o.4), d'où le résultat.

Soit m le premier entier positif tel que

$$a_m=\int h(t)t^m\,dt\neq o$$

[cette intégrale est toujours absolument convergente en vertu de (3.3.1)]. On a

$$2i\pi F(z)=-a_m z^{-m-1}+z^{-m-1}\int \frac{t^{m+1}}{t-z}h(t)\,dt.$$

Prenons $z=i+x$, l'intégrale

$$\int_{\frac{x}{2}}^{2x} t^m h(t)\,dt=o(1)\qquad (x\to\infty),$$

on a

$$2i\pi F(i+x) = -a_m x^{-m-1} + o(x^{-m-1})$$

et (1.o.3) implique $a_m = o$.

Prenons $p(x) = (x^2+1)M(|x|)$,

$$d\mu(t) = \frac{h(t)}{p(t)}\,dt,$$

on a

$$\int |d\mu| < \infty, \qquad \int t^n p(t)\,d\mu(t) = o \qquad (n \geq o).$$

Alors $\{x^n p(x)\}$ est non totale dans $C_0(E)$; on obtient 1.2 en appliquant le résultat qui précède à $M_1(r) = \frac{M(r)}{r^2+1}$, ce qui est légitime, $W(E, M, o)$ non vide entraînant d'après 1.3, $W(E, M_1, o)$ non vide.

3.4. *Démonstration de* 1.4. — Soit $F \in W(E, \hat{M}, s)$, où

$$\hat{M}(r) = \frac{M(r)}{r^{s+2}+1},$$

F existe en vertu de 1.3. Notons par

$$\gamma^-_{z_0} = \{z\,;\ x = x_0 \text{ et } \varepsilon y_0 \leq \varepsilon y \leq 1\} \cup \{z\,;\ \varepsilon y = 1 \text{ et } -\infty < x \leq x_0\},$$
$$\gamma^+_{z_0} = \{z\,;\ x = x_0 \text{ et } \varepsilon y_0 \leq \varepsilon y \leq 1\} \cup \{z\,;\ \varepsilon y = 1 \text{ et } x_0 \leq x < +\infty\},$$

où $z = x+iy$, $\varepsilon =$ signe de y_0 et y_0 vérifie $|y_0| < 1$. Remarquons que si $y_0 = o$, alors ε est indéterminé, nous conviendrons alors d'associer à z_0 les deux chemins correspondant à $\varepsilon = \pm 1$. γ_{z_0} désigne indifféremment l'un des deux chemins.

Si $|y_0| \geq 1$, on posera

$$\gamma^*_{z_0} = \{z\,;\ y = y_0,\ -\infty < x \leq x_0\},$$
$$\gamma^+_{z_0} = \{z\,;\ y = y_0,\ x_0 \leq x < +\infty\}.$$

Enfin nous orientons les chemins γ_{z_0} de z_0 vers l'infini. Posons

$$H(z) = -\frac{1}{s!}\int_{\gamma^-_z} (z-\xi)^s F(\xi)\,d\xi. \tag{3.4.1}$$

La restriction de $H(z)$ au demi-plan $y > o$ est une fonction holomorphe et localement bornée, soit $H_1(z)$; de même $H(z)$ définit une fonction $H_2(z)$ holomorphe dans $y < o$.

Soit l'intégrale introduite par Ostrowski [4]

$$\int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} F(z)\,e^{izt}\,dz = f(t) \qquad (y > o),$$

alors $f(t)$ est une fonction indéfiniment dérivable en vertu de (1.o.1), nulle

pour tout $t > 0$, d'où $f^{(n)}(0) = 0\ (n \geqq 0)$, d'où

$$\int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} F(\xi)\,\xi^n\,d\xi = 0 \qquad (n \geqq 0),$$

ceci entraîne que $H(z)$ peut s'écrire également

$$H(z) = \frac{1}{s!}\int_{\gamma_z^+} (z-\xi)^s F(\xi)\,d\xi. \tag{3.4.2}$$

En utilisant (3.4.1) ou (3.4.2), on obtient

$$|H_i(x)| < \hat{M}(|x|) + \int_{|x|}^{+\infty} t^s \hat{M}(t)\,dt \qquad (i = 1, 2)$$

et en utilisant la définition de $\hat{M}$ et le fait que M décroît,

$$|H_i(x)| < 2M(|x|) \qquad (i = 1, 2).$$

Posons

$$h(x) = \frac{H_1(x) - H_2(x)}{2i\pi}.$$

On obtient comme en (3.3.2)

$$H(z) = \int \frac{h(t)}{t-z}\,dt.$$

D'autre part

$$H_i^{(s+1)}(z) = F(z) \qquad (i = 1, 2),$$

Soit $f(t)$ une fonction $(s+2)$-fois continûment dérivable dont le support est contenu dans l'intervalle $(-a, +a)$, posons

$$H_a(z) = \int H(z-t) f(t)\,dt = \int \frac{h_a(t)}{t-z}\,dt, \tag{3.4.3}$$

l'inversion d'intégrations pour obtenir la dernière formule est légitime. En effet, si $y \neq 0$, les intégrales sont absolument convergentes. Dérivons (3.4.3) $(s+1)$-fois parallèlement à l'axe réel

$$H_a^{(s+1)}(z) = F_a(z) = \int \frac{h_a^{(s+1)}(t)}{t-z}\,dt.$$

Les singularités de $F_a(z)$ sont contenues dans E_a, ce qui montre que le support de $h_a^{(s+1)}$ est aussi contenu dans E_a.

Majorons $F_a(x_0)$. Soit C l'intérieur du carré du centre x_0 et de côté 1. Posons

$$g(z) = F_a(z)\,(z - x_0 - 1)^s\,(z - x_0 + 1)^s.$$

On a

$$g(z) = \int \frac{(t - x_0 - 1)^s\,(t - x_0 + 1)^s}{t-z}\,h_a^{(s+1)}(t)\,dt. \tag{3.4.4}$$

En effet approchons dans la topologie faible la mesure $h_a^{(s+1)}(t)\,dt$ par des mesures $d\varphi$ composées d'un nombre fini de masses ponctuelles.

Posons

$$k(z)=\int \frac{d\rho(t)}{t-z},$$

alors $k(z)$ est une fonction rationnelle à pôles simples et l'on a

$$k(z)\,(z-x_0-1)^s\,(z-x_0+1)^s=\int \frac{(t-x_0-1)^s\,(t-x_0+1)^s}{t-z}\,d\rho(t)+Q_s(z),$$

où $Q_s(z)$ est un polynome de degré $2s$ dont les coefficients peuvent être majorés en fonction des $2s$ premiers moments de $d\rho$, moments qui tendent vers zéro lorsque $d\rho$ converge faiblement vers $h_a^{(s+1)}(t)\,dt$, d'où la formule (3.4.4) lorsque $y\neq 0$ $(z=x+iy)$.

Posons

$$g_1(z)=\int_{x_0-1}^{x_0+1}\frac{(t-x_0-1)^s\,(t-x_0+1)^s}{t-z}\,h_a^{(s+1)}(t)\,dt,$$
$$g_2(z)=g(z)-g_1(z),$$

alors la formule de Cauchy donne $z'\in C$,

$$g(z')=g_1(z')+\frac{1}{2i\pi}\int_{\dot C}\frac{g_2(\xi)}{\xi-z'}\,d\xi,$$

où $\dot C$ désigne la frontière de C.

Prenons $z'=x_0$.

On a, en tenant compte que $h^{(s+2)}(x)=O(M(|x|-a))$,

$$g_1(x_0)=O(M(|x_0|-a)) \qquad (|x_0|\to\infty).$$

de même pour $g_2(\xi)$, $\xi\in\dot C$, d'où

$$g(x_0)=O(M(|x_0|-a-1)).$$

D'où en tenant compte des hypothèses faites sur $M(r)$,

$$|F_a(x_0)|<BM(|x_0|),$$
$$F_a\in\overline{W}(E_a,\,M,\,0),$$

C. Q. F. D.

4. Nous allons dans ce paragraphe comparer les résultats ci-dessus et ceux de [3].

Nous appellerons voisinage de l'ensemble E un ensemble E′ contenant E et tel que $\dot E'\cap E=\emptyset$. En particulier E_a est un voisinage de E.

Nous noterons par $C_0(E)$ le sous-espace fermé de $C_0(E)$ constitué par les fonctions nulles sur $\dot E$.

Suivant les notations de [3], nous noterons par $L(M_n,\,E)$ la classe des fonctions $f\in L_1$, vérifiant $\|f^{(n)}\|_1\leq M_n$ de spectre E. Nous dirons que $\mathcal{R}_\delta(M_n,E)$ vaut si l'hypothèse $f\in L(M_n,\,E)$ entraîne que $f(x+h)$ est limite dans L_1

d'expressions de la forme $\sum_{k<N} a_{k,N} f^{(k)}(x)$. On notera enfin par $\hat{L}(M_n, E)$ les transformées de Fourier des fonctions de $L(M_n, E)$.

On a le lemme :

4.1. *Soit* E' *un voisinage de* E, *soit* $g \in \hat{L}(M_n, E')$, $g(x) = 0$, $x \in E'$ *seulement si* $x \in \dot{E}'$ *alors si* $\mathcal{R}_\delta(M_n, E')$ *vaut*

$$\{x^n g(x)\} \text{ est totale dans } \overline{C}_0(E'), \tag{4.1.1}$$

$$g \in B_E. \tag{4.1.2}$$

Démonstration. — Soit V le sous espace de L_1 des fonctions de spectre E'. Puisque $\dot{E}'$ est discret, on sait [1] que $\hat{g}(x+h)$ est totale dans V. La relation $\mathcal{R}_\delta$ valant on obtient $\hat{g}^{(n)}(x)$ totale dans V, ou en transformant par Fourier $\{x^n g(x)\}$ totale dans $\hat{V}$, munie de la convergence induite en considérant $\hat{V} \subset C_0(E')$.

Enfin $\hat{V}$ est dense dans $\overline{C}_0(E')$, en effet soit $k \in \overline{C}_0(E')$, k à support compact, k est limite uniforme de fonctions deux fois continûment dérivable $\in \overline{C}_0(E')$ donc de fonctions de $\hat{V}$, ce qui démontre (4.1.1).

D'autre part, soit A l'application linéaire qui à $f \in \overline{C}_0(E')$ associe sa restriction à E. Alors $A(\overline{C}_0(E')) = C_0(E)$, d'où (4.1.2).

4.2 Retrouvons rapidement le théorème II de [3] : *si* $\mathcal{R}_\delta(M_n, E_a)$ *vaut alors* $W(E, M, 1)$ *est vide.*

Démonstration. — Soit

$$\overline{M}(x) = \inf \frac{M_n}{x^{n+2}}, \qquad p(x) = \overline{M}(x) \quad \text{si} \quad x \in E, \qquad p(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin E.$$

Soit H une fonction deux fois dérivable

$$H(t) > 0 \quad \text{si} \quad |t| < \frac{a}{2}, \qquad H(t) = 0 \quad \text{si} \quad |t| \geq \frac{a}{2}.$$

Posons

$$g(x) = \int p(x-t) H(t)\, dt.$$

Alors si $\hat{g}$ est la transformée de Fourier de g, on a

$$\hat{g}^{n)}(t) = \frac{1}{t^2} \int g''(x)\, e^{itx} (ix)^n\, dx,$$

d'où

$$\| \hat{g}^{(n)} \|_1 = O\left(\sup \overline{M}(x-a) x^{n+2}\right),$$

$$\sup\left(\overline{M}(x-a) x^{n+2}\right) = \sup \overline{M}(x)\,(x+a)^{n+2} = \sup \overline{M}(x) x^{n+2} (1 + o(1));$$

d'où $g \in \hat{L}(M_n, E_a)$.

Supposons que $\mathcal{R}_\delta(M_n, E_a)$ vaut. Alors 4.1 donne $g \in B_{Ea'}(a' < a)$, D'autre part 1.2 entraîne alors $W(E_{a'}, g, 0)$ vide et 1.4, $W(E_{a''}, g, l)$ vide si $a'' < a'$; comme $\overline{M}(x) = O(g(x))$ $x \in E$,

(4.2.1) $W(E, \overline{M}, 1)$ est vide.

Enfin remarquons que $M(x) = O\left(x^2 \overline{M}(x)\right)$ si

(4.2.2) $$\int^{\infty} \log M(e^\sigma)\, e^{-\sigma}\, d\sigma < \infty ;$$

alors 1.3 donne $W(E, M, 1)$ vide. Cette conclusion vaut également si (4.2.2) diverge, en vertu du théorème de Watson.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Agmon et Mandelbrojt, *Une généralisation du théorème taubérien de Wiener* (*Acta Scientarium Mathematicarum Szeged*, vol. 12, part B, 1950).

[2] Heins, *On the Phragmen Lindelöf Principle* (*Transaction of the American Mathematical Society*, Vol. 60, p. 238-244, 1946).

[3] S. Mandelbrojt, *Quelques relations équivalentes dans la théorie constructive des fonctions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 1869.).

[4] Ostrowsky, *Uber quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwickelungen* (*Acta mathematica* t. **53**, 1930, p. 181).

[5] J. Horvath, *L'approximation polynomiale sur un ensemble non compact* (*Mathetica Scandinavica*, Tome 2, 1954, p. 83-90).

SUR

L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE RIEMANN ET LA FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

PAR MM. J. P. KAHANE ET S. MANDELBROJT.

Introduction.

En 1922, Hamburger montrait le lien entre les conditions suivantes, portant sur deux suites réelles $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ et deux suites de coefficients complexes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$[1] :

I. Les séries $\sum_1^\infty a_n \lambda_n^{-s}$ et $\sum_1^\infty b_n \mu_n^{-s}$ sont convergentes pour $\sigma = \mathrm{R}s > 1$, et représentent des fonctions méromorphes $\varphi(s)$ et $\psi(s)$, ayant 1 pour seul pôle, et satisfaisant « l'équation fonctionnelle de Riemann »

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\varphi(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\psi(1-s)$$

[on suppose, de plus, que $(1-s)\varphi(s)$ est une fonction entière d'ordre fini].

II. On a « la relation θ »

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-\pi\lambda_n^2\tau} = \tau^{-\frac{1}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi\mu_n^2}{\tau}},$$

avec

$$a_{-n} = a_n, \qquad b_{-n} = b_n, \qquad \lambda_{-n} = -\lambda_n, \qquad \mu_{-n} = -\mu_n.$$

III. On a

$$a_0 + 2\sum_1^\infty a_n e^{-2\pi\lambda_n z} = \frac{b_0}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum_2^\infty \frac{b_n}{z^2+\mu_n^2}.$$

IV. Pour $\mu_m < y < \mu_{m+1}$, on a

$$\sum_1^m b_n(y-\mu_n) = \frac{a_0 y^2 - b_0 y}{2} - \frac{1}{2\pi^2}\sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n^2}(\cos 2\pi\lambda_n y - 1).$$

V. Si f est une fonction sommable sur $(-\infty, \infty)$, à variation bornée sur chaque segment, et si

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i u x}\, dx,$$

on a

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(-\lambda_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n).$$

Récemment, Bochner et Chandrasekharan [2], puis Chandrasekharan et Mandelbrojt [3], [4] ont considéré des « équations fonctionnelles de Riemann » plus générales que celles de Hamburger, et ont dégagé des propriétés simples satisfaites par les exposants λ_n, μ_n et les coefficients a_n, b_n des fonctions $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ satisfaisant de telles équations. L'outil essentiel utilisé par ces auteurs est une formule du type III.

L'objet de la présente étude est constitué par :

a. de telles « équations fonctionnelles de Riemann »;

b. les formules du type V, qui sont des sortes de « formules sommatoires de Poisson »;

c. les distributions presque-périodiques de L. Schwartz [5], sommes de masses ponctuelles aux points λ_n, et de spectre $\{\mu_n\}$, qui peuvent être considérées comme des dérivées secondes du premier membre de IV.

Moyennant une légère restriction sur les suites considérées, chaque « formule sommatoire de Poisson » équivaut à la donnée d'une distribution du type *c*. Dans les mêmes conditions, chaque distribution du type *c*, soit paire, soit impaire conduit à une « équation fonctionnelle de Riemann ». Un maniement élémentaire des distributions du type *c* permet ainsi la construction d'une infinité de « formules de Poisson » et d' « équations de Riemann ». C'est là une série de résultats immédiats (§ 1).

Nous montrerons que, moyennant des restrictions convenables, chaque « équation fonctionnelle de Riemann » conduit inversement à une distribution du type *c* (§ 2). Pour cela, nous poursuivons les calculs faits en [2] (simplifiés comme nous l'a indiqué M. Chandrasekharan) jusqu'à mettre en évidence une telle distribution. Pour obtenir des théorèmes d'unicité concernant a, nous aurons donc à uitliser la technique des distributions presque-périodiques au lieu de celle des séries de Dirichlet, exploitée dans [2], [3], [4].

Nous nous intéresserons particulièrement à la relation entre le spectre $\{\mu_n\}$ et le support $\{\lambda_n\}$ d'une distribution du type *c*. Un rôle important sera joué par

les densités supérieure et inférieure de répartition de ces deux suites. Si ces densités existent, on a, entre autres, le résultat suivant, inspiré par le théorème 3 de [1] (qu'il permet de retrouver et de généraliser) : chacune des suites $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ admet une base finie. Nous établirons également des propriétés remarquables des ensemble de sommes et de différences $\{\lambda_n \pm \lambda_m\}$ et $\{\mu_n \pm \mu_m\}$ (§ 3).

Énoncé des problèmes. — *a. Soit* $\{\lambda_n\}$ *et* $\{\mu_n\}$ *deux suites positives croissantes tendant vers l'infini,* $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *deux suites complexes* ($n = 1, 2, \ldots$) *et* δ *un nombre* > 0. *Il s'agit d'étudier la relation* $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta\}$ *équivalente à la compatibilité des conditions suivantes :*

(A_1) : $\varphi(s) = \sum_1^\infty a_n \lambda_n^{-s}$ *converge absolument pour* $\sigma = \mathrm{R}s$ *assez grand* ($\sigma \geqq \alpha$);

(A_2) : $\psi(s) = \sum_1^\infty a_n \mu_n^{-s}$ *converge absolument pour* $\sigma = \mathrm{R}s$ *assez grand* ($\sigma \geqq \beta$);

(A_3) : $\chi(s) \not\equiv 0$ *est holomorphe à distance finie hors d'un compact* K, *et de type exponentiel nul dans toute bande verticale* $\left(c'est\text{-}à\text{-}dire \lim_{|t| \to \infty} \frac{\log|\chi(\sigma + it)|}{t} = 0\right.$ *uniformément par rapport à* σ *quand* σ *parcourt un intervalle borné*$\left.\right)$ [1];

(A_4) : $\chi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \varphi(s)$ *pour* σ *assez grand*;

(A_5) : $\chi(s) = \pi^{-\frac{\delta - s}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta - s}{2}\right) \psi(\delta - s)$ *pour* $-\sigma$ *assez grand*;

b. Soit maintenant $\{\lambda_n\}$ *et* $\{\mu_n\}$ *deux suites réelles croissantes de* $-\infty$ *à* $+\infty$, $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *deux suites complexes* ($n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$). *A une fonction f sommable on associe sa transformée de Fourier*

$$\hat{f}(u) = \int e^{-2\pi i u x} f(x)\, dx.$$

Il s'agit d'étudier la relation $B_{\mathcal{C},\mathcal{S},\mathcal{S}'}\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$ *équivalente à l'affirmation suivante :*

Pour chaque f d'une classe $\mathcal{C}$, *on a*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(-\lambda_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n),$$

les séries étant sommées par les procédés $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{S}'$.

c. $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *ayant un même sens qu'en b, il s'agit d'étudier la relation* $C\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$ *équivalente à l'affirmation suivante :* δ_x *représentant la*

---

(1) Cette condition est moins stricte que celle imposée dans [2], [3] et [4].

masse de Dirac au point X, *la distribution de Schwartz* $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n}$ *est presque-périodique et a pour série de Fourier* $\sum_{-\infty}^{\infty} b_m e^{2\pi i \mu_m x}$ (pour ces notions, *voir* [5]). Nous noterons cette dernière phrase :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_m e^{2\pi i \mu_m x}.$$

Lorsque les suites $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sont définies comme en *a*, on les prolongera par la *condition de symétrie*

$$(S) \qquad \lambda_{-n} = -\lambda_n, \qquad \mu_{-n} = -\mu_n, \qquad a_{-n} = a_n, \qquad b_{-n} = b_n \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

a_0 et b_0 convenablement choisis.

Lorsque les suites $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sont définies comme en *b* ou en *c*, les conditions (A_1) [resp. (A_2)] seront prises dans le sens suivant : *il existe un* α (*resp.* β) *tel que*

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} |a_n| |\lambda_n|^{-\alpha} < \infty \quad \text{resp.} \quad \sum_{\mu_n \neq 0} |b_n| |\mu_n|^{-\beta} < \infty.$$

Remarquons que A $\{n, n, 1, 1; 1\}$ exprime l'équation fonctionnelle de Riemann

$$\varphi(s) = \psi(s) = \zeta(s), \qquad \chi(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \text{fonction entière};$$

$B_{\mathcal{C},\mathcal{S},\mathcal{S}'}\{n, n, 1, 1\}$ exprime la formule sommatoire de Poisson ($\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ étant convenablement définis); C $\{n, n, 1, 1\}$ exprime

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n \sim \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x} \quad (cf.\ [5], \text{p. } 110).$$

1. Résultats immédiats.

Proposition 1. — *Supposons que, pour toute fonction f indéfiniment dérivable à support compact, la série* $\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n)$ *soit absolument convergente, et égale* $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(-\lambda_n)$. *On a alors* C $\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$.

Démonstration. — Posons $T = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n}$; alors

$$T \star f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(x - \lambda_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_m \hat{f}(\mu_m) e^{2\pi i \mu_m x}.$$

Ainsi, toutes les régularisées de T sont presque-périodiques au sens de Bohr; il en résulte ([5], p. 62) que T est une distribution presque-périodique, soit

$$T \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b'_m e^{2\pi i \mu'_m x};$$

mais on sait alors ([5], p. 64) que

$$T \star f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b'_m \hat{f}(\mu'_m) e^{2\pi i \mu'_m x}.$$

Donc

$$T \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_m e^{2\pi i \mu_m x}.$$

C. Q. F. D.

Proposition 2. — *Supposons* $C\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$, (A_1) *et* (A_2). *Il existe un entier p tel que, pour toute f sommable ainsi que ses p premières dérivées, et bornée par* $|x|^{-p}$, *on ait*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(-\lambda_n),$$

les deux membres étant absolument convergents.

Démonstration. — Prenons $p > \alpha$, $p > \beta$. Puisque $f \in L^1, \ldots, f^{(p)} \in L^1$, on a

$$\hat{f}(u) = O(|u|^{-p}) \quad (|u| \to \infty),$$

donc $\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n) e^{2\pi i \mu_n x}$ converge absolument d'après (A_2). Mais c'est la série de Fourier de

$$T \star f = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(x - \lambda_n),$$

et cette dernière série converge absolument d'après (A_1).

Les propositions 1 et 2 indiquent une relation simple entre la condition $C\{\lambda_n, \mu_n, a_n b_n\}$ et les formules de Poisson généralisées. En les combinant, on a

Théorème 1. — *Supposons satisfaites les conditions* (A_1) et (A_2). *La condition* $C\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$ *équivaut à la formule de Poisson*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(-\lambda_n)$$

pour les fonctions f indéfiniment dérivables à décroissance rapide [*c'est-à-dire telles*

que $f^{(q)}(x) = o(|x|^{-p})$, $|x| \to \infty$, *quels que soient* q *et* p]. *Les formules*

$$T_{a,\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_m e^{2\pi i \mu_m x},$$

$$T_{b,\mu} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_m \delta_{\mu_m} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-2\pi i \lambda_n x}$$

sont donc équivalentes.

Remarques 1. — Dans les hypothèses du théorème 1, $T_{b,\mu}$ est transformée de Fourier de $T_{a,\lambda}$ au sens de [5].

2. Il est facile de voir que la condition (A_2) résulte de $C\{\lambda_n, \mu_n, a_n b_n\}$ et de $\sum_{\mu_n \neq 0} |\mu_n|^{-q} < \infty$ pour q assez grand.

3. On peut obtenir des résultats du même type que la proposition 2, faisant intervenir les procédés de sommation; nous ne le ferons pas ici.

Proposition 3. — *Les relations* $C\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$, (A_1) *et* (A_2) *entraînent la « relation modulaire »*

$$(M) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{-\mu_n^2 \frac{\pi}{x}}.$$

Évident, en prenant

$$f(u) = e^{-u^2 \pi x}, \qquad \hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-u^2 \frac{\pi}{x}}.$$

Proposition 4. — *Les relations* (M), (S), (A_1) *et* (A_2) *entraînent* $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; 1\}$, *avec*

$$\chi(s) = \frac{b_0}{s-1} - \frac{a_0}{s} + \textit{fonction entière.}$$

Démonstration. — Copiée à la lettre sur celle de l'équation fonctionnelle de Riemann, d'après [6], p. 21-22; la fonction entière est

$$\int_1^{\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} \sum_1^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \pi x} + x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} b_m e^{-\mu_n^2 \pi x} \right) dx.$$

Proposition 5. — *Les relations* $C\{\lambda_n, \mu_n, a_n \lambda_n^{-1}, i b_n \mu_n^{-1}\}$, (A_1) *et* (A_2) *entraînent la pseudo-relation modulaire*

$$(M') \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \pi x} = x^{-\frac{3}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{-\mu_n^2 \frac{\pi}{x}}.$$

Évident d'après la proposition 2, en prenant

$$f(u) = u e^{-\pi u^2 x}, \qquad \hat{f}(u) = -i x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi u^2}{x}}.$$

PROPOSITION 6. — *Les relations* (M′) (S) (*avec* $a_0 = b_0 = 0$), (A_1) *et* (A_2) *entraînent* $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; 3\}$, *avec* $\chi(s) =$ *fonction entière.*

Démonstration analogue à celle de la proposition 4. On a

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\varphi(s)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi\lambda_n^2 x}\, dx \qquad \text{pour} \quad \sigma > \alpha,$$

d'après [6], p. 21. On partage l'intégrale en $A(s) = \int_0^1$ et $B(s) = \int_1^\infty$. D'après (M′),

$$A(s) = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\mu_n^2 \frac{\pi}{x}}\, dx$$
$$= \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\mu_n^2 \pi x}\, dx.$$

Ainsi $A(s)$ et $B(s)$ sont des fonctions entières, et elles sont échangées quand on échange les a_n et les b_n, les λ_n et les μ_n, s et $3 - s$. D'où le résultat, avec $\chi(s) = A(s) + B(s)$.

Résumons les propositions 3, 4, 5 et 6.

THÉORÈME 2. — *Supposons satisfaites la condition de symétrie* (S), *et les conditions* (A_1) *et* (A_2). *Si l'on a*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{-2\pi i \mu_n x},$$

$\varphi(s)$ *et* $\psi(s)$ *satisfont les conditions* (A_3), (A_4) *et* (A_5) *avec*

$$\delta = 1, \qquad \chi(s) = \frac{b_0}{s-1} - \frac{a_0}{s} + \textit{fonction entière.}$$

Si l'on a

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' a_n \lambda_n^{-1} \delta_{\lambda_n} \sim i \sum_{-\infty}^{\infty}{}' b_n \mu_n^{-1} e^{2\pi i \mu_n x}$$

(*les sommations étant prises pour* $n \neq 0$, $m \neq 0$), $\varphi(s)$ *et* $\psi(s)$ *satisfont les conditions* (A_3), (A_4) *et* (A_5) *avec* $\delta = 3$, $\chi(s) =$ *fonction entière.*

Le théorème 2 permet d'obtenir aisément des équations fonctionnelles du type de Riemann, en construisant des couples de distribution $T_{a,\lambda}$ et $T_{b,\mu}$, soit paires, soit impaires, satisfaisant les hypothèses du théorème 1.

CONSTRUCTION DE $T_{a,\lambda}$ ET $T_{b,\mu}$ SATISFAISANT LES HYPOTHÈSES DU THÉORÈME 1. — A partir de couples $T_{a,\lambda}$, $T_{b,\mu}$ connus, on peut en construire d'autres par les opérations simples suivantes (les trois premières permettant de transformer un couple en un autre) :

1° Homothétie : changement de λ_n en $\rho\lambda_n$, de μ_n en $\frac{\mu_n}{\rho}$, de b_n en $\frac{b_n}{\rho}$;

2° Translation de $T_{a,\lambda}$ et multiplication de $T_{b,\mu}$ par une exponentielle : changement de λ_n en $\lambda_n + h$, et de b_m en $b_m e^{-2\pi i \mu_m h}$;

3° Changement de $T_{a,\lambda}$, $T_{b,\mu}$ en $T_{b,\mu}$, $T_{a,(-\lambda)}$;

4° Combinaisons linéaires de couples connus.

Le couple le plus simple est

$$T_{a,\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \delta_n, \qquad T_{b,\mu} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n,$$

qui correspond à la formule de Poisson (th. 1) et à l'équation fonctionnelle de Riemann (th. 2). Les opérations 1°, 2°, 3°, 4° permettent d'en tirer une infinité de formules du type de Poisson et d'équations fonctionnelles du type de Riemann. Ainsi

$$T_{a,\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\delta_{n+\frac{1}{6}} + \delta_{n-\frac{1}{6}} \right), \qquad T_{b,\mu} = 2 \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n \cos \frac{2\pi n}{6}$$

donne la formule de Poisson-Ramanujan;

$$T_{a,\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{n+\frac{1}{2}}, \qquad T_{b,\mu} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta_n$$

donne l'équation fonctionnelle liant $(2^s - 1)\zeta(s)$ et $(2^{1-s} - 1)\zeta(s)$ $(\delta = 1)$;

$$T_{a,\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta_{n+\frac{1}{2}}, \qquad T_{b,\mu} = i \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta_{n+\frac{1}{2}}$$

donne l'équation fonctionnelle de $2^{s-1} L(s-1)$ $(\delta = 3)$. On notera que seuls les couples de distributions $T_{a,\lambda}$, $T_{b,\mu}$ paires, resp. impaires, donnent une équation fonctionnelle (avec $\delta = 1$, resp. 3).

Le but de notre prochaine section est de donner une sorte de réciproque au théorème 2.

2. Étude de A $\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta\}$ avec δ impair.

Supposons A $\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta\}$. La condition (A_2) entraîne que $\sum_1^{\infty} b_n \cos(2\pi \mu_n x)$ est la série de Fourier d'une distribution presque périodique. Quand δ est impair, nous expliciterons très simplement cette distribution (moyennant une condition additionnelle sur les λ_n) en fonction de $\{\lambda_n\}$ et de $\{a_n\}$.

Pour cela, nous commençons, comme en [2], à calculer

$$g(t) = \sum_1^{\infty} b_n e^{-2\pi \mu_n t} \qquad (t = \sigma + ix;\ \sigma > 0).$$

Voici une variante du calcul fait en [2], qui nous a été communiquée par

M. Chandrasekharan; elle permet d'aboutir plus vite à la formule (6) et de remplacer par (A_3) la condition plus restrictive de Bochner et Chandrasekharan [*cf.* [2], form. (2.8)] Elle se fonde sur les formules élémentaires

$$(1) \qquad e^{-t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \Gamma(s)\, t^{-s}\, ds \qquad \text{pour} \quad \mathrm{R}t > 0, \quad \sigma_0 > 0,$$

$$(2) \qquad \Gamma(s) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right),$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \mathrm{X}^{-s}\Gamma(q-s)\,\Gamma(s)\, ds = \Gamma(q)\left((1+\mathrm{X})^{-q} + \sum_{0 \le j < \sigma_0 - q} \mathrm{A}_j \mathrm{X}^{-q-j}\right),$$

avec

$$\mathrm{A}_j = \frac{(-1)^j \Gamma(q+j)}{j!\,\Gamma(q)} \qquad \text{pour} \quad |\arg \mathrm{X}| < \pi, \quad \sigma_0 > q > 0.$$

Supposons $\mathrm{R}t > 0$ et σ_0 assez grand. On a alors, d'après (1),

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_1^\infty b_n \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \Gamma(s)\,(2\pi\mu_n t)^{-s}\, ds$$

et, d'après (A_2),

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \mathrm{G}(s, t)\, ds,$$

avec

$$\mathrm{G}(s, t) = \Gamma(s)\,(2\pi t)^{-s}\psi(s)$$

qui s'écrit, grâce à (2) et (A_5),

$$(4) \qquad \mathrm{G}(s, t) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{s+1}{2}} t^{-s}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\chi(\delta - s).$$

Soit C une courbe rectifiable entourant K. Posons

$$(5) \qquad \mathrm{K}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{G}(s, t)\, ds.$$

Toujours pour $\mathrm{R}t > 0$ et σ_0 assez grand, on a

$$g(t) = \mathrm{K}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - \sigma_0 - i\infty}^{\delta - \sigma_0 + i\infty} \mathrm{G}(s, t)\, dt = \mathrm{K}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \mathrm{G}(\delta - s, t)\, ds,$$

avec

$$\mathrm{G}(\delta - s, t) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{\delta+1}{2}} t^{-\delta}\pi^{\frac{s}{2}} t^{s}\Gamma\left(\frac{\delta - s + 1}{2}\right)\chi(s)$$

et, d'après (A_4),

$$\mathrm{G}(\delta - s, t) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{\delta+1}{2}} t^{\delta} t^{s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta - s + 1}{2}\right)\varphi(s).$$

Posons $q = \frac{\delta+1}{2}$. D'après (A_1) et (3), on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \frac{1}{2} t^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(q-\frac{s}{2}\right)\varphi(s)\,ds = \Gamma(q)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\left(1+\frac{\lambda_n^2}{t^2}\right)^{-q} + \sum_{0\leq 2j<\sigma_0-2q} A_j\left(\frac{t^2}{\lambda_n^2}\right)^{q+j}\right],$$

donc

$$g(t) = K(t) + \pi^{-q}\Gamma(q)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{t}{(t^2+\lambda_n^2)^q} + \sum_{0\leq 2j<\sigma_0-2q} A_j \frac{t^{1+2j}}{\lambda_n^{2q+2j}}\right). \tag{6}$$

La formule (6) est valable quel que soit $\delta > 0$, pour $Rt > 0$, à condition de choisir σ_0 assez grand. On s'assure aisément que la série converge uniformément sur tout compact. Comme

$$\frac{1}{2}(g(\sigma+ix)+g(\sigma-ix)) = \sum_{1}^{\infty} b_n e^{-2\pi\mu_n\sigma}\cos(2\pi\mu_n x),$$

on a

$$T = \lim_{\sigma\to 0+}\frac{1}{2}(g(\sigma+ix)+g(\sigma-ix)) \tag{7}$$

[car, d'après (A_2), une primitive d'ordre α assez grand de T est limite uniforme de primitives d'ordre α du second membre].

Supposons maintenant δ impair, de sorte que q soit un entier naturel. Alors

$$T = T_1 + T_2, \qquad \text{où} \quad T_1 = \lim_{\sigma\to 0+}\frac{1}{2}(K(\sigma+ix)+K(\sigma-ix))$$

et T_2 est une distribution portée par les $\pm\lambda_n$. Si $\delta = 1$ ou $\delta = 3$, et si $\inf(\mu_{n+1}-\mu_n) > 0$, nous pourrions nous appuyer sur un théorème d'Agmon [9] pour montrer que $K(t)$ est une fonction méromorphe, ce qui facilite considérablement le calcul de T_1. Nous préférons faire l'étude dans le cas général; sans recourir au théorème d'Agmon, nous retrouverons, dans des conditions moins restrictives, le fait que $K(t)$ est méromorphe.

Calcul de T_2. — On a

$$T_2 = \pi^{-q}\Gamma(q)\sum_{1}^{\infty} a_n S(\lambda_n), \tag{8}$$

$$S(\lambda) = \lim_{\sigma\to 0+}\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma+ix}{((\sigma+ix)^2+\lambda^2)^q} + \frac{\sigma-ix}{((\sigma-ix)^2+\lambda^2)^q}\right).$$

On calcule facilement $S(\lambda)$ en décomposant la fraction $\frac{x}{(x^2-\lambda^2)^q}$ en éléments simples

$$x(x^2-1)^{-q} = \sum_{k=1}^{q} C_k((x-1)^{-k} - (-x-1)^{-k}), \tag{9}$$

$$x(x^2-\lambda^2)^{-q} = \sum_{k=1}^{q} C_k\lambda^{k-2q+1}((x-\lambda)^{-k} - (-x-\lambda)^{-k}).$$

En observant que

$$\lim_{\sigma\to 0+}((x-i\sigma-\lambda)^{-k}-(-x+i\sigma-\lambda)^{-k}+(-x-i\sigma-\lambda)^{-k}-(x+i\sigma-\lambda)^{-k})$$
$$=\frac{2\pi i}{(k-1)!}(\delta_{\lambda}^{(k-1)}+(-1)^{k-1}\delta_{-\lambda}^{(k-1)}),$$

on obtient

$$S(\lambda)=(-1)^{q+1}\pi\sum_{k=1}^{q}\frac{C_k\lambda^{k-2q+1}}{(k-1)!}(\delta_{\lambda}^{(k-1)}+(-1)^{k-1}\delta_{-\lambda}^{(k-1)}). \tag{10}$$

Si $\delta=1$, on a $q=1$, $C_1=\frac{1}{2}$ et

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\delta_{\lambda_n}+\delta_{-\lambda_n}). \tag{11}$$

Si $\delta=3$, on a $q=2$, $C_1=0$, $C_2=\frac{1}{4}$, et

$$T_2=\frac{-1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n^{-1}(\delta'_{\lambda_n}-\delta'_{-\lambda_n}). \tag{11'}$$

Si $\delta>3$, q est un entier >2; le premier membre de (9) étant, à un facteur près, la dérivée de $(x^2-1)^{-q+1}$, on voit que $C_1=0$ et $C_2, C_3, \ldots, C_q\neq 0$. Comme $C_q\neq 0$, les primitives d'ordre q de T sont des fonctions discontinues [admettant en λ_n un saut égal au coefficient de $\delta_{\lambda_n}^{(q-1)}$ dans le développement de T]. On ne peut donc avoir

$$\sum_{1}^{\infty}|b_m|\mu_m^{-q}<\infty.$$

En utilisant le fait que $C_2\neq 0$, nous verrons dans la suite que, moyennant l'hypothèse $\inf(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$ (ou même une hypothèse plus faible, que nous énoncerons) le cas $\delta>3$ est à éliminer.

Calcul de T_1. — Supposons qu'on ajoute à la condition (A_3) l'hypothèse suivante, soit $H\{\chi(s)\}$: $\chi(s)$ est méromorphe, et n'admet pas de pôle en dehors des entiers $0, \pm 1, \ldots$. Alors les formules (4) et (5) entraînent que $K(t)$ est la somme d'un polynome en t et d'un polynome en $\frac{1}{t}$, de sorte que

$$T_1=\lim_{\sigma\to 0+}\frac{1}{2}(K(\sigma+ix)+K(\sigma-ix))$$

est la somme d'une constante et d'une distribution portée par 0. Nous allons atteindre le même résultat en faisant une hypothèse sur la suite $\{\lambda_n\}$.

Hypothèse $H_0\{\lambda_n\}$: Il existe un entier ν et des intervalles disjoints I_j $(j=1, 2, \ldots)$ de longueurs indéfiniment croissantes tels que tout intervalle de longueur unité contenu dans un I_j contienne au plus ν points λ_n.

Posons $t=e^{\zeta}$. D'après (4) et (5), $K(t)=L(\zeta)$ est une fonction entière de

type exponentiel en ζ. En dehors de l'origine, on a

$$(12) \qquad T_1 = \frac{1}{2}\left(L\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right) + L\left(\xi - i\frac{\pi}{2}\right)\right) = L_1(\zeta) = K_1(x) \qquad (x = \pm e^{\xi}).$$

Nous allons montrer que cette quantité est une constante; cela prouve que T_1 est la somme d'une constante et d'une distribution portée par o.

Remarquons que $L_1(\xi)$ est une fonction entière de type exponentiel, soit

$$L_1(\xi) = O(e^{A|\xi|});$$

alors on a, pour les dérivées d'ordre p,

$$L_1^{(p)}(\xi) = O(e^{A|\zeta|}) \text{ et } K_1^{(p)}(x) = O(|x|^{A-p}) \quad (x \to \infty).$$

Prenons $p > A$, et soit α une fonction indéfiniment dérivable à support $[-\eta_1, \eta]$, non négative, et telle que

$$\int \alpha(x)\, dx = 1.$$

En dehors des intervalles $(\lambda_n - \eta, \lambda_n + \eta)$, on a

$$T^{(p)} \star \alpha(x) = K_1^{(p)} \star \alpha(x) = o(1) \qquad (x \to \infty).$$

Supposons $2\eta\nu < 1$; d'après la condition $H_0\{\lambda_n\}$, tout segment de longueur $2\eta\nu$ contenu dans un I_j contient au moins un x tel que

$$T^{(p)} \star \alpha(x) = K_1^{(p)} \star \alpha(x),$$

donc tel que

$$|T^{(p)} \star \alpha(x)| < \varepsilon_j \qquad (\varepsilon_j \to o \text{ quand } j \to \infty).$$

Supposons maintenant $K_1^{(p)} \not\equiv o$, et montrons que nous arrivons à une contradiction. Il existe sur (o, ∞) un intervalle J, ne contenant aucun λ_n et de mesure < 1, où l'argument de $K_1^{(p)}$ varie de moins de $\frac{\pi}{2}$ et où son module est supérieur à $4\varepsilon > o$. Prenons $\eta = \frac{\text{mes. J}}{2\nu + 2}\left(< \frac{1}{2\nu}\right)$ et α comme ci-dessus; alors, sur l'intervalle J_η concentrique à J et de longueur $2\eta\nu$, on a

$$|K_1^{(p)} \star \alpha| = |T^{(p)} \star \alpha| > 2\varepsilon.$$

Comme $T^{(p)} \star \alpha$ est presque-périodique au sens de Bohr, elle admet une ε-presque-période dans tout intervalle assez grand; pour $j > j_0$ assez grand, elle admet donc une ε-presque-période qui translate J_η à l'intérieur de I_j; sur ce translaté, soit $J_\eta^{(j)}$, on a

$$|T_1^{(p)} \star \alpha(x)| > \varepsilon.$$

Mais, d'après l'alinéa précédent, il existe un point $x \in J_\eta^{(j)}$, où

$$|T^{(p)} \star \alpha(x)| < \varepsilon_j,$$

et l'on peut prendre $\varepsilon_j < \varepsilon$. D'où la contradiction.

Donc $K_1^{(p)} \equiv 0$, et K_1 est un polynome. En utilisant encore la presque-périodicité de T et l'hypothèse $H_0\{\lambda_n\}$, il est immédiat que K_1 est une constante. Ainsi, comme nous l'avons déjà annoncé, T_1 est la somme d'une constante, soit $-\frac{b_0}{2}$, et d'une distribution S_0 portée par 0. On a

$$S_0 + T_2 \sim \frac{b_0}{2} + \sum' b_n \cos(2\pi\mu_n(x)), \tag{13}$$

T_2 étant donné par (8) et (10).

Calcul de b_0. — Observons que $\frac{b_0}{2}$ est la valeur moyenne de $(S_0 + T_2) \star \alpha$, où α est indéfiniment dérivable à support compact, $\int \alpha(x)\,dx = 1$. L'hypothèse $H_0\{\lambda_n\}$ entraîne l'existence d'une suite infinie $\{n_i\}$ telle que

$$\inf(\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i}) = 2\eta > 0;$$

on prendra $[-\eta, \eta]$ pour support de α. En écrivant

$$\frac{b_0}{2} = \lim_{i\to\infty} (\lambda_{n_i} + \eta)^{-1} \int_0^{\lambda n_i + \eta} (S_0 + T_2) \star \alpha(x)\,dx,$$

on obtient une expression explicite de b_0 [rappelons que pour $\delta = 3, 5, \ldots$, on a $C_1 = 0$ dans (10)]

$$\begin{cases} b_0 = \lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_{n_i}}{\lambda_{n_i}} & \text{pour } \delta = 1, \\ b_0 = 0 & \text{pour } \delta = 3, 5, \ldots. \end{cases} \tag{14}$$

Calcul de S_0. — Reportons-nous à la formule (12). Moyennant $H_0\{\lambda_n\}$, on a démontré que

$$L\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right) + L\left(\xi - i\frac{\pi}{2}\right) \equiv -b_0.$$

Ainsi $L(\xi) + \frac{b_0}{2}$, fonction de type exponentiel, est de la forme $\sum_{-P}^{P} \gamma_p e^{-(2p+1)\xi}$. Autrement dit,

$$K(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{-P}^{P} \gamma_p t^{-2p-1}. \tag{15}$$

D'après (4) et (5), cela signifie que

$$\chi(\delta - s) = \frac{r_0}{s} + \sum_{0}^{P} \frac{r_p}{s - 2p - 1} + \text{fonction entière}, \tag{16}$$

avec

$$-\frac{b_0}{2} = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) r_0 = \frac{r_0}{2}$$

et

$$\gamma_p = \frac{1}{2}\pi^{-p-1}\Gamma(p+1)r_p \qquad (p = 0, 1, \ldots, P).$$

Supposons maintenant qu'on calcule, par le même procédé que T, la distribution

$$T' \sim \sum_1^\infty a_n \cos(2\pi\lambda_n x),$$

On aura $T' = T'_1 + T'_2$, T'_2 étant porté par les $\pm\mu_n$. En se reportant au calcul de T_1, on voit que l'hypothèse $H\{\chi(\delta - s)\}$ est satisfaite d'après (16), donc que T'_1 est somme d'une distribution S'_0 portée par 0 et d'une constante $-\frac{a_0}{2}$. Le calcul de S'_0 donnera

$$\chi(s) = \frac{r'_0}{s} + \sum_0^{P'} \frac{r'_p}{s - 2p - 1} + \text{fonction entière.} \tag{16'}$$

Pour $\delta = 1$, (16) et (16') ne sont compatibles que si $r_p = \gamma_p = 0$ quand $p \geq 1$.

Pour $\delta = 3, 5, \ldots$, on a $b_0 = r_0 = r'_0 = 0$: (16) et (16') ne sont compatibles que si χ est une fonction entière. D'où

$$\begin{cases} S_0 = \frac{a_0}{2}\delta_0 & \text{pour } \delta = 1, \\ S_0 = 0 & \text{pour } \delta = 3, 5, \ldots. \end{cases} \tag{17}$$

Discussion suivant les valeurs de δ :

$\delta = 1$: On traduit (13) à l'aide de (11) et (17); on obtient

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi i \mu_n x}, \tag{18}$$

les suites étant définies pour $n < 0$ par la condition de symétrie (S).

$\delta = 3$: D'après (11'), (13) et (17), on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-1} (\delta'_{\lambda_n} - \delta'_{-\lambda_n}) \sim -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(2\pi\mu_n x),$$

soit, en intégrant

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' a_n \lambda_n^{-1} \delta_{\lambda_n} \sim i \sum_{-\infty}^{\infty}{}' b_n \mu_n^{-1} e^{2\pi i \mu_n x}, \tag{19}$$

les sommations étant prises pour $n \neq 0$, et les suites étant définies par (S) pour $n < 0$.

$\delta = 3, 5, \ldots$. Nous faisons maintenant l'hypothèse $H_1\{\lambda_n\}$ un peu plus forte que $H_0\{\lambda_n\}$: il existe une constante $h > 0$ et des intervalles I_j de longueur

indéfiniment croissante ($j=1, 2, \ldots$) tels que, sur les I_j, la distance entre deux points λ_n consécutifs dépasse toujours h. D'après (1 4), il existe une primitive double de T, soit $T^{(-2)}$, qui est une distribution presque-périodique; elle est somme d'une distribution portée par les λ_n, et d'une fonction F constante dans chaque intervalle $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$, le saut en λ_n étant le coefficient de δ'_{λ_n} dans le développement de T, soit

$$F_n=(-\pi)^{-q+1}\Gamma(q)C_2 a_n\lambda_n^{2-2q}.$$

Prenons pour α une fonction indéfiniment dérivable non négative à support $\left[-\frac{h}{3}, \frac{h}{3}\right]$. Choisissons un $a_\nu\neq 0$, et $\varepsilon<\frac{|F_\nu|}{3}$. Comme, pour j assez grand, il existe une ε-presque période de $T^{(-2)}\star\alpha$ translatant λ_ν dans I_j, il existe dans chaque I_j assez grand un λ_n tel que $|F_n|>\frac{|F_\nu|}{3}$. Donc on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n\lambda_n^{2-2q}|>0.$$

Supposons, en outre (ce qui est possible), que

$$\alpha'(0)=\ldots=\alpha^{(q-2)}(0)=0, \qquad \alpha^{(q-1)}(0)=1.$$

Alors la valeur de $T\star\alpha$ en λ_n est le coefficient de $\delta_n^{(q-1)}$ dans le développement de T, qui est $(-\pi)^{-q+1}\Gamma(q)C_q a_n\lambda_n^{1-q}$. Cette valeur n'est pas bornée quand $n\to\infty$, ce qui contredit le fait que $T\star\alpha$ est une fonction p.-p. usuelle. On arrive donc à une contradiction : l'hypothèse $H_1\{\lambda_n\}$ est incompatible avec $\delta=3{,}5, \ldots$.

Il nous paraît probable mais nous n'avons pas démontré, que l'hypothèse $H_0\{\lambda_p\}$ est elle-même incompatible avec δ impair >3.

Résumons maintenant les principaux résultats obtenus. Rappelons le sens des hypothèses :

$H_0\{\lambda_n\}$: *existence d'intervalles* I_j *de longueur indéfiniment croissante, et d'un* ν *tels que, pour tout* $\lambda_n\in I_j$, *on ait* $\lambda_{n+\nu}-\lambda_n>1$;

$H_1\{\lambda_n\}$: *existence d'intervalles* I_j *de longueur indéfiniment croissante, et d'un* $h>0$ *tel que, pour tout* $\lambda_n\in I_j$, *on ait* $\lambda_{n+1}-\lambda_n>h$.

Théorème 3. — *Moyennant* $H_0\{\lambda_n\}$, $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta\}$ *entraîne :*

— *pour* $\delta=1$,

$$\sum_{-\infty}^{\infty}a_n\delta_{\lambda_n}\sim\sum_{-\infty}^{\infty}b_n e^{2\pi i\mu_n x},$$

avec la condition de symétrie (S) *et*

$$b_0=\lim_{i\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_{n_i}}{\lambda_{n_i}}$$

si $\inf(\lambda_{n_{i+1}}-\lambda_{n_i})>0$, *et avec* a_0 *convenablement choisi;*

— *pour* $\delta = 3$,

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' a_n \lambda_n^{-1} \delta_{\lambda_n} \sim i \sum_{-\infty}^{\infty}{}' b_n \mu_n^{-1} e^{2\pi i \mu_n x},$$

avec la condition de symétrie (S), *les sommations étant faites pour* $n \neq 0$. *Moyennant* $H_1\{\lambda_n\}$, *il est impossible d'avoir* $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta\}$ *avec* δ *impair supérieur à* 3.

Ce théorème permet d'interpréter tous les résultats de notre prochaine et dernière section, portant sur des distributions du type *c*, comme résultats concernant le problème *a*. Nous ne ferons pas systématiquement cette traduction.

Remarquons que, d'après les propositions 4 et 6, les relations modulaires (M) et (M'), jointes à (A_1), (A_2) et (S), entraînent $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta\}$, avec $\delta = 1$ ou 3. Si l'on ajoute la condition $H_0\{\lambda_n\}$, ces relations modulaires entraînent donc des formules du type de Poisson (prop. 2). Il est sans doute possible d'atteindre ce résultat plus directement.

3. Théorèmes d'unicité pour des distributions du type *c*.

Les suites $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ seront ici réelles, croissantes, les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ complexes ($n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$) et l'on suppose réalisées les conditions

$$(A_1) : \sum_{\lambda_n \neq 0} |a_n| |\lambda_n|^{-\alpha} < \infty \quad \text{pour un } \alpha \text{ réel},$$

$$(A_2) : \sum_{\mu_n \neq 0} |b_n| |\mu_n|^{-\beta} < \infty \quad \text{pour un } \beta \text{ réel};$$

$$C\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\} : \quad T_{a,\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi i \mu_n x}$$

qui sont les hypothèses du théorème 2. Comme nous l'avons remarqué,

$$T_{b,\mu} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n \delta_{\mu_n}$$

est la transformée de Fourier de $T_{a,\lambda}$ au sens de [5].

Plus généralement, si S et $\hat{S}$ sont deux distributions tempérées à support discret telle que $\hat{S}$ est la transformée de Fourier de S (pour ces notions, *voir* [5]), nous appellerons « support ordonné » de S une suite $\{\nu_n\}$ ($n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$) non décroissante, et comptant p éléments en un point où la restriction de S est une distribution d'ordre $p-1$; nous appellerons spectre de S tout support ordonné de $\hat{S}$.

Étant donné une telle suite $\{\nu_n\}$, nous posons les définitions suivantes :

$$n(r) = n_\nu(r) = n$$

sur chaque intervalle $]\nu_n, \nu_{n+1}[$, et $n(r)$ non décroissante;

$$N(r) = N_\nu(r) = \frac{1}{r}\int_{\pm 1}^{r} \frac{n(r) - n(0)}{r}\, dr, \qquad \pm 1 = \frac{r}{|r|};$$

$$\underline{D} = \underline{D}\{\nu\} = \varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r) + N(-r)}{2r}.$$

Il existe une inégalité simple entre la distance de deux points consécutifs du support de S, et le $\underline{D}$ de son spectre.

PROPOSITION 7. — *Soit* S *une distribution tempérée à support discret dont la transformée de Fourier a la même propriété, et soit* $\{\hat{\nu}_n\}$ *son spectre. Sur tout intervalle fermé de longueur* $\underline{D}\{\hat{\nu}\}$, *il y a au moins un point du support de* S.

La démonstration est une simple adaptation de l'étude faite pour les fonctions moyenne-périodiques en ([7], p. 72). Si l'intervalle $[-l, l]$ est disjoint du support de S, il existe une régularisée $S \star \alpha$ qui s'annule sur $[-l, l]$. Il est facile de voir que sa transformée de Carleman, définie par

$$F(w) = \int_{-\infty}^{0} S \star \alpha(x)\, e^{-2\pi i x w}\, dx \qquad (w = u + iv,\ v > 0),$$

$$F(w) = -\int_{0}^{\infty} S \star \alpha(x)\, e^{-2\pi i x w}\, dx \qquad (v < 0)$$

est méromorphe et que ses pôles (comptés avec leur ordre de multiplicité) sont contenus dans $\{\hat{\nu}_n\}$. D'autre part, $F(w) = |v|^{-p} e^{2\pi|v|l})$ pour un entier p. En appliquant à $F(w)$ la formule de Jensen, on obtient aisément $2l \leq \underline{D}\{\hat{\nu}\}$. D'où, immédiatement, le résultat annoncé.

La proposition 7 pourrait être appliquée au problème a (moyennant, par exemple, les hypothèses du théorème 3) et permettrait de remplacer, dans plusieurs énoncés de [2] et [4], $\overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r}$ par $\underline{\lim} \frac{N(r)}{r}$. Cependant elle peut être nettement améliorée, dans le cas où S est presque-périodique, en faisant intervenir les densités supérieure et inférieure de répartition.

Rappelons (*cf.* [8]) qu'une suite réelle $\{\nu_n^*\}$ est dite bien répartie et de densité D si $\nu_n^* - \frac{n}{D} = O(1)\,(n \to \pm\infty)$. Nous noterons $\Delta_\cdot = \Delta_\cdot(\nu)$ [resp. $\Delta^\cdot = \Delta^\cdot(\nu)$] la borne supérieure (resp. inférieure) des densités des suites bien réparties contenues dans $\{\nu_n\}$ (resp. contenant $\{\nu_n\}$); on a

$$\Delta^\cdot = \varliminf_{h\to\infty} \overline{\lim_{|r|\to\infty}} \frac{n(r+h) - n(r)}{h},$$

$$\Delta_\cdot = \varliminf_{h\to\infty} \underline{\lim_{|r|\to\infty}} \frac{n(r+h) - n(r)}{h}.$$

On vérifie aisément que $\Delta_\cdot$ est inférieure à la densité minimum de Pólya

(et *a fortiori* à $\underline{D}$) et que

$$\Delta_* \geq \frac{1}{\overline{\lim}_{|n|\to\infty} |\nu_{n+1} - \nu_n|}.$$

Nous dirons que les suites $\Lambda^{(p)} = \{\nu_n^{(p)}\}$ tendent vers $\Lambda = \{\nu_n\}$ si $\lim_p \nu_n^{(p)} = \nu_n$ pour chaque n. On vérifie facilement que, si Λ est une suite bien répartie de densité D, toute suite limite de translatées de Λ est également bien répartie et de densité D (mais, même si Λ n'admet pas de points multiples, la suite limite peut en admettre). Nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration est copiée de celle du lemme 3 de [8].

Lemme. — *De l'ensemble des translatées d'une suite* $\{\nu_n\}$, *on peut extraire une suite convergeant vers une* $\{\nu_n^*\}$ *telle que* $\underline{D}\{\nu^*\} \leq \Delta_*\{\nu\}$.

Supposons que S est presque-périodique à support discret, et considérons une suite de ses translatées dont le support ordonné tend vers $\{\nu_n^*\}$. On peut en extraire (presque-périodicité) une suite convergeant vers une distribution presque-périodique S^* dont la série de Fourier ne diffère de celle de S que par les arguments des coefficients. Comme $\hat{S}$ est tempérée, il en est de même de $\hat{S}^*$, dont $\hat{S}^*$ admet une transformée de Fourier qui est la symétrique de S^*. D'après la proposition 7 et le lemme, on a donc :

Théorème 4. — *Soit* S *une distribution presque-périodique à support et à spectre discret, et soit* $\{\nu_n\}$ *son support ordonné. Sur tout intervalle fermé de longueur* $\Delta_*\{\nu\}$, *il y a au moins un point du spectre de* S.

Si nous interprétons ce résultat en prenant $S = T_{a,\lambda}$ et $\hat{S} = T_{b,\mu}$, nous avons le

Corollaire. — *Pour tout* n, $\mu_{n+1} - \mu_n \leq \Delta_*(\lambda)$. *En particulier*, $\Delta_*(\lambda)\Delta_*(\mu) \geq 1$.

Cherchons dans quel cas on peut avoir égalité. Si pour *une* valeur de n, on a $\mu_{n+1} - \mu_n < \Delta_*(\lambda)$, il existe une suite bien répartie $\{\mu_{n_i}\}$ pour lesquels on a la même propriété (presque-périodicité de $T_{a,\mu}$); dans ces conditions, on a $\Delta_*(\lambda)\Delta_*(\mu) < 1$. Donc, si l'on a $\Delta_*(\lambda)\Delta_*(\mu) = 1$, c'est que pour tout n on a

$$\mu_{n+1} - \mu_n = \Delta_*(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \lambda_{n+1} - \lambda_n = \Delta_*(\mu).$$

Par une « homothétie » (opération 1 du paragraphe 1), on peut se ramener à $\Delta_*(\lambda) = \Delta_*(\mu) = 1$, et par « translation » (opération 2) à $\lambda_0 = \mu_0 = 0$; alors

$$\lambda_n = \mu_n = n \qquad (n = \ldots -1, 0, 1, \ldots),$$

donc chacune des distributions $T_{a,\lambda}$ et $T_{b,\mu}$ est périodique, donc finalement

$$T_{a,\lambda} = T_{b,\mu} = A\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n.$$

THÉORÈME 5. — *On a* $\Delta_*(\lambda)\Delta_*(\mu) > 1$, *sauf si le couple* $(T_{a,\lambda}, T_{b,\mu})$ *résulte par les opérations* 1 *et* 2 *de la page* 63 *du couple* $\left(A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n, A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n\right)$.

COROLLAIRE. — *Si* $\Delta_*(\lambda) = \Delta_*(\mu) = 1$, *et si* $T_{a,\lambda}$ *et* $T_{b,\mu}$ *sont paires, on a :*

— *soit*

$$T_{a,\lambda} = A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n, \qquad T_{b,\mu} = A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n;$$

— *soit*

$$T_{a,\lambda} = A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{n+\frac{1}{2}}, \qquad T_{b,\mu} = A\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_n;$$

— *soit*

$$T_{a,\lambda} = A\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_n, \qquad T_{b,\mu} = A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{n+\frac{1}{2}};$$

si $T_{a,\lambda}$ *et* $T_{b,\mu}$ *sont impaires, on a*

$$T_{a,\lambda} = A\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_{n+\frac{1}{2}}, \qquad T_{b,\mu} = iA\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_{n+\frac{1}{2}}.$$

On retrouve les couples auxquels, par le théorème 2, sont associées les équations fonctionnelles de $\zeta(s)$, $(2^s-1)\zeta(s)$ et $(2^{1-s}-1)\zeta(s)$, et $2^{s-1}L(s-1)$.

Appliquons le théorème 4 en prenant

$$S = T_{a,\lambda} \star \sum_{1}^{p} c_j\delta_{-\tau_j} \qquad \text{et} \qquad \hat{S} = T_{b,\mu}\sum_{j=1}^{p} c_j e^{2\pi i\tau_j x}.$$

On obtient immédiatement :

THÉORÈME 6. — *Supposons qu'existe une fonction*

$$P(x) = \sum_{j=1}^{p} c_j e^{2\pi i\tau_j x}$$

et un intervalle fermé I *de longueur* $p\Delta_*(\lambda)$ *tel que* $P(x)$ *s'annule sur tous les* μ_n *contenus dans* I. *Alors* $P(x)$ *s'annule sur tous les* μ_n.

COROLLAIRE 1. — *Si, sur un intervalle fermé de longueur* $2\Delta_*(\lambda)$, *tous les* μ_n *sont multiples de* α, *il en est de même partout* $\left[\text{il suffit de prendre } P(x) = \sin\frac{\pi x}{\alpha}\right]$.

Donc $T_{a,\lambda}$ est périodique, et l'on a

$$T_{a,\lambda} = (c_1\delta_{\xi_1} + \ldots + c_q\delta_{\xi_q}) \star \sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{n\alpha}$$

et

$$T_{b,\mu} = \alpha(c_1 e^{-2\pi i\xi_1 x} + \dots c_q e^{-2\pi i\xi_q x}) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{n\alpha}.$$

Corollaire 2 (généralisant le corollaire 1). — *Si, sur un intervalle fermé de longueur $2^p\Delta_*(\lambda)$, tous les μ_n appartiennent à la réunion de p progressions arithmétiques données, il en est de même partout*; on prend

$$P(x) = \sin\frac{\pi(x-x_1)}{\alpha_1} \dots \sin\frac{\pi(x-x_p)}{\alpha_p}.$$

Le corollaire 1 entraîne que si $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont commensurables, avec $\lambda_q - \lambda_1 > 2\Delta_*(\lambda)$, tout λ_n est combinaison linéaire à coefficients entiers de $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. Nous allons chercher à obtenir un résultat analogue, sans l'hypothèse de commensurabilité.

Nous recourrons à un lemme d'Agmon [4], [9] : *Soit $\nu_1, \dots, \nu_q, \nu$ des nombres réels, et supposons que ν ne soit pas combinaison linéaire à coefficients entiers de $\nu_1, \dots, \nu_q$. Alors il existe une suite $\tau_j \to \infty$ telle que*

$$\lim_{j\to\infty} e^{2\pi i\tau_j\nu_k} = 1 \qquad (k = 1, 2, \dots, q),$$

mais

$$\lim_{j\to\infty} e^{2\pi i\tau_j\nu} = r \neq 1.$$

Prenons pour $\nu_1, \dots, \nu_q$ les points μ_n contenus dans un intervalle fermé I de longueur $\Delta_*(\lambda) + \Delta^*(\lambda)$ et pour ν (si c'est possible) un μ_r tel que $b_r \neq 0$. De la suite $T_{a,\lambda} \star \delta_{\tau_j}$ on peut extraire (presque-périodicité) une suite convergente vers une distribution T_{a^*,λ^*} telle que

$$\Delta_*(\lambda^*) \leq \Delta^*(\lambda^*) \leq \Delta^*(\lambda)$$

(la dernière inégalité résulte d'une remarque faite lors de la définition de Δ et de Δ_* ; la notation T_{a^*,λ^*} est commode, mais abusive, dans la mesure où λ^* peut admettre des points multiples). En appliquant le théorème 4 avec

$$S = T_{a,\lambda} - T_{a^*,\lambda^*},$$

on arrive à une contradiction. Donc :

Théorème 7. — *Tout μ_n (tel que $b_n \neq 0$) est combinaison linéaire à coefficients entiers de ceux que contient un intervalle fermé de longueur $\Delta_*(\lambda) + \Delta^*(\lambda)$.*

Compte tenu du théorème 3, le théorème 7 généralise le résultat essentiel de Chandrasekharan et Mandelbrojt (th. 3 de [4]), qui nécessite l'hypothèse $\lambda_{n+1} - \lambda_n > h_n > 0$ pour tout n.

On peut encore raffiner en prenant pour $\nu_1, \dots, \nu_q$, dans le lemme d'Agmon, tous les points μ_n situés dans un intervalle fermé de longueur $2(\Delta_*(\lambda) + \Delta^*(\lambda))$, à l'exception éventuelle de ceux qui appartiennent à une progression arithmé-

tique P d'origine x_0 et raison α, et en prenant $\nu = \mu_r$ (avec $b_r \neq 0$). En appliquant le théorème 4 avec

$$S = (T_{a,\lambda} - T_{a^*,\lambda^*}) \sin \frac{\pi(x - x_0)}{\alpha},$$

on arrive à une contradiction. Donc μ_r est, ou une combinaison linéaire à coefficients entiers de $\nu_1, \ldots, \nu_q$, ou un élément de P.

Convenons de dire que les progressions arithmétiques $P_1, \ldots, P_k$ sont « indépendantes » si, à l'exception des points communs à deux progressions, aucun point de l'une d'entre elles n'est combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments des autres. Si, sur un intervalle fermé de longueur $2(\Delta_*(\lambda) + \Delta^*(\lambda))$, tous les μ_n (soit $\nu_1, \ldots, \nu_s$) appartiennent chacun à une et une seule des progressions $P_1, \ldots, P_k$ indépendantes, on sait (th. 7) que tout μ_r (avec $b_r \neq 0$) est de la forme $k_1\nu_1 + \ldots + k_s\nu_s$; soit $k_1 \neq 0$; si μ_r n'appartenait pas à la progression P_j contenant ν_1, μ_r serait (d'après l'alinéa précédent) combinaison linéaire de $\nu_2, \ldots, \nu_s$, mais cela contredit l'indépendance de $P_1, \ldots, P_k$. On a donc le résultat suivant :

THÉORÈME 8. — *Soit* I *un intervalle fermé de longueur* $2(\Delta_*(\lambda) + \Delta^*(\lambda))$, *et* $P_1, \ldots, P_k$ *des progressions arithmétiques indépendantes. Si, sur* I, *tous les* μ_n *appartiennent chacun à une et une seule des* P_i, *tout* μ_r (avec $b_r \neq 0$) *appartient à la réunion des* P_i.

Il est aisé de voir que, dans le théorème 7 ou dans la définition des progressions arithmétiques indépendantes, nous aurions pu remplacer « combinaison linéaire à coefficients entiers » par « combinaison linéaire à coefficients entiers, telle que la somme des coefficients égale 1 ». En effet, la conclusion du théorème 7 exprime l'égalité

$$\mu_n = \sum_{-N}^{N} A_j \mu_j \qquad (A_j \text{ entiers});$$

pour tout ε réel, on a

$$\mu_n + \varepsilon = \sum_{-N}^{N} A_j(\varepsilon)(\mu_j + \varepsilon) \qquad [A_j(\varepsilon) \text{ entiers}];$$

prenons ε différent d'une combinaison linéaire à coefficients rationnels de μ_n, $\mu_{-N}, \ldots, \mu_N$; on doit avoir $\sum_{-N}^{N} A_j(\varepsilon) = 1$. C. Q. F. D.

Lorsque $\inf(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ [ce qui entraîne les conditions $H_0\{\lambda_n\}$ et $H_1\{\lambda_n\}$ du théorème 3, et aussi $\Delta^*(\lambda) < \infty$], de nouveaux résultats peuvent être obtenus. La simple considération des régularisées $T_{a,\lambda} \star \alpha$ montre, par exemple, que les coefficients a_n sont bornés, et le théorème 3 donne

$$b_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{\lambda_n}.$$

En changeant $T_{a,\lambda}$ en $T_{a,\lambda}e^{-2\pi i\mu_m x}$, on voit que les b_m sont aussi bornés. Donnons un résultat, plus difficile, rélatif à $\{\mu_n\}$.

Quand on a $\inf(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$, les régularisées $T_{b,\mu}\star\alpha$ sont pseudo-périodiques au sens de Paley et Wiener ([10], p. 116 et [8]). Si I et J sont deux intervalles égaux de longuer $l>\Delta^*(\lambda)$, on a alors

$$\int_I |T_{b,\mu}\star\alpha(x)|^2\,dx < K\int_J |T_{b,\mu}\star\alpha(x)|^2\,dx, \tag{20}$$

K ne dépendant que de l et de $\{\lambda_n\}$. Supposons, pour simplifier, $\mu_0=0$. Considérons une suite infinie $\{\mu_{n_j}\}$ telle que $b_{n_j}=\rho_j e^{i\theta_j}$, $\rho_j\geq\rho>0$ $(j=1,2,\ldots)$ et supposons que, sur un intervalle I de longueur $l>\Delta^*(\lambda)$ ne contenant pas 0, les suites translatées $\{\mu_n-\mu_{n_j}\}$ (définies par la donnée de j) soient disjointes deux à deux; montrons qu'on arrive à une contradiction. Pour chaque k, posons

$$S=S_k=T_{b,\mu}\star\sum_{j=1}^{k}e^{-i\theta_j}\delta_{-\mu_{n_j}}$$

et choisissons $\alpha=\alpha_k$ de support assez petit pour que, sur l'intervalle I_η concentrique à I et de longueur $l+2\eta$, le support de $S\star\alpha$ soit formé d'intervalles disjoints de longueur 2η. Alors,

$$\int_{I_\eta}|S\star\alpha(x)|^2\,dx=\sum_{j=1}^{k}\int_{I_\eta}|T_{b,\mu}\star\delta_{-\mu_n}\star\alpha(x)|^2\,dx,$$

ce qui est $O(k)$, d'après (20). Mais

$$\int_{-l-\eta}^{l+\eta}|S\star\alpha(x)|^2\,dx\geq\int_{-\eta}^{\eta}|S\star\alpha(x)|^2=\left(\sum_{j=1}^{k}\rho_j\right)^2\int_{-\eta}^{\eta}|\alpha(x)|^2\,dx$$

et comme $\rho_j\geq\rho>0$, le second membre est de l'ordre de k^2. On a donc

$$\int_{I_\eta}|S\star\alpha(x)|^2\,dx=o\left(\int_{l-\eta}^{l+\eta}|S\star\alpha(x)|^2\,dx\right)$$

quand $k\to\infty$, ce qui contredit (20). Il est donc impossible que les suites $\{\mu_n-\mu_{n_j}\}$ soient disjointes deux à deux sur I. Par l'absurde, on établit alors l'existence sur I d'un nombre fini de points $\xi_1,\ldots,\xi_s$ tels que, dès que $|b_m|\geq\rho>0$, l'un des points $\mu_m+\xi_1,\ldots,\mu_m+\xi_s$ appartienne à la suite $\{\mu_n\}$. D'où :

THÉORÈME 9. — *Supposons* $\inf(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$. *Alors les suites* $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *sont bornées, et l'on a*

$$b_m=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1e^{2\pi i\mu_m\lambda_1}+\ldots+a_ne^{2\pi i\mu_m\lambda_n}}{\lambda_n}.$$

Supposons, de plus, $\inf|b_n|>0$, *et soit* I *un intervalle de longueur supérieure à* $\Delta^*(\lambda)$: *il existe alors un nombre fini de points sur* I, *soit* $\xi_1,\ldots,\xi_s$, *tels que pour tout m l'un des points* $\mu_m+\xi_1,\ldots,\mu_m+\xi_s$ *appartienne à la suite* $\{\mu_n\}$.

Posons $h_\lambda = \inf(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, et supposons $\Delta^*(\mu) < 2h_\lambda$. Il existe alors (*voir*, par exemple, [10], p. 92) une fonction $\hat{\Pi}(x)$ de type exponentiel $< 2\pi h_\lambda$, à décroissance rapide (c'est-à-dire plus rapide que toute fraction rationnelle) sur l'axe réel, et qui s'annule sur $\{\mu_n\}$. Pour tout entier k, il existe une fonction $\hat{\Pi}_k$ jouissant des mêmes propriétés, sauf que $\hat{\Pi}_k(\mu_k) = 1$ au lieu de 0. Soit Π_k la cotransformée de Fourier de $\hat{\Pi}_k$; Π_k a son support dans $(-h_\lambda, h_\lambda)$ et l'on a (« formule de Poisson »)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{\Pi}_k(\mu_n)\, e^{2\pi i \mu_n x} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \Pi_k(x - \lambda_n),$$

soit, pour $x = \lambda_m$,

$$b_k e^{2\pi i \mu_k \lambda_m} = a_m \Pi_k(0).$$

Cette formule vaut quels que soient k et m. Donc, quels que soient k, l, m, n avec $b_k b_l a_m a_n \neq 0$, on a

$$e^{2\pi i (\mu_k - \mu_l)(\lambda_m - \lambda_n)} = 1.$$

C'est dire :

1° que tous les $\lambda_m - \lambda_n$ sont multiples d'un même nombre, soit h_λ, et que tous les $\mu_k - \mu_l$ sont multiples de $h_\mu = \inf(\mu_{k+1} - \mu_k)$;

2° que $h_\lambda h_\mu$ est un entier. Par les opérations 1 et 2 de la page 63 (« homothétie » et « translation ») on se ramène au cas $\lambda_0 = \mu_0 = 0$, $h_\lambda = 1$; la périodicité de $T_{b,\mu}$, jointe à l'hypothèse $\Delta^*(\mu) < 2$, montre alors que $T_{a,\lambda}$ et $T_{b,\mu}$ se réduisent, à un facteur multiplicatif près, à $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n$ et $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n$. Ainsi :

THÉORÈME 10. — *On a* $\Delta^*(\mu) \geq 2h_\lambda$, *sauf si le couple* $(T_{a,\lambda}, T_{b,\mu})$ *résulte par les opérations* 1 *et* 2 *de la page* 63 *du couple* $\left(A\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n,\ A\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n\right)$.

Supposons encore $h_\lambda = \inf(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$; soit maintenant G une fonction N fois dérivable (N assez grand) s'annulant hors de $(-h_\lambda, h_\lambda)$, et soit $\hat{G}$ sa transformée de Fourier. La transformée de Fourier du produit de convolution $T_{a,\lambda} \star G$ est $T_{b,\mu} . \hat{G}$; celle du produit $T_{a,\lambda} . (T_{a,\lambda} \star G)$ est le produit de convolution $T_{b,\mu} \star (T_{b,\mu} . \hat{G})$. Or

$$T_{a,\lambda} \,.\, (T_{a,\lambda} \star G) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n^2 G(0)\, \delta_{\lambda_n},$$

$$T_{b,\mu} \star (T_{b,\mu} \,.\, \hat{G}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} b_n b_m \hat{G}(\mu_n)\, \delta_{\mu_n + \mu_m}.$$

Ainsi, pour chaque σ réel, $\sum_{\mu_n + \mu_m = \sigma} b_n b_m \hat{G}(\mu_n)$ est proportionnel à $G(0)$. Supposons, comme il est permis de le faire, tous les $b_n \neq 0$. Le couple (k, l)

étant donné, désignons par $E(k, l)$ l'ensemble des μ_n tels que, pour une valeur de m, on ait

$$\mu_n + \mu_m = \mu_k + \mu_l.$$

Dès qu'on a $\hat{G}(\mu_n) = 0$ pour tout $\mu_n \in E(k, l)$, $G(0)$ est nul. Admettons maintenant qu'il existe une fonction F, N fois dérivable, nulle en dehors de $\left(-\frac{h_\lambda}{2}, \frac{h_\lambda}{2}\right)$, et orthogonale aux $e^{-2\pi i \mu_n x}$ $(\mu_n \in E(k, l))$; on peut alors poser

$$G(x) = F(x + y) \qquad \text{pour tout } y \in \left(-\frac{h_\lambda}{2}, \frac{h_\lambda}{2}\right),$$

et la remarque ci-dessus entraîne $G(0) = F(y) = 0$; ainsi $F \equiv 0$. Cela prouve, grâce à un argument déjà utilisé pour démontrer le théorème 9 :

THÉORÈME 11. — *Soit M_σ l'ensemble des μ_m tels que $\sigma - \mu_m \in \{\mu_n\}$* (on suppose tous les $b_n \neq 0$). *Ou bien M_σ est vide, ou bien l'ensemble $\{e^{2\pi i \mu_m x}\}$, $\mu_m \in M_\sigma$ est complet dans l'espace des distributions de support $\subset \left[-\frac{h_\lambda}{2}, \frac{h_\lambda}{2}\right]$. En particulier, la densité supérieure de répartition de la suite M_σ satisfait $\Delta^+\{M_\sigma\} \geq h_\lambda$.*

COROLLAIRES. — 1. *Tout μ_k est milieu d'une infinité de couples (μ_n, μ_m), dès que $h_\lambda > 0$.*

2. *Si la suite $\{\mu_n\}$ est symétrique et $h_\lambda > 0$, chaque différence $\mu_n - \mu_m$ se répète une infinité de fois.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. HAMBURGER, *Ueber einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind* (*Math. Ann.*, t. 85, 1922, p. 129-140).

[2] S. BOCHNER et K. CHANDRASEKHARAN, *On Riemann's functional equation* (*Ann. Math.*, t. 63, 1956, p. 336-360).

[3] K. CHANDRASEKHARAN et S. MANDELBROJT, *Sur l'équation fonctionnelle de Riemann* *C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1956, p. 2793-2796).

[4] K. CHANDRASEKHARAN et S. MANDELBROJT, *On Riemann's functional equation* (*Ann. Math.*, t. 66, 1956, p. 285-296).

[5] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, t. II, Paris.

[6] E. C. TITCHMARSTH, *The Theory of the Riemann ζ-function*, Oxford.

[7] J. P. KAHANE, *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 5, 1953-1954, p. 39-130).

[8] J. P. KAHANE, *Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées* (*Ann. Inst. Fourier*, t. VII, 1957, p. 293-314).

[9] S. AGMON, *On the singularities of a class of Dirichlet series* (*Bull. Res. Council of Israël*, t. 3, 1954, p. 385-389).

[10] R. PALEY et N. WIENER, *Fourier transforms in the Complex-domain*, Colloquium.

SUR

LES ANNEAUX INDEXABLES

PAR M. DANIEL PHAM.

Les anneaux considérés dans ce travail comprennent comme cas particulier les anneaux semi-simples. Aucune hypothèse *a priori* n'est faite quant aux conditions de chaîne descendante ou ascendante relatives aux idéaux unilatères.

Les propriétés obtenues, à partir d'hypothèses assez générales, relèvent des concepts élémentaires qu'on trouve exposés dans des traités comme ceux de Van der Waerden (*Modern Algebra*) et N. Jacobson (*The Theory of Rings et Structure of Rings*).

Ce travail est divisé en trois parties. Dans la première partie, j'exposerai la définition de l'indexabilité et je montrerai que certains anneaux élémentaires qu'on rencontre souvent en Algèbre rentrent dans cette catégorie. Dans la seconde partie, j'indiquerai comment, à partir d'un anneau indexable, il est possible d'en construire d'autres, plus simples ou plus généraux. Enfin, la dernière partie est consacrée à la décomposition d'un anneau indexable en composantes plus simples. La structure d'un tel anneau se révèle assez complexe et ne sera pas complètement éclaircie dans ce premier travail.

PREMIÈRE PARTIE.

1.1. Je considère une classe d'anneaux $\mathfrak{A}$ possédant une identité 1. Les applications $x \to \lambda x \mu$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$ (λ, μ représentent deux unités dans $\mathfrak{A}$) forment visiblement un groupe $\mathfrak{G}$ de transformation. La classe de transitivité déterminée par l'élément $x \in \mathfrak{A}$ relative au groupe $\mathfrak{G}$ sera désignée par $\{x\}$.

Je suppose qu'il est possible de munir l'ensemble des classes $\{x\}$ d'une structure d'ordre total $\preceq$ vérifiant les deux axiomes suivants :

A 1. $\quad \{0\} \prec \{x\} \quad$ si $x \neq 0$;

A 2. $\quad \{x.y\} \preceq \{x\}, \quad \{x.y\} \preceq \{y\}.$

On voit immédiatement que si une telle structure d'ordre total existe, les deux relations

$$(R) \qquad x = ayb, \qquad y = cxd \qquad (a, b, c, d \in \mathfrak{A})$$

exigent que x, y appartiennent à une même classe de transitivité relative au groupe $\mathfrak{G}$.

Cette condition est suffisante pour qu'on puisse munir d'une structure d'ordre total vérifiant les axiomes A 1, A 2 l'ensemble des classes $\{x\}$ dans le cas particulier où le nombre de ces classes est au plus dénombrable. En effet, deux élément x, $y \in \mathfrak{A}$ appartenant à deux classes de transitivité différentes, ou bien sont liés par une seule relation du type (R) et je dirai que les classes $\{x\}$ et $\{y\}$ sont comparables, ou bien ne sont liés par aucune relation du type (R) et je dirai que les classes $\{x\}$ et $\{y\}$ ne sont pas comparables. Si un élément $p \in \mathfrak{A}$ est premier (c'est-à-dire si p n'est pas le produit de deux éléments distincts des unités) on ne peut trouver aucun élément q d'une classe différente de p telle que $p = aqb$ $(a, b \in \mathfrak{A})$. Je dirai que la classe $\{p\}$ est une classe première. L'ensemble des classes premières est en nombre au plus dénombrable et ces classes ne sont pas comparables deux à deux.

Ceci posé, rangeons, avec $\{o\}$ les classes premières dans un ordre quelconque, $\{o\}$ étant le premier élément :

$$\{o\} \prec \{p_1\} \prec \{p_2\} \prec \cdots \prec \{p_n\} \prec \cdots.$$

Soit $\{x\}$ une classe donnée ; on ne peut avoir

$$p_i = axb \qquad (a, b \in \mathfrak{A}).$$

Donc on peut insérer $\{x\}$ dans la chaîne précédente en respectant les axiomes A 1 et A 2 : $\{x\}$ sera insérée avant toute $\{p_i\}$ telle que

$$(x = ap_ib \qquad (a, b \in \mathfrak{A}).$$

Supposant placées n classes $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}$ conformément aux axiomes A 1 et A 2, je dis qu'il est possible de placer une classe donnée $\{x\}$ conformément aux mêmes axiomes. Il suffit pour cela, de montrer qu'il est possible d'insérer $\{x\}$ entre deux classes quelconques $\{x_i\} \prec \{x_j\}$ déjà placées tout en respectant les axiomes A 1 et A 2.

En effet, de deux choses l'une :

a. ou bien $\{x_i\}$ et $\{x\}$ sont comparables et l'on a soit

$$x = ax_ib (a, b \in \mathfrak{A}), \qquad \text{soit} \quad x_i = axb ;$$

dans le premier cas on prendra

$$\{x\} \prec \{x_i\} \prec \{x_j\}$$

et comme on ne peut avoir $x_j = cxd (c, d \in \mathfrak{A})$ car alors $x_j = cax_ibd$, ce qui

serait en contradiction avec $\{x_i\} \prec \{x_j\}$, les axiomes A 1 et A2 sont bien respectés quant aux classes $\{0\}$, $\{x\}$, $\{x_i\}$, $\{x_j\}$; dans le second cas, on prendra $\{x_i\} \prec \{x\}$ quitte à placer $\{x\}$ par rapport à $\{x_j\}$;

b. ou bien $\{x_i\}$ et $\{x\}$ ne sont pas comparables et comme précédemment on peut placer $\{x\}$ par rapport à $\{x_j\}$ conformément aux axiomes A 1 et A 2.

Comme le nombre total de classes de transitivité $\{x\}$ est dénombrable, on peut ainsi placer toute classe donnée et l'on obtiendra une structure d'ordre satisfaisant aux axiomes A 1 et A 2.

On remarquera que dès qu'il existe deux classes non comparables, la structure d'ordre total respectant A 1 et A 2, quand elle existe, n'est pas unique.

En effet, soit $\{x\} \prec \{y\}$ dans une structure, $\{x\}$, $\{y\}$ n'étant pas comparables. Je dis qu'il est possible de déterminer une seconde structure analogue dans laquelle $\{y\} \prec \{x\}$. Il suffit de conserver, dans la détermination de cette seconde structure la place relative par rapport à $\{x\}$ et à $\{y\}$ de toute classe placée avant $\{x\}$ et $\{y\}$ ou après $\{x\}$ et $\{y\}$ dans la première structure. Quant à une classe $\{z\}$ intermédiaire entre $\{x\}$ et $\{y\}$ dans la première structure, elle ne peut être comparable à la fois à $\{x\}$ et à $\{y\}$. Par exemple si $\{z\}$ est comparable à $\{x\}$, on prendra, dans la seconde structure

$$\{y\} \prec \{x\} \prec \{z\}$$

une classe intermédiaire entre $\{z\}$ et $\{y\}$ dans la première structure sera placée comme on a placé $\{z\}$ par rapport à $\{x\}$ et $\{y\}$ car $\{y\}$ et $\{z\}$ ne sont par comparables.

Ainsi, pour l'anneau N des entiers, le nombre de classes de transitivité relatives au groupe $\mathfrak{G}$ (qui se compose ici de la transformation identique et de la multiplication par -1) est dénombrable, chaque classe comprend un entier a et son opposé $-a$. Les classes premières sont fournies par les nombres premiers et l'on peut munir N d'une infinité de structures d'ordre satisfaisant aux axiomes A 1 et A 2. Dans l'une quelconque de ces structures, entre $\{0\}$ et $\{x\}$ il y a une infinité de classes, par exemple

$$\{2x\}, \quad \{2^2x\}, \quad \ldots, \quad \{2^nx\}, \quad \ldots.$$

1.2. Définition. — Pour éviter une trop grande généralité, je considère seulement les anneaux $\mathfrak{A}$ tels que les classes de transitivité $\{x\}$ sont passibles d'une structure d'ordre total vérifiant les axiomes A 1 et A 2 précédents et, en plus, l'axiome A 3 suivant :

A 3. Il y a un nombre fini de classes entre

$$\{0\} \quad \text{et} \quad \{x\} \neq \{1\}.$$

L'anneau N ne vérifie pas A 3.

Tout anneau vérifiant A 1, A 2 et A 3 sera dit indexable, l'ensemble des classes de transitivité $\{x\}$ est au plus dénombrable.

A une relation d'ordre vérifiant les conditions précédentes j'associe l'application $\{x\} \to \varphi(\{x\}) = \varphi(x) = n$ de l'ensemble des classes $\{x\}$ sur l'ensemble N^+ des entiers non négatifs (ou sur l'ensemble $0, 1, 2, \ldots, n$ si le nombre des classes $\{x\}$ est fini) muni de la structure d'ordre naturel; cette application constitue un isomorphisme de ces deux structures d'ordre et attache à chaque x de l'anneau un entier n tel $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) \leq \mathrm{Min}[\varphi(x), \varphi(y)]$, $\varphi(1) = \infty$ si le nombre des classes $\{x\}$ est infini. La fonction $\varphi(x)$ ainsi définie sera appelée fonction index (ou simplement index) des éléments de l'anneau $\mathfrak{A}$.

Un anneau indexable est dit à index fini si le nombre des classes $\{x\}$ est fini. Ce nombre, diminué d'une unité [soit $= \varphi(1)$] sera appelé index de l'anneau.

1.3. Anneaux a index strict. — Si la structure d'ordre total vérifiant les axiomes A 1, A 2 et A 3 est unique, l'anneau est dit à index strict ou strictement indexable. Dans un tel anneau, deux classes quelconques sont comparables.

Un anneau donné, ne comportant qu'un nombre fini de classes de transitivité est strictement indexable si et seulement si deux éléments x, y n'appartenant pas à une même classe vérifient l'une et l'une seulement de ces deux relations

$$(R) \qquad x = ayb, \qquad y = cxd \qquad (a, b, c, d \in \mathfrak{A}).$$

Dans le cas particulier où $\mathfrak{A}$ est commutatif et comporte un nombre fini de classes de transitivité, une condition nécessaire et suffisante d'indexabilité stricte est la suivante :

Étant donné deux idéaux principaux (x), (y), on a toujours l'une au moins des deux relations d'inclusion

$$(x) \subseteq (y), \qquad (y) \subseteq (x);$$

et si $(x) = (y)$, x et y appartiennent à une même classe de transitivité.

Si l'anneau commutatif $\mathfrak{A}$ comporte une infinité dénombrable de classes de transitivité, la condition précédente n'est plus suffisante pour l'indexabilité de $\mathfrak{A}$ comme le prouve l'exemple de l'anneau N; il faut ajouter, en plus, la condition minimale pour les idéaux. Ces deux conditions suffisent visiblement pour assurer l'indexabilité et l'indexabilité stricte de $\mathfrak{A}$.

1.4. Exemples. — A. *Anneau C_m des $m \times m$ matrices sur un corps gauche* C. — Chaque classe de transitivité relative au groupe $\mathfrak{G}$ est composée de toutes les matrices de même rang. Il y a $m + 1$ de ces classes. Deux classes quelconques sont comparables :

Soient x_p, x_q deux matrices de C_m, de rang p et q respectivement $(p < q)$,

$$\{x_p\} = \{\mathrm{diag}(p, 0\},$$

où diag(p, o) désigne la matrice dont les p premiers éléments de la diagonale principale sont égaux à 1 (identité de C), les autres éléments étant des zéros.

On a visiblement

$$\{\operatorname{diag}(p, o)\} = \{\operatorname{diag}(p, o).\operatorname{diag}(q, o)\}$$

donc

$$\{x_p\} = \{x_p.\lambda x_q \mu\} \qquad (\lambda, \mu \text{ désignent deux unités de } C_m).$$

D'autre part, on sait qu'une relation de la forme

$$x_q = a x_p b \qquad (a, b \in C_m ; p < q)$$

n'est pas possible. Par suite C_m est indexable et à index strict. La fonction index ici est confondue avec le rang.

B. *L'anneau* $N/(p)$ *des classes résiduelles des entiers* $\bmod p$. — Le cas p premier est trivial, l'anneau considéré est un corps et est évidemment indexable. Supposons p non premier. Dans un tel anneau, les unités sont les classes $\bar{x}(\bmod p)$ où x est premier avec p.

Pour montrer que l'anneau $N/(p)$ est indexable, il suffit de montrer que l'égalité $(\bar{x}) = (\bar{y})$ entre deux idéaux principaux entraîne l'appartenance de $\bar{x}$ et $\bar{y}$ à la même classe de transitivité relative au groupe $\mathfrak{G}$. Soient

$$x = ky + ap, \qquad y = hx + bp.$$

La première égalité montre que le plus grand commun diviseur de y et p soit $d = (y, p)$ divise x, la seconde que $\delta = (x, p)$ divise y, donc $d = \delta$.

Posons $x = x'd$, $y = y'd$, $p = p'd$, où

$$(x', p') = (y', p') = 1,$$

on a, en particulier

$$x' = ky' + ap' \qquad \text{et} \qquad (k, p') = 1,$$

sans quoi $(x', p') \neq 1$.

De là,

$$x' = (k + tp')b' + (a - tb')p',$$
$$x \equiv \lambda p \qquad (\bmod p).$$

Il suffit de prouver qu'on peut déterminer t tel que $\lambda = k + tp'$ soit premier avec p. [D'où il résultera que $\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{y}$, $\bar{\lambda}$ étant une unité de $N/(p)$.]

Posons

$$D(t) = (k + tp', p'd) = (k + tp', d)$$

L'égalité résulte de ce que les diviseurs de p' ne peuvent diviser $k + tp'$.

Soient $(k, d) = u$; $d = d'vu$ où v désigne le produit des facteurs premiers de $d'v = \dfrac{d}{u}$ qui divisent u. Il est clair que

$$(d', v) = 1, \qquad (d', uv) = 1, \qquad (d', k) = 1.$$

Pour $t = d'$, on a

$$D(d') = (k + d'p', d'vu).$$

Tout diviseur premier de $D(d')$ divise soit vu soit d'. Mais un diviseur de vu divise k et ne divise pas $d'p'$; et un diviseur de d' divise $d'p'$ et ne divise pas k. Donc

$$D(d') = 1.$$

Pour ce choix $t = d'$, λ est premier avec p.

Il est facile de chercher la condition pour que l'anneau $N/(p)$ soit strictement indexable : il faut et il suffit pour cela que deux classes $\{\bar{x}\}$, $\{\bar{y}\}$ soient toujours comparables.

a. Si $p = a^n$ où a est un nombre premier, deux éléments x et y non premiers avec p, sont de la forme

$$x = Aa^k, \qquad y = Ba^h \qquad (h < k).$$

A et B étant premiers avec a, donc avec p. On a visiblement

$$Bx = ABa^k = A(Ba^h)a^{k-h} = uy,$$

d'où, puisque B est premier avec p :

$$\bar{x} = \bar{B}^{-1}\bar{u}.\bar{y} = \bar{b}.\bar{y}.$$

$\{\bar{x}\}$ et $\{\bar{y}\}$ sont donc comparables.

b. Si $p = ab$, a et b étant premiers entre eux ; pour $x = a$, $y = b$ aucune des équations en $\bar{z}$,

$$\bar{x}.\bar{z} = \bar{y}, \qquad \bar{y}.\bar{z} = \bar{x}$$

n'est résoluble, puisque, par exemple a divise x et p mais ne divise pas y. De là, le résultat suivant :

L'anneau $N/(p)$ est indexable; il est à index strict si et seulement si p est la puissance d'un nombre premier.

DEUXIÈME PARTIE.

2.1. Dans un anneau indexable $\mathfrak{A}$ si un idéal bilatère $\mathfrak{B}$ contient un élément x il contient toute la classe de transitivité $\{x\}$; et si $\mathfrak{A}$ est strictement indexable, $\mathfrak{B}$ contient toutes les classes de transitivité d'index inférieur à l'index de x. Par suite, de deux choses l'une, ou $\mathfrak{B}$ contient tous les éléments différents des unités (on suppose naturellement que $\mathfrak{B}$ n'est pas confondu avec l'idéal unité), ou $\mathfrak{B}$ contient un index maximum fini.

La condition de chaîne descendante et la condition de chaîne ascendante ne

sont pas en général vérifiées pour les idéaux bilatères, sauf dans le cas trivial où l'anneau $\mathfrak{A}$ est à index fini.

Si l'anneau $\mathfrak{A}$ est strictement indexable et à index fini, tout idéal bilatère $\mathfrak{B}$ est principal et peut être engendré par l'un quelconque des éléments d'index maximum dans $\mathfrak{B}$. En particulier, tout anneau commutatif strictement indexable et à index fini est un anneau à idéaux principaux. Il en est ainsi des anneaux $\mathrm{N}/(p)$ où p est la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre premier.

Il est facile de voir que dans un anneau indexable commutatif quelconque tout élément distinct d'une unité est diviseur de zéro. En effet, soit x un élément distinct d'une unité, p son index (qui est fini); les éléments de la suite

$$x^2, \quad x^3, \quad x^4, \quad \ldots, \quad x^n, \quad \ldots$$

ont tous un index inférieur ou au plus égal à p. Par suite, de deux choses l'une, ou $x^n = 0$ pour un certain entier n, ou tous les éléments de la suite précédente ont même index (non nul) à partir d'un certain rang. Dans le premier cas $x^n = 0$ donne $x.x^{n-1} = 0$; dans le second cas, il existe une unité λ de $\mathfrak{A}$ et un entier n tels que $x^n = \lambda x^{n+1}$, c'est-à-dire $(1 - \lambda x)x^{n-1}x = 0$. L'élément x est bien un diviseur de zéro.

Il résulte de là qu'un anneau d'intégrité qui ne soit pas un corps n'est pas indexable.

2.2. Extension d'un anneau indexable. — Étant donné un anneau indexable $\mathfrak{A}$, je me propose de construire un anneau indexable $\mathfrak{A}^*$ comprenant $\mathfrak{A}$ comme sous-anneau. Soit un second anneau indexable $\mathfrak{A}'$ (qui peut être identique à $\mathfrak{A}$). Soit $x^* = (x, x')(x \in \mathfrak{A}, x' \in \mathfrak{A}')$ un élément de l'ensemble-produit $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$. Définissons dans cet ensemble l'addition et la multiplication par les lois

$$(x, x') + (y, y') = (x + y, x' + y'),$$
$$(x, x').(y, y') = (x.y, x'.y').$$

Il est visible que l'ensemble $\mathfrak{A}^*$ est ainsi muni d'une structure d'anneau; l'identité dans $\mathfrak{A}^*$ est $(1, 1)$; λ^* est une unité si et seulement si λ et λ' sont des unités dans $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ respectivement. Je suppose essentiellement que $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ sont à index fini.

Je dis que $\mathfrak{A}^*$ est indexable. En effet $x^* = a^*y^*b^*$ entraîne à la fois

$$x = ayb \qquad \text{et} \qquad x' = a'y'b'.$$

Comme $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ sont des anneaux indexables, les relations simultanées

$$x^* = a^*y^*b^*, \qquad y^* = c^*x^*d^*$$

exigent que x^* et y^* appartiennent à une même classe de transitivité relative au groupe $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$. D'après le paragraphe 1.1 cette condition suffit pour

qu'on puisse munir l'ensemble des classes $\{x^*\}$ d'une structure d'ordre total satisfaisant aux axiomes A 1 et A 2. Reste à satisfaire à l'axiome A 3.

Soient p, p' les index de x, x' dans $x^* = (x, x')$ pour une certaine indexation de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$. La classe de transitivité $\{x\}$ est entièrement déterminée par la donnée de p et p', car $x^* = (x, x')$ et $(y^* = y, y')$ appartiennent à une même classe de transitivité si et seulement si x et y appartiennent à une même classe et x' et y' à une même classe.

Posons

$$\{x^*\} = [p, p']$$

et définissons la structure d'ordre total par

$$[p, p'] \prec [q, q']$$

si l'on a l'une des éventualités suivantes :

$a.$ $\quad p + p' < q + q';$

$b.$ $\quad p + p' = q + q', \quad$ avec $\quad p < q.$

Il est clair qu'on a ainsi une structure d'ordre total satisfaisant aux axiomes A 1 et A 2. Ainsi les premières classes sont :

$$[0, 0] \prec [0, 1] \prec [1, 0] \prec [0, 2] \prec [1, 1] \prec [2, 0] \prec [0, 3] \prec [1, 2], \quad \ldots.$$

On voit immédiatement qu'entre la classe $[0, 0]$ et la classe $[p, p']$ il y a un nombre fini de classes.

Ceci prouve que la structure d'ordre considérée satisfait à l'axiome A 3. L'anneau $\mathfrak{A}^*$ est donc indexable.

Cette structure d'ordre n'est évidemment pas unique quel que soit l'anneau $\mathfrak{A}$ considéré puisque deux classes telles que $[0, 1]$ et $[1, 0]$ ne sont pas comparables au sens du paragraphe 1.1.

L'ensemble des éléments $(x, 0)$ forme visiblement un sous-anneau de $\mathfrak{A}^*$ isomorphe à $\mathfrak{A}$. On a ainsi une extension de l'anneau indexable $\mathfrak{A}$.

On généralise sans peine au cas de l'ensemble-produit $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$ de k anneaux indexables.

Comme application, considérons un anneau semi-simple (anneau sans radical vérifiant la condition de chaîne descendante pour les idéaux unilatères), somme directe de k idéaux bilatères simples

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k.$$

Si chacun des idéaux $\mathfrak{A}_i$ qui est un sous-anneau de $\mathfrak{A}$ est un anneau indexable, $\mathfrak{A}$ est lui-même indexable. En effet, l'ensemble-produit $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \mathfrak{A}_k$ muni comme précédemment de la structure d'anneau par les opérations

$$(x_1, \ldots, x_k) + (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k),$$
$$(x_1, \ldots, x_k) \cdot (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 \cdot y_1, \ldots, x_k \cdot y_k)$$

est visiblement isomorphe à $\mathfrak{A}$ puisque $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_j (i \neq j)$ s'annihilent mutuellement. Comme on sait que tout anneau simple, non nilpotent ($\mathfrak{A}^2 \neq 0$) est isomorphe à un anneau de matrices carrées d'ordre fini construites sur un corps gauche, anneau qui est indexable d'après le paragraphe 1.4, il résulte que :

Tout anneau semi-simple est indexable, et l'indexation n'est pas stricte.

Si donc un anneau strictement indexable n'est pas un anneau simple, il ne peut être non plus semi-simple.

Remarque. — La démonstration précédente suppose essentiellement que les index des anneaux $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ sont finis. S'il en était autrement, l'axiome A 3 ne serait plus satistait, quelle que soit la relation d'ordre total qu'on puisse établir entre les classes de transitivité de l'anneau $\mathfrak{A}^\star$.

En effet, supposons que l'index de $\mathfrak{A}$ ne soit pas fini. L'élément $(1, 0)$ (où 1 désigne l'identité dans $\mathfrak{A}$ et $0 \in \mathfrak{A}'$) n'est pas une unité dans $\mathfrak{A}^\star$. Si $\mathfrak{A}^\star$ était indexable, il n'existerait entre la classe $\{(0, 0)\}$ et la classe $\{(1, 0)\}$ qu'un nombre fini de classes. Or les éléments $(x, 0)(y, 0)$ n'appartiennent pas à une même classe dans $\mathfrak{A}^\star$ si x, y n'appartiennent pas à une même classe dans $\mathfrak{A}$. Toute classe $\{(x, 0)\}$ est comparable à la classe $\{(1, 0)\}$ car $(x, 0) = (x, 0).(1, 0)$. Pour toute indexation admissible de $\mathfrak{A}^\star$ on doit avoir $\{(x, 0)\} \prec \{(1, 0)\}$. Comme il y a une infinité de classes telles que $\{(x, 0)\}$ par hypothèse, l'anneau $\mathfrak{A}^\star$ n'est pas indexable.

Ainsi :

Un anneau indexable qui n'est pas à index fini n'est pas décomposable en somme directe de plusieurs anneaux séparément indexables.

2.3. Sous-anneau indexable. — Soit $\mathfrak{A}$ un anneau indexable, $\mathfrak{B}$ un idéal bilatère, admettant, en tant que sous-anneau, une identité e (qui n'est pas égale à l'identité de $\mathfrak{A}$). Je me propose de montrer que $\mathfrak{B}$ considéré comme anneau est indexable.

Soit ξ une unité dans $\mathfrak{B}$, η son inverse :

$$\xi\eta = e, \qquad \xi e = \xi.$$

Ces égalités montrent que dans l'anneau $\mathfrak{A}$, ξ appartient à la même classe de transitivité que e. Réciproquement, je dis que tout élément de $\mathfrak{A}$ appartenant à la même classe que e appartient à $\mathfrak{B}$ et est une unité dans $\mathfrak{B}$. En effet, soit

$$f = \lambda e \lambda^{-1} \in \mathfrak{B} \qquad (\lambda \text{ unité dans } \mathfrak{A}).$$

Pour tout $x \in \mathfrak{B}$, on a

$$xf = x\lambda e\lambda^{-1} = (x\lambda) e\lambda^{-1} = x\lambda\lambda^{-1} = x,$$
$$fx = \lambda e\lambda^{-1} x = \lambda e(\lambda^{-1} x) = \lambda\lambda^{-1} x = x.$$

Comme l'identité est unique dans tout anneau :

$$f = e \qquad \text{et} \qquad e\lambda = \lambda e;$$

l'identité e de $\mathfrak{B}$ est commutable avec toute unité de $\mathfrak{A}$. Soit ξ un élément de $\mathfrak{A}$ appartenant à la même classe que e :

$$\xi = \lambda e \mu = \lambda \mu e = \nu e = e\nu.$$

ξ appartient à $\mathfrak{B}$ et la classe $\{e\}$ dans $\mathfrak{A}$ est composée des éléments de la forme $e\lambda = \lambda e$ où λ est une unité de $\mathfrak{A}$. Si donc $\xi = \lambda e$, $\eta = e\lambda^{-1}$, on a

$$\xi\eta = \lambda e e \lambda^{-1} = \lambda e \lambda^{-1} = \lambda\lambda^{-1} e = e.$$

Tout élément de $\{e\}$ est donc bien une unité dans $\mathfrak{B}$.

Le groupe $\mathfrak{H}$ agissant sur l'anneau $\mathfrak{B}(x \to \xi x \eta$ où ξ et η sont deux unités de $\mathfrak{B})$ fournira, à partir de l'élément $x \in \mathfrak{B}$ la classe de transitivité

$$\{x\} = \{\lambda e x e \mu\} = \{\lambda x \mu\}$$

qui coïncide avec la classe de transitivité de x relative au groupe $\mathfrak{G}$ agissant sur $\mathfrak{A}$.

D'autre part, dans $\mathfrak{B}$ les relations

$$x = ayb, \qquad y = cxd \qquad (a, b, c, d \in \mathfrak{B})$$

entraînent les mêmes dans $\mathfrak{A}$, par suite x et y appartiennent à une même classe de transitivité relative au groupe $\mathfrak{G}$ c'est-à-dire au groupe $\mathfrak{H}$. Comme l'axiome A3 est visiblement satisfait pour toute relation d'ordre total entre les classes $\{x\}$ induite dans $\mathfrak{B}$ par une relation d'ordre dans $\mathfrak{A}$, l'idéal bilatère $\mathfrak{B}$ considéré comme anneau est indexable.

Remarque. — Il est facile de montrer que l'identité e de $\mathfrak{B}$ appartient au centre de l'anneau $\mathfrak{A}$. En effet, pour tout $x \in \mathfrak{A}$, ex comme xe appartiennent à $\mathfrak{B}$. D'où

$$ex = (ex)e = e(xe) = xe.$$

Si l'on pose $e' = 1 - e$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}e'\mathfrak{A}$, un calcul évident montre que l'idéal bilatère $\mathfrak{B}'$ admet e' comme identité, que les deux idéaux bilatères $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ s'annihilent mutuellement et enfin que l'anneau $\mathfrak{A}$ donné est la somme directe de $\mathfrak{B}$ et de $\mathfrak{B}'$.

Ce résultat, joint à celui qui a été obtenu au paragraphe précédent montre que dans un anneau indexable qui n'est pas à index fini, aucun idéal bilatère ne peut posséder une identité.

Si l'on remarque que tout élément idempotent appartenant au centre d'un anneau engendre un idéal bilatère admettant cet élément idempotent comme identité, le résultat précédent peut encore s'énoncer comme suit :

Un anneau indexable $\mathfrak{A}$ ne peut admettre d'élément central idempotent (autre que 0 et 1) que si $\mathfrak{A}$ est à index fini et non strict.

2.4. Anneau quotient d'un anneau indexable. — Soient $\mathfrak{A}$ un anneau indexable, $\varphi(x)$ une fonction index dans une certaine indexation, $\mathfrak{B}$ un idéal bilatère de $\mathfrak{A}$. Je dis que l'anneau quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{A}}$ est indexable. La classe résiduelle $\overline{1}$ de l'identité 1 de $\mathfrak{A}$ est l'identité de $\overline{\mathfrak{A}}$. $\bar{x}$ étant la classe résiduelle de x, soit la fonction

$$\Phi(\bar{x}) = \operatorname{Min}\varphi(x+\mathfrak{B}).$$

$\Phi(\bar{x}) = 0$ si et seulement si la classe résiduelle de x contient 0, c'est-à-dire si $x \in \mathfrak{B}$ ou encore $\bar{x} = \bar{0}$.

$$\Phi(\bar{x}.\bar{y}) = \operatorname{Min}\varphi(xy+\mathfrak{B}).$$

Soit b un élément de $\mathfrak{B}$ réalisant le minimum et t un élément *arbitraire* de $\mathfrak{B}$.

$$\Phi(\bar{x}.\bar{y}) = \varphi(xy+b) \leq \varphi(xy+ty) = \varphi[(x+t)y] \leq \varphi(x+t);$$

comme t est arbitraire dans $\mathfrak{B}$:

$$\Phi(\bar{x}.\bar{y}) \leq \operatorname{Min}\varphi(x+\mathfrak{B}) = \Phi(\bar{x}).$$

Ensuite si $\Phi(\bar{x}) = \Phi(\bar{y})$, où

$$\operatorname{Min}\varphi(x+\mathfrak{B}) = \operatorname{Min}\varphi(y+\mathfrak{B}),$$

on peut trouver $b, c \in \mathfrak{B}$ tels que

$$\varphi(x+b) = \varphi(y+c),$$

donc un couple d'unités $\lambda, \mu \in \mathfrak{A}$ tels que

$$y+c = \lambda(x+b)\mu; \qquad y - \lambda x \mu \in \mathfrak{B};$$

donc $\bar{y} = \bar{\lambda}.\bar{x}.\bar{\mu}$ où $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ représentent deux unités de $\overline{\mathfrak{A}}$.

Réciproquement, il est clair que $\bar{y} = \bar{\lambda}.\bar{x}.\bar{\mu}$ entraîne $\Phi(\bar{x}) = \Phi(\bar{y})$ puisque $\Phi(\bar{y}) \leq \Phi(\bar{x})$ et en écrivant $\bar{x} = \bar{\lambda}^{-1}.\bar{y}.\bar{\mu}^{-1}$ on obtient de même $\Phi(\bar{x}) \leq \Phi(\bar{y})$.

En conséquence, les classes de transitivité de $\overline{\mathfrak{A}}$ relatives au groupe $\overline{\mathfrak{G}}$ peuvent être munies de la relation d'ordre total fournie par l'application $\{\bar{x}\} \to \Phi(\{\bar{x}\}) = \Phi(\bar{x})$. Cette relation d'ordre satisfait visiblement aux axiomes A 1, A 2 et A 3. L'anneau quotient est indexable.

Remarque. — Si l'idéal bilatère $\mathfrak{B}$ est nilpotent ($\mathfrak{B}^s = 0$,), dès qu'une classe résiduelle de $\overline{\mathfrak{A}}$, soit $\bar{\lambda}$, comporte une unité, elle est composée entièrement d'unités de $\mathfrak{A}$. En effet, de $\bar{\lambda}.\bar{\mu} = \bar{1}$ on déduit, pour tout λ de la classe résiduelle $\bar{\lambda}$, et tout μ de la classe résiduelle $\bar{\mu}$:

$$\lambda\mu = 1 + x \qquad (x \in \mathfrak{B})$$

et

$$(1+x)(1-x+x^2-x^3+\dots) = 1 - x^s = 1.$$

Donc $1+x$ est une unité et il en est de même de λ.

TROISIÈME PARTIE.

3.1. Classe minimale. Noyau. — Soit $\mathfrak{A}$ un anneau indexable, soit $\{a\}$ la classe d'index 1 dans une certaine indexation; je l'appelle classe minimale de $\mathfrak{A}$. Un élément quelconque de cette classe est appelé élément minimal et l'idéal bilatère $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}a\mathfrak{A}$ engendré par un tel élément minimal a est appelé un noyau de $\mathfrak{A}$. Le noyau $\mathfrak{N}$ contient évidemment toute la classe minimale $\{a\}$. On verra qu'un noyau $\mathfrak{N}$ peut contenir d'autres classes minimales que $\{a\}$; afin d'éviter des confusions, j'appelle classe minimale principale de $\mathfrak{N}$ la classe $\{a\}$ qui engendre effectivement $\mathfrak{N}$.

Un anneau indexable possédant une seule classe minimale est appelé anneau uninodulaire; un anneau strictement indexable est uninodulaire.

Quand un anneau indexable possède plusieurs classes minimales, ces classes ne sont pas comparables deux à deux.

3.2. Théorème. — *Toute classe $\{x\}$ non comparable à une classe minimale $\{a\}$ est elle-même minimale ou comparable à une autre classe minimale $\{b\}$ différente de $\{a\}$.*

a. Si dans l'indexation considérée, aucune classe placée avant $\{x\}$ n'est comparable à $\{x\}$, la classe $\{x\}$ est visiblement minimale, car la relation d'ordre total :

$$\{0\} \prec \{x\} \prec \{a\} \prec \dots$$

se déduisant de l'indexation donnée par placement de $\{x\}$ entre $\{0\}$ et $\{a\}$, les places relatives des autres classes restant inchangées, vérifie les axiomes A 1, A 2 et A 3.

b. S'il existe une classe $\{b\}$ placée avant $\{x\}$ et comparable à $\{x\}$, $\{b\}$ n'est pas comparable à $\{a\}$ autrement $\{a\}$ et $\{x\}$ seraient comparables. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\{b\}$ est la « première » classe (de gauche à droite) non comparable à $\{a\}$. $\{b\}$ est alors minimale d'après ce qui précède.

3.3. Théorème. — *Soient $\mathfrak{B}$ un idéal bilatère, $\mathfrak{N}$ un noyau quelconque d'un anneau indexable $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{N}$ n'est pas inclus dans $\mathfrak{B}$,* on a

$$\mathfrak{N}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{N} = 0, \qquad (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B})^2 = 0.$$

En effet, soient x un élément quelconque de $\mathfrak{B}$, a un élément minimal principal de $\mathfrak{N}$; ax (resp. xa) est minimal ou nul. Si ax (resp. xa) n'est pas nul, on peut trouver deux unités $\lambda\mu$ de $\mathfrak{A}$ telles que

$$a = \lambda(ax)\mu \qquad [\text{resp. } \lambda(xa)\mu];$$

donc $a \in \mathfrak{B}$, par suite $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{B}$. Si $ax = xa = 0$ pour tout a minimal principal de $\mathfrak{N}$ et tout $x \in \mathfrak{B}$, on a visiblement

$$\mathfrak{N}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{N} = 0.$$

Dans ce dernier cas si

$$x, y \in \mathfrak{B}; \qquad x, y \in \mathfrak{N},$$
$$xy \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{N} = 0,$$

on a

$$xy \in \mathfrak{B}\mathfrak{N} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{N})^2 = 0.$$

Conséquences. — *a.* Tout idéal bilatère $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{N}$ et non identique à $\mathfrak{N}$ est nilpotent et

$$\mathfrak{B}^2 = 0.$$

b. Si $\mathfrak{A}$ possède deux noyaux différents $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$,

$$\mathfrak{N}\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'\mathfrak{N} = 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}')^2 = 0.$$

c. Si deux noyaux différents $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ ont une intersection non nulle, ou bien l'un est inclus dans l'autre, par exemple $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N}^2 = 0$, on bien il existe un troisième noyau $\mathfrak{N}''$ nilpotent ($\mathfrak{N}''^2 = 0$) inclus dans $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ à la fois.

Les deux premières conséquences sont immédiates, pour la troisième, soit $x \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$ ($x \neq 0$), x ne peut être comparable à la classe minimale principale de $\mathfrak{N}$ et à la classe minimale principale de $\mathfrak{N}'$ à la fois, car s'il en était ainsi, l'idéal bilatère $\mathfrak{A}x\mathfrak{A}$ contient $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ et comme $\mathfrak{A}x\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$, on aurait

$$\mathfrak{A}x\mathfrak{A} = \mathfrak{N} = \mathfrak{N}',$$

donc ou bien $\{x\}$ est comparable à la classe minimale principale $\{a\}$ de $\mathfrak{N}$ et

$$\mathfrak{A}x\mathfrak{A} = \mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}',$$

ou bien $\{x\}$ n'est comparable ni à la classe minimale principale de $\mathfrak{N}$ ni à celle de $\mathfrak{N}'$ et d'après le théorème du paragraphe 3.2, $\{x\}$ est comparable à une troisième classe minimale $\{a''\}$ qui engendre un noyau $\mathfrak{N}''$ et

$$\mathfrak{N}'' \subseteq \mathfrak{A}x\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'; \qquad \mathfrak{N}''^2 = 0.$$

3.4. Théorème. — *Si un noyau $\mathfrak{N}$ d'un anneau indexable $\mathfrak{A}$ n'est pas idempotent, il est nilpotent et de carré nul,* $\mathfrak{N}^2 = 0$.

En effet, on a

$$\mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{N},$$

si $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}^2$ est différent de $\mathfrak{N}$, d'après le théorème du 3.3,

$$\mathfrak{B}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^3 = 0,$$

$\mathfrak{N}$ est donc nilpotent.

Je dis que $\mathfrak{N}^2 = 0$. En effet, soient a, b deux éléments minimaux principaux arbitraires de $\mathfrak{N}$; il suffit de prouver que le produit $ab = 0$.

Supposons $ab \neq 0$, le produit ab est évidemment un élément minimal principal de $\mathfrak{N}$. Donc on peut trouver deux unités $\lambda\mu$ telles que $a = \lambda ab\mu$, d'où

$$ab = \lambda ab\mu b = (\lambda a)b(\mu b);$$

le dernier produit appartient à $\mathfrak{N}^3$, donc $ab = 0$.

La supposition $ab \neq 0$ conduit ainsi à une contradiction.

Remarque. — S'il existe un seul élément minimal principal de $\mathfrak{N}$ tel que $a\mathfrak{N} = 0$, on peut affirmer que le noyau $\mathfrak{N}$ est nilpotent. Car $a\mu\mathfrak{N} \subseteq a\mathfrak{N} = 0$ pour toute unité μ, donc $\lambda a\mu\mathfrak{N} = 0$ pour tout couple d'unités, c'est-à-dire $b\mathfrak{N} = 0$ pour tout élément minimal principal de $\mathfrak{N}$.

3.5. Idéaux nilpotents. — Dans un anneau uninodulaire, toute classe $\{x\}$ est comparable à la classe minimale $\{a\}$. Donc tout idéal bilatère contient le noyau $\mathfrak{N}$ et ce noyau peut être engendré par n'importe lequel de ses éléments, c'est un idéal bilatère minimal.

Dans un anneau indexable quelconque, tout idéal bilatère contient au moins un noyau puisque tout élément est comparable à un élément minimal.

En particulier, un idéal bilatère nilpotent contient au moins un noyau, lequel, étant nilpotent, est de carré nul.

Soit, dans un anneau indexable $\mathfrak{A}$, un anneau bilatère nilpotent $\mathfrak{I}$ ($\mathfrak{I}^s = 0$). Soit $\mathfrak{N}$ un noyau *non inclus dans* $\mathfrak{I}$. Considérons une indexation dans laquelle la classe minimale principale $\{a\}$ de $\mathfrak{N}$ a pour index 1. Je dis que tout élément d'index p annihile la puissance $p^{\text{ième}}$ de l'idéal $\mathfrak{I}$:

La propriété est vraie pour les éléments d'index 1 ; supposons-la vraie jusqu'aux éléments d'index $p-1$. Soient u un élément quelconque d'index p, x un élément arbitraire de $\mathfrak{I}$; le produit ux (resp. xu) est d'index p au plus ; s'il est d'index p, on peut trouver deux unités $\lambda\mu$ telles que

$$u = \lambda ux\mu = \lambda uk; \qquad k = x\mu \in \mathfrak{I}$$

puis

$$u = \lambda^2 uk^2 = \ldots = \lambda^s uk^s = 0,$$

ceci est absurde, par suite le produit ux est d'index $p-1$ au plus, ux (resp. xu) annihile la puissance $(p-1)^{\text{ième}}$ de $\mathfrak{I}$ en d'autres termes u annihile la puissance $p^{\text{ième}}$ de $\mathfrak{I}$.

Dans le cas particulier où l'anneau $\mathfrak{A}$ est à index fini n, tout idéal bilatère nilpotent ne contenant pas tous les noyaux vérifie $\mathfrak{I}^s = 0$ avec $s \leq n$, et il existe une indexation dans laquelle la puissance $(p+1)^{\text{ième}}$ d'un élément d'index p de ce même idéal bilatère nilpotent est nulle.

3.6. Annihilateur d'un noyau. — Soit un ensemble B quelconque d'un anneau $\mathfrak{A}$. Appelons $\mathfrak{F}(B)$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{A}$ tels que $xB = Bx = o$. Dans le cas général $\mathfrak{F}(B)$ n'est pas un idéal; mais si $B = \mathfrak{B}$ est un idéal bilatère, $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ est aussi un idéal bilatère puisque

$$x\mathfrak{B} = \mathfrak{B}x = o, \qquad y\mathfrak{B} = \mathfrak{B}y = o$$

entraînent visiblement

$$(x+y)\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(x+y) = o$$

et

$$kx\mathfrak{B} = o; \qquad \mathfrak{B}kx = (\mathfrak{B}k)x \subseteq \mathfrak{B}x = o,$$
$$\mathfrak{B}xk = o; \qquad xk\mathfrak{B} = x(k\mathfrak{B}) \subseteq x\mathfrak{B} = o.$$

L'idéal bilatère $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$ s'appellera annihilateur du noyau $\mathfrak{N}$. Cet idéal est évidemment inclus dans l'intersection de l'idéal à gauche, annihilateur (à gauche) et de l'idéal à droite, annihilateur (à droite) de $\mathfrak{N}$. Soient $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ et $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ ces idéaux unilatères.

Posons encore

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{N}) = \{x \mid x \in \mathfrak{A};\ \mathfrak{N} \not\subseteq \mathfrak{A}x\mathfrak{A}\}$$

(ensemble des $x \in \mathfrak{A}$ tels que $\mathfrak{N}$ ne soit pas inclus dans l'idéal bilatère engendré par x).

Théorème. — *Si le noyau $\mathfrak{N}$ n'est pas nilpotent, on a*

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{E}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{N}).$$

Soit $x \in \mathfrak{C}(\mathfrak{N})$, si $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}x\mathfrak{A}$, tout élément $a \in \mathfrak{N}$ s'écrit $a = \sum bxc$, et si l'on prend un autre élément a' de $\mathfrak{N}$, on a

$$aa' = \sum (bx)(ca');$$

comme $bx \in \mathfrak{C}$, $ca' \in \mathfrak{N}$,

$$aa' \in \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\mathfrak{N}, \qquad \text{donc} \quad aa' = o,$$

c'est-à-dire $\mathfrak{N}^2 = o$, ce qui est contraire à l'hypothèse, par suite $x \in \mathfrak{E}(\mathfrak{N})$.

On montre de même que tout élément de $\mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ appartient à $\mathfrak{E}(\mathfrak{N})$.

Ensuite tout élément x appartenant à $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ vérifie $x\mathfrak{N} = \mathfrak{N}x = o$. Le théorème en résulte.

Remarques. — A. $\mathfrak{E}(\mathfrak{N})$ contient tous les noyaux différents de $\mathfrak{N}$ si $\mathfrak{N}$ n'est pas nilpotent et contient également $\mathfrak{N}$ si $\mathfrak{N}$ est nilpotent.

B. Si $\mathfrak{N}$ est nilpotent; l'intersection $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{N})$ qui n'est pas un idéal en général) contient l'ensemble $\mathfrak{E}(\mathfrak{N})$, donc tous les noyaux de l'anneau.

C. Quel que soit $\mathfrak{N}$, un élément $x \in \mathfrak{E}(\mathfrak{N})$ n'est pas comparable à la classe minimale principale de $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{E}(\mathfrak{N})$ est composé uniquement de classes non comparables à la classe minimale principale de $\mathfrak{N}$.

3.7. Les noyaux dans la décomposition de $\mathfrak{A}$. — Soit un anneau quelconque possédant une identité. Supposons qu'on puisse décomposer $\mathfrak{A}$ en une somme directe de k idéaux bilatères :

$$\mathfrak{A} = \sum_{p=1}^{k} \oplus \mathfrak{A}_p.$$

On sait que chaque $\mathfrak{A}_p$ considéré comme sous-anneau possède également une identité. Si donc l'anneau $\mathfrak{A}$ est indexable, d'après le résultat du paragraphe 2.3 chaque anneau $\mathfrak{A}_p$ est indexable et $\mathfrak{A}$ est à index fini.

Un idéal bilatère de l'anneau $\mathfrak{A}_p$ est aussi idéal bilatère dans l'anneau $\mathfrak{A}$ car

$$\mathfrak{A}_p x \mathfrak{A}_p = \mathfrak{A} x \mathfrak{A} \qquad \text{si} \quad x \in \mathfrak{A}_p$$

puisque $\mathfrak{A}_p$ annihile tous les $\mathfrak{A}_q (q \neq p)$.

Je dis que toute classe minimale dans $\mathfrak{A}_p$ est aussi une classe minimale dans $\mathfrak{A}$. En effet, soit x une telle classe; si elle n'est pas minimale dans $\mathfrak{A}$, on peut trouver une classe minimale $\{y\} \in \mathfrak{A}$ telle que $y = axb$. Donc $\mathfrak{A}_p$ contient y et dans $\mathfrak{A}_p$ on aura une relation de la forme $y = a' x b'$, égalité qui exprime ou bien que x et y sont de la même classe dans $\mathfrak{A}_p$, par suite dans $\mathfrak{A}$, ce qui est impossible, ou bien que x n'est pas minimale dans $\mathfrak{A}_p$, ce qui contredit l'hypothèse.

Il résulte de ce qui précède que tout noyau de $\mathfrak{A}_p$ est un noyau de $\mathfrak{A}$.

Réciproquement soit $\mathfrak{N}$ un noyau de $\mathfrak{A}$. On sait qu'on peut le décomposer d'une façon unique en somme directe d'idéaux bilatères contenus dans les $\mathfrak{A}_p$, soit

$$\mathfrak{N} = \sum_{p=1}^{k} \oplus \mathfrak{M}_p.$$

Je dis que $\mathfrak{M}_p$, s'il n'est pas nul, est un noyau de $\mathfrak{A}_p$. Écartons le cas banal où tous les $\mathfrak{M}_q (q \neq p)$ sont nuls. Si a est un élément minimal principal de $\mathfrak{N}$:

$$a = a_1 + \ldots + a_p + \ldots + a_k.$$

On a

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A} x \mathfrak{A} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}_p = \mathfrak{A} a_p \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_p a_p \mathfrak{A}_p.$$

Si a_p n'est pas minimal dans $\mathfrak{A}_p$, il existe un élément (minimal) $b_p \in \mathfrak{A}_p$ et appartenant à une classe différente de a_p tel que

$$b_p = c_p a_p d_p \neq 0, \qquad c_p d_p \in \mathfrak{A}_p.$$

Dans $\mathfrak{A}$, a_p, b_p appartiennent à deux classes différentes. Visiblement

$$b_p = c_p (a_p + a_1 + \ldots) d_p = c_p a \, dp,$$

égalité qui exige, puisque a est minimal dans $\mathfrak{A}$, que $b_p = 0$ appartienne à la

même classe que a; par suite $\mathfrak{A}_p$ contient $\mathfrak{N}$, c'est-à-dire $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_p$, cas qui a été écarté.

Par suite a_p est bien minimal dans $\mathfrak{A}_p$ et $\mathfrak{M}_p$ est bien un noyau dans $\mathfrak{A}_p$ et par suite dans $\mathfrak{A}$.

Si donc $\mathfrak{N}$ peut se décomposer en au moins deux composantes différentes de zéro, ces composantes sont des noyaux nilpotents et leur somme directe, c'est-à-dire $\mathfrak{N}$, est aussi un noyau nilpotent. On voit aussi qu'un noyau nilpotent n'est décomposable que s'il contient au moins deux autres noyaux nilpotents différents de lui-même.

3.8. Décomposition. — Dans ce qui suit, je suppose que l'anneau indexable est à index fini et je me propose de chercher les conditions de la décomposition en somme directe d'idéaux bilatères indexables.

J'utilise ici une forme légèrement modifiée d'une propriété classique :

Théorème. — *Tout anneau possédant une identité est décomposable en somme directe d'au moins deux idéaux bilatères si et seulement si l'anneau possède au moins un idéal bilatère contenant une identité, un tel anneau est complètement réductible si et seulement si chaque idéal bilatère possède une identité.*

(La notion de complète réductibilité est prise dans le sens de complète réductibilité du treillis modulaire des idéaux bilatères.)

Il suffit de reprendre une décomposition déduite de celle de Pierce pour tout élément u de l'anneau

$$u = (u - ue - eu + eue) + (ue + eu - eue),$$

où e est l'identité de l'idéal bilatère $\mathfrak{B}$. On vérifie immédiatement que

$$(u - ue - eu + eue) \in \mathfrak{f}(\mathfrak{B}),$$

d'où

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{f}(\mathfrak{B}).$$

La deuxième partie du théorème est manifeste.

Dans un anneau indexable complètement réductible, aucun noyau n'est nilpotent; chaque noyau est idéal principal à gauche et à droite; un idéal bilatère contenant p noyaux donnés, à l'exclusion d'autres noyaux, est identique à la somme directe de ces p noyaux.

La remarque suivante est utile :

Dans un anneau $\mathfrak{A}$ quelconque, un élément e est une identité pour un certain idéal bilatère si et seulement si e est un élément central idempotent.

On a vu au paragraphe 2.3 que si e est l'identité de l'idéal bilatère $\mathfrak{B}$, e est un élément central idempotent. Réciproquement si e est un élément central idempotent, l'idéal $\mathfrak{A}e = e\mathfrak{A}$ est bilatère, de même l'idéal $\mathfrak{A}(1-e) = (1-e)\mathfrak{A}$

et un calcul élémentaire montre que

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}e \oplus \mathfrak{A}(1-e).$$

Application. — Supposons qu'on ait une décomposition de la forme

$$\mathfrak{A} = \sum \oplus \mathfrak{A}_p$$

d'un anneau indexable en composantes uninodulaires. On sait que le centre $\mathfrak{Z}$ de l'anneau $\mathfrak{A}$ se décompose en

$$\mathfrak{Z} = \sum \oplus \mathfrak{Z}_p,$$

où $\mathfrak{Z}_p$ est le centre de $\mathfrak{A}_p$. Comme $\mathfrak{A}_p$ est uninodulaire, donc non décomposable, $\mathfrak{Z}_p$ ne contient comme idempotents que zéro et e_p (identité de $\mathfrak{A}_p$). Par suite $\mathfrak{Z}$ comporte en tout

$$1 + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{p} + \ldots + 1 = 2^k$$

idempotents (0 et 1 compris), puisque la somme de plusieurs éléments centraux idempotents est aussi un élément central idempotent. A chaque couple d'idempotents centraux e et $(1-e)$, il correspond une décomposition de la forme

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}e \oplus \mathfrak{A}(1-e).$$

On sait d'autre part que la décomposition d'un anneau possédant une identité en somme directe de k idéaux bilatères indécomposables, si elle est possible, est unique. Comme un idéal bilatère uninodulaire est indécomposable en somme directe d'idéaux bilatères, il résulte que :

Si une décomposition d'un anneau indexable en somme directe de sous-anneaux uninodulaires est possible, elle est unique. Une condition nécessaire est évidemment que l'anneau indexable comporte seulement k noyaux deux à deux « séparables » dans le sens $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q = 0$.

3.9. Décomposition d'un anneau commutatif indexable. — Comme la condition de chaîne descendante est vérifiée pour $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{A}$ ne comporte pas de noyaux nilpotents, il est sans radical, par suite, d'après le théorème de Dedekind, $\mathfrak{A}$ est décomposable en somme directe de corps commutatifs s'annihilant mutuellement. Il résulte de là que tout anneau commutatif comporte au moins un noyau nilpotent ou bien se réduit à une somme directe de corps commutatifs s'annihilant mutuellement.

Comme la condition de chaîne ascendante est aussi vérifiée (l'anneau est à index fini), si $\mathfrak{R}$ est le radical de $\mathfrak{A}$, l'anneau quotient $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ est un anneau commutatif indexable sans radical, donc $\overline{\mathfrak{A}}$ est la somme directe de corps commutatifs s'annihilant mutuellement.

Ainsi l'anneau $N/(p)$, où p est le produit d'un certain nombre de facteurs premiers non égaux, est sans radical (puisque aucun élément non nul n'est nilpotent). Dès que deux des facteurs premiers de p sont égaux, l'anneau $N/(p)$ possède un radical.

3.10. Lemme. — *Étant donné un anneau $\mathfrak{A}$ possédant une identité, tout idéal bilatère idempotent $\mathfrak{B}$ qui est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite engendré par* un même élément ξ *possède une identité.*

Démonstration. — Soit

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\xi = \xi\mathfrak{A}.$$

On a

$$\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\xi) = (\mathfrak{B}\mathfrak{A})\xi = \mathfrak{B}\xi = \xi\mathfrak{B}.$$

En particulier, il existe $e \in \mathfrak{B}$ tel que $\xi = e\xi$, d'où

$$(1-e)\xi = 0, \qquad (1-e)\xi\mathfrak{B} = (1-e)\mathfrak{B} = 0;$$

par suite $(1-e)e = 0$, l'élément e est idempotent. Puis pour tout $x \in \mathfrak{B}$, $(1-e)x = 0$, c'est-à-dire $x = ex$, l'élément e est une identité à gauche pour $\mathfrak{B}$. De même, de $\mathfrak{B} = \xi\mathfrak{B}$, on déduit l'existence d'une identité à droite pour $\mathfrak{B}$. Ces deux identités sont donc égales.

Théorème. — *Dans un anneau indexable $\mathfrak{A}$, tout idéal bilatère $\mathfrak{B}$ idempotent, qui est idéal principal à droite et idéal principal à gauche, possède une identité.*

On a

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\xi = \eta\mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\xi = \eta\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\xi = \eta\mathfrak{B}.$$

De là

$$\xi = \eta a, \qquad \eta = b\xi;$$

d'où il résulte que ξ et η ont même index. Il existe deux unités de $\mathfrak{A}$, soient $\lambda\mu$ telles que $\eta = \lambda\xi\mu$. Puis

$$\mathfrak{B} = \eta\mathfrak{B} = \lambda\xi\mu\mathfrak{B} = \lambda\xi(\mu\mathfrak{B}) = \lambda\xi\mathfrak{B}.$$

Donc soit $x \in \mathfrak{B}$ et comme $\lambda x \in \mathfrak{B}$, on a

$$\lambda x = \lambda\xi c \quad (c \in \mathfrak{B})$$

et puisque λ est une unité, $x = \xi c$, c'est-à-dire $x \in \xi\mathfrak{B}$.

Comme $\xi\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$, il résulte

$$\mathfrak{B} = \xi\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\xi.$$

L'idéal bilatère $\mathfrak{B}$ est engendré par le même élément, en tant qu'idéal principal à droite et idéal principal à gauche. Le lemme précédent fournit par suite le résultat annoncé.

Applications. — *a.* Un anneau uninodulaire est simple si et seulement si son noyau est idempotent et est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite

En effet si l'anneau indexable $\mathfrak{A}$ est simple, son noyau est identique à $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}.1 = 1.\mathfrak{A}$. Réciproquement si le noyau d'un anneau uninodulaire est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite, il possède une identité et est indexable ; on a donc

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{B}.$$

Comme $\mathfrak{A}$ est uninodulaire par hypothèse, $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}$. Comme $\mathfrak{N}$ est évidemment minimal, $\mathfrak{A}$ est simple.

b. Un anneau indexable $\mathfrak{A}$ est complètement réductible si et seulement si chaque noyau est idempotent et est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite.

La propriété résulte du théorème précédent ainsi que du théorème du paragraphe 3.8.

3.11. Décomposition d'un anneau indexable à noyaux idempotents. — Chaque noyau $\mathfrak{N}$ est un idéal bilatère principal engendré par l'un quelconque de ses éléments; car si $x \in \mathfrak{N}$ l'idéal $\mathfrak{A}x\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}$, si $\mathfrak{N}$ n'est pas inclus dans $\mathfrak{A}x\mathfrak{A}$, ce dernier contient un noyau $\mathfrak{N}'$ qui serait nilpotent, puisque inclus dans $\mathfrak{N}$. Il résulte aussi de là que tout noyau est un idéal bilatère minimal et que les noyaux sont deux à deux séparables.

L'idéal annihilateur d'un noyau $\mathfrak{N}$ ne contient pas ce noyau, car autrement $\mathfrak{N}$ serait nilpotent. L'idéal annihilateur de l'ensemble des noyaux est donc l'idéal nul.

Soient $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_k$ les noyaux de $\mathfrak{A}$. Désignons par $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \ldots, \mathfrak{N}_k)$ l'annihilateur de l'ensemble des noyaux d'indices $2, 3, \ldots, k$. Je dis qu'on a

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{N}_1) \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \ldots, \mathfrak{N}_k) = 0,$$
$$\mathfrak{L}(\mathfrak{N}_1) \,.\, \mathfrak{L}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \ldots, \mathfrak{N}_k) = 0.$$

En effet tout élément commun à ces deux idéaux annihile tous les noyaux, donc se réduit à zéro; ceci démontre la première égalité. Ensuite si x est un élément du premier idéal, y un élément du second, le produit xy est un élément commun à ces deux idéaux, donc se réduit à zéro; ceci démontre la seconde égalité.

Théorème. — *Un anneau indexable $\mathfrak{A}$ à noyaux idempotents est décomposable en somme directe d'anneaux uninodulaires s'annihilant mutuellement si et seulement si l'idéal bilatère annihilateur d'un noyau quelconque est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite.*

Démonstration. — Soit un anneau indexable $\mathfrak{A}$, somme directe de k anneaux

uninodulaires à noyau idempotent :

$$\mathfrak{A} = \sum \oplus \mathfrak{A}_p.$$

L'idéal annihilateur de $\mathfrak{N}_1$ (noyau de $\mathfrak{A}_1$) ne contient aucun élément de $\mathfrak{A}_1$ puisque $\mathfrak{N}_1$ est idempotent. Cet idéal n'est autre que

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_2 \oplus \mathfrak{A}_3 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k.$$

Cette somme n'est autre qu'un anneau indexable, elle représente dans $\mathfrak{A}$ un idéal bilatère qui est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite puisqu'elle possède une identité.

Réciproquement soit $\mathfrak{N}$ un noyau, $\mathfrak{M}$ l'idéal bilatère engendré par l'ensemble des noyaux autres que $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$ contient visiblement $\mathfrak{M}$. Il est clair également que $\mathfrak{M}$ est idempotent. On a, pour tout entier n,

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{F}^2 \supseteq \mathfrak{F}^3 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{F}^n \supseteq \mathfrak{M}.$$

Comme la condition de chaîne descendante est valable pour les idéaux bilatères de tout anneau indexable à index fini, on peut trouver un entier n tel que

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{F}^{n-1} = \mathfrak{F}^n \supseteq \mathfrak{M}.$$

Par hypothèse

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A}\xi = \eta\mathfrak{A},$$

d'où

$$\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}(\mathfrak{A}\xi) = (\eta\mathfrak{A})\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\xi = \eta\mathfrak{F},$$
$$\mathfrak{F}^3 = \mathfrak{F}^2\xi = \eta\mathfrak{F}^2, \qquad \mathfrak{F}^n = \mathfrak{F}^{n-1}\xi = \eta\mathfrak{F}^{n-1}.$$

D'où

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\xi = \eta\mathfrak{B}$$

et $\mathfrak{B}$ est évidemment idempotent. D'après le théorème du paragraphe 3.10 $\mathfrak{B}$ possède une identité, donc

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{B},$$

où $\mathfrak{A}_1$ désigne un anneau indexable contenant le seul noyau $\mathfrak{N}$.

On raisonne ensuite sur $\mathfrak{B}$ comme on a raisonné sur $\mathfrak{A}$ car dans l'anneau $\mathfrak{B}$ l'idéal annihilateur d'un noyau est toujours idéal principal à gauche et idéal principal à droite puisque cette condition est réalisée dans $\mathfrak{A}$.

3.12. Noyaux liés. — Remarquons d'abord que dans un anneau quelconque qui vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux bilatères, tout idéal bilatère non nilpotent admet une puissance (non nulle) idempotente. Il suffit de considérer la chaîne

$$\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B}^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{B}^n \supseteq \ldots.$$

Il en est ainsi pour les anneaux indexables à index fini.

Avant d'aborder le cas de décomposition d'un anneau indexable (à index fini) comportant des noyaux nilpotents, il est nécessaire d'étudier la distribution des noyaux dans le cas général. La notion de séparabilité n'est pas suffisante dans l'étude de la décomposition en somme directe d'anneaux indexables.

Soient deux noyaux $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, s'il existe une chaîne de noyaux $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_i$ telle que les couples $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2$, $\ldots$, $\mathfrak{N}_i\mathfrak{N}'$ ont des intersections non nulles (non séparables), je dirai que les noyaux $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ sont liés. Si deux noyaux $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ (nilpotents) sont inclus respectivement dans deux noyaux liés, $\mathfrak{N}\mathfrak{N}'$ sont liés (ce cas se ramène visiblement au précédent).

Les diagrammes suivants donnent l'idée d'un ensemble de noyaux liés :

Fig. 1.

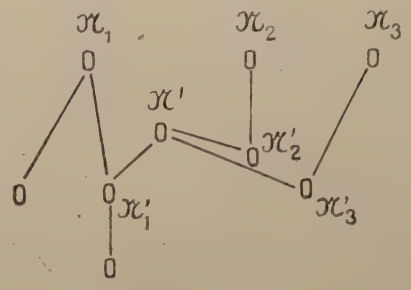


Fig. 2.

La rangée des zéros supérieurs désigne des noyaux idempotents; les rangées suivantes représentent des noyaux nilpotents. Les lignes verticales et obliques représentent des relations d'inclusion.

Un ensemble E représenté par la figure 1 ou la figure 2 est entièrement déterminé par la connaissance d'un seul de ses noyaux.

Deux noyaux non liés sont dits indépendants.

Appelons $\mathfrak{T}(E)$ l'idéal bilatère engendré par les noyaux de l'ensemble E.

Un ensemble E est dit de première catégorie s'il ne comporte aucun noyau nilpotent qui soit somme directe de plusieurs noyaux nilpotents ou s'il ne comporte aucun noyau nilpotent qui ne soit pas inclus dans un noyau idempotent. Ainsi, l'ensemble représenté par la figure 1 est de première catégorie.

Un ensemble E est dit de seconde catégorie, dans les autres cas. Ainsi, l'ensemble représenté par la figure 2 est de seconde catégorie.

Ceci posé, soit un anneau indexable $\mathfrak{A}$ décomposable en somme directe de composantes indexables :

$$\mathfrak{A} = \sum \oplus \mathfrak{A}_p.$$

Si une composante $\mathfrak{A}_1$ contient un noyau $\mathfrak{N}$ d'un ensemble E, elle contient tous les noyaux qui sont inclus dans $\mathfrak{N}$. Elle contient aussi tout $\mathfrak{N}'$ tel que $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$, *si* $\mathfrak{N}'$ *n'est pas nilpotent* car alors $\mathfrak{N}'$ n'est pas décomposable et figure dans une des composantes, soit $\mathfrak{A}_p$, mais si $p \neq 1$, l'intersection de $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ serait nulle, ce qui est absurde.

Si $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$ et si $\mathfrak{N}'$ est nilpotent, $\mathfrak{A}_1$ qui contient $\mathfrak{N}$ peut ne pas contenir $\mathfrak{N}'$ (si

par exemple $\mathfrak{N}'$ est somme directe de noyaux nilpotents contenus respectivement dans les $\mathfrak{A}_p$).

Il résulte de là que si l'ensemble E est de première catégorie, $\mathfrak{A}_1$ contient $\mathfrak{T}(E)$ dès que $\mathfrak{A}_1$ contient un seul noyau de E (nilpotent ou idempotent). Mais si E est de seconde catégorie, $\mathfrak{A}_1$ peut ne pas contenir tous les noyaux de E.

Examinons d'abord le cas où $\mathfrak{A}$ ne comporte que des ensembles de première catégorie et est décomposable en somme directe de composantes indexables indécomposables et contenant chacun un seul idéal $\mathfrak{T}(E)$. Soit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k.$$

Il y a k ensembles E. Posons

$$\mathfrak{T}_p = \mathfrak{T}(E_p) \subseteq \mathfrak{A}_p.$$

L'annihilateur de $\mathfrak{T}_1$ dans $\mathfrak{A}$ contient

$$\mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k$$

ainsi que $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{T}_1)$ annihilateur de $\mathfrak{T}_1$ dans le sous-anneau $\mathfrak{A}_1$.

$\mathfrak{F}_1(\mathfrak{T}_1)$ contient tous les noyaux nilpotents de l'ensemble E_1. De deux choses l'une :

— ou bien $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{T}_1)$ est nilpotent, et comme

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{T}_1) = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{T}_1) \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k,$$

on a, pour une certaine valeur de l'entier s :

$$\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1) = \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k.$$

En d'autres termes, l'annihilateur de $\mathfrak{T}_1$ admet une puissance indexable;

— ou bien $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{T}_1)$ n'est pas nilpotent, donc admet une puissance idempotente et

$$\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1) = \mathfrak{F}_1^s(\mathfrak{T}_1) \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k$$

est idempotent et n'est indexable pour aucune valeur de s.

Supposons maintenant que l'anneau indexable $\mathfrak{A}$ comporte un noyau nilpotent somme directe de plusieurs noyaux nilpotents. Par exemple, conformément à la figure 2, $\mathfrak{N}'$ est somme directe de $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$, $\mathfrak{N}'_3$ et $\mathfrak{N}'$ n'est contenu dans aucun autre noyau. Un tel ensemble pourrait être « éclaté » en trois ensembles comportant, entre autres, respectivement $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}'_2$, $\mathfrak{N}_3\mathfrak{N}'_3$; quant au noyau $\mathfrak{N}'$, il ne figure dans aucun des ensembles partiels.

L'étude de la décomposition dans le cas général paraît donc assez complexe.

Je me contente d'indiquer une condition suffisante de décomposition dans le cas simple où tous les ensembles E sont de première catégorie :

3.13. Théorème. — *Un anneau indexable $\mathfrak{A}$ (d'indice fini) est décomposable en somme directe de sous-anneaux indexables et indécomposables si les conditions*

suivantes sont réalisées :

— *Les ensembles* E *sont tous de première catégorie :*

— *L'annihilateur de l'idéal* $\mathfrak{T}(E)$ *admet, pour tout ensemble* E, *une puissance idempotente qui est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite.*

Démonstration. — Soit E_1 un ensemble quelconque de $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1)$ est, par hypothèse, et pour une certaine valeur de l'entier s, idempotent et est à la fois idéal principal à gauche et idéal principal à droite. Par suite cet idéal bilatère possède une identité e et est indexable. On a

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1).$$

Je dis que $\mathfrak{A}_1$ contient tous les noyaux de l'ensemble E_1. Soit $\mathfrak{N}$ un tel noyau : $\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1)$ annihile $\mathfrak{N}$; si donc ces deux idéaux ont des éléments communs, ces éléments sont annihilés en particulier par l'identité e du premier, ce qui est impossible : $\mathfrak{N}$ figure par suite dans $\mathfrak{A}_1$. Comme d'autre part un ensemble E de première catégorie contient toujours un noyau idempotent, l'idéal $\mathfrak{F}(\mathfrak{T}_1)$ contient tous les ensembles autres que E_1 en particulier tous les noyaux idempotents ne figurant pas dans E_1. Une puissance quelconque de cet idéal contient donc tous ces noyaux idempotents, par suite tous les ensembles autres que E. Ceci prouve que $\mathfrak{A}_1$ ne contient que le seul ensemble E_1 et est par suite indécomposable (en somme directe de sous-anneaux indexables).

On continue ensuite la décomposition de l'anneau $\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1)$ comme on a fait pour $\mathfrak{A}$ en remarquant que les hypothèses faites sur $\mathfrak{A}$ restent valables pour cet anneau car si E est un ensemble distinct de E_1, l'annihilateur de $\mathfrak{T}(E)$ dans $\mathfrak{A}$ est la somme directe de $\mathfrak{A}_1$ et de l'annihilateur de $\mathfrak{T}(E)$ dans le sous-anneau $\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_1)$.

Remarque. — On peut, dans le théorème précédent, lever quelque peu la restriction selon laquelle les ensembles E sont tous de première catégorie.

S'il existe un noyau $\mathfrak{N}$ nilpotent, non inclus dans un autre noyau et somme directe de h noyaux nilpotents, ces derniers sont complètement déterminés et l'on peut supprimer le noyau $\mathfrak{N}$ dans l'ensemble des noyaux de l'anneau $\mathfrak{A}$. L'ensemble E qui comprend $\mathfrak{N}$ peut être « éclaté » en h ensembles possédant les mêmes propriétés que les ensembles de première catégorie, une fois $\mathfrak{N}$ supprimé, à supposer que chacun de ces ensembles partiels possède un noyau idempotent au moins. Dans ces conditions, le théorème précédent reste valable.

3.14. Unicité de la décomposition. — Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème précédent. Je dis que la décomposition en sous-anneaux indexables et indécomposables ne peut se faire que d'une seule manière.

Soit

$$\mathfrak{A} = \sum \oplus \mathfrak{B}_p$$

une autre décomposition de l'anneau $\mathfrak{A}$ en sous-anneaux indexables et indécomposables. Si $\mathfrak{B}_1$ comporte un noyau de l'ensemble E_1 on a vu que $\mathfrak{B}_1$ contient tout E_1, donc $\mathfrak{T}(E_1)$. Supposons que $\mathfrak{B}_1$ contient aussi $\mathfrak{T}(E_2)$. Comme l'hypothèse sur l'annihilateur de $\mathfrak{T}(E)$ dans le théorème précédent s'applique à l'anneau $\mathfrak{B}_1$, ce dernier serait décomposable en somme directe d'au moins deux sous-anneaux indexables, ce qui contredit l'hypothèse, par suite $\mathfrak{B}_1$ ne contient que $\mathfrak{T}(E_1)$ et il y a autant de composantes $\mathfrak{B}_p$ que de composantes $\mathfrak{A}_p$. Supposons que $\mathfrak{B}_p$ contient $\mathfrak{T}(E_p)$ $(p = 1, 2, \ldots)$. L'égalité

$$\mathfrak{B}_p = \mathfrak{A}_p$$

résulte alors immédiatement des égalités

$$\mathfrak{F}^s(\mathfrak{T}_p) = \sum_{q \neq p} \oplus \mathfrak{A}_q = \sum_{q \neq p} \oplus \mathfrak{B}_q$$

valables pour toute valeur de l'entier p.

SUR

LE THÉORÈME DE KUROŠ

DANS LES PRODUITS LIBRES

PAR M. JULIAN PETRESCO.

Cet article représente la première partie d'un travail se proposant d'adapter aux produits libres, les procédés utilisés dans [6] pour les groupes libres.

On y trouvera une construction, fondée sur le théorème de Zorn, des décomposition libres d'un sous-groupe H appartenant à un produit libre $\Pi^* A$; elle contient comme cas particulier la construction par double récurrence transfinie de Kuroš [4] et celle obtenue à partir d'un bon ordre « semi-alphabétique » par M. Hall [3].

H. W. Kuhn [2] et A. J. Weir [5] ont obtenu par ailleurs des constructions à partir de « transversales », où les considérations de « cancellation » sont remplacées presque entièrement par des considérations d'homomorphisme. Notre construction fait largement appel aux considérations de cancellation, mais d'une façon assez systématique ; elle contient également comme cas particuliers les constructions à partir de transversales.

Les rapports entre la construction donnée ici et les différentes autres constructions, ainsi que les questions liées au théorème de Gruško, feront cependant l'objet d'un article ultérieur, ultilisant les mêmes procédés.

1. A-SEGMENTATION. — Considérons une famille d'ensembles $\{A_\alpha\}$ et notons $A = \bigcup A_\alpha$. Si les éléments r_i d'une n-suite $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ appartiennent à A nous disons que R est une A-*suite*; si les r_i appartiennent tous à un même ensemble A_α nous disons que R est une A_α-*suite*. Nous notons $S(r_i r_j)$ le segment de R ayant r_i comme extrémité à gauche et r_j comme extrémité à droite, et $\omega(R) = n$.

Soit maintenant un ensemble ρ' de A_α-sous-suites non vides de R, notées $S' = \{s_0, \ldots, s_u\}$, $s_t \in R$, $s_t \in A_\alpha$, et supposons que :

(1′) *tout élément de* R *appartient à une* A_α*-sous-suite* S′ *de* ρ' *et à une seule.*

Nous disons que le segment $S = S(s_0 s_u)$ de R, compris entre les extrémités s_0 et s_u de S′ est le *segment supporté* par S′ et les éléments s_t, $0 \leq t \leq u$, de celui-ci, sont dits *supports* de S. L'ensemble ρ des segments supportés par les S′ de ρ' constitue une A-*segmentation* de R.

La correspondance entre les $S' \in \rho'$ *et les* $S \in \rho$ *est biunivoque*, car à chaque S correspond une A_α*-sous-suite de supports* S′ unique ; une extrémité de S est en effet support de S et d'après (1′) appartient à une S′ unique. Il s'ensuit que :

(1) *tout élément de* R *est support d'un segment* S *de* ρ *et d'un seul.*

Notons $S_\rho(r_i)$ le segment de support r_i, unique, appartenant à ρ.

Une A-segmentation ρ est dite *concordante* si, pour chaque $S \in \rho$:

$$(2) \qquad r_i \in S \Rightarrow S_\rho(r_i) \subseteq S.$$

Soit $S^t = S(r_{i+1} r_{j-1})$ l'intervalle séparant deux supports consécutifs $s_{t-1} = r_i$ et $s_t = r_j$ de S ; nous disons que les segments S^t, $1 \leq t \leq u$, sont les *inter-supports* de S.

1.1. *Pour qu'une* A-*segmentation* ρ *de* R *soit concordante, il faut et il suffit que, pour chaque* $S \in \rho$:

$$(2^t) \qquad r_i \in S^t \Rightarrow S_\rho(r_i) \subseteq S^t.$$

$(2^t) \Rightarrow (2)$. Si $r_i \in S$ est un support de S, d'après (1), $S_\rho(r_i) = S$; dans le cas contraire, il existe t tel que $r_i \in S^t$, donc d'après (2^t), $S_\rho(r_i) \subseteq S^t \subset S$.

$(2) \Rightarrow (2^t)$. D'après (2), $r_i \in S'$ entraîne $S_\rho(r_i) \subseteq S$; d'autre part, quel que soit $r_j \in S'$, $r_j \in S_\rho(r_i)$ entraîne d'après (2), $S = S_\rho(r_j) \subseteq S_\rho(r_i)$. On a par conséquent $S_\rho(r_i) = S$, donc $r_i \in S'$, ce qui contredit $r_i \in S^t$. En définitive $S_\rho(r_i) \cap S' = 0$, de sorte que $S_\rho(r_i)$ est contenu dans un inter-support de S, plus précisément dans S^t, puisque $r_i \in S^t$.

On conclut : *si* $r_i \in S$, $S_\rho(r_i)$ *coïncide avec* S *ou bien est contenu dans un inter-support de* S.

1.2. *Si* ρ *est une* A-*segmentation concordante et* $S_1, S_2 \in \rho$:

$$S_1 \cap S_2 = S_1, S_2, 0.$$

Si $S'_1 \cap S_2 \neq 0$, soit $r_i \in S'_1 \cap S_2$; d'après (1), $S_1 = S_\rho(r_i)$ et d'après (2), $S_1 \cap S_2 = S_1$. Si $S'_1 \cap S_2 = 0$, on a soit $S_1 \cap S_2 = S_2$, soit $S_1 \cap S_2 = 0$.

1.3. *Si* ρ *est une* A-*segmentation concordante de* R *et* $\rho'_1 \subseteq \rho'$, *l'ensemble* ρ_1 *des segments supportés par les* A_α*-sous-suites* S'_1 *de* ρ'_1 *dans* $R_1 = \bigcup S'_1$ *est une* A-*segmentation concordante de* R_1.

R_1 et ρ'_1 satisfont à (1′) et par conséquent ρ_1 est une A-segmentation de R_1.

Considérons d'autre part $S_1 \in \rho_1$ supporté par $S'_1 \in \rho'_1$ dans R_1 et soit $S \in \rho$ le segment supporté par S'_1 dans R. Si $r_i \in S_1 = S \cap R_1 \subseteq S$, on a d'après (2), $S_\rho(r_i) \subseteq S$, et par conséquent

$$S_{\rho_1}(r_i) = S_\rho(r_i) \cap R_1 \subseteq S \cap R_1 = S_1,$$

de sorte que R_1 et ρ_1 satisont à (2).

Nous disons que ρ_1 est la A-*segmentation induite* par ρ dans R_1.

Soit maintenant $S \in \rho$ et notons : σ l'ensemble des segments de ρ dont un support appartient à S ; σ' l'ensemble de ceux dont un support appartient à S′ ; σ^* l'ensemble des segments de R — S de la forme $S^* - S$, $S^* \in \rho$, où un support de S^* appartient à R — S.

1.4. *σ, σ' et σ^* sont les* A-*segmentations concordantes induites par ρ dans* S, S′ *et* R — S, *respectivement.*

En appliquant 1.3, on voit que :

Si l'on prend $\rho'_1 = \sigma'$, on a d'après (1′) et (2), $R_1 = S$ et $\rho_1 = \sigma$.

Si l'on prend $\rho'_1 = (\sigma')'$, on a d'après (1′) et (2′), $R_1 = S'$ et $\rho_1 = \sigma'$.

σ_1 étant l'ensemble des segments S^* de ρ dont un support appartient à R — S, si l'on prend $\rho'_1 = \sigma'_1$, on a d'après (1′) et (2), $R_1 = R - S$ et $\rho_1 = \sigma^*$.

1.5. *Pour que le segment $S \in \rho$ soit minimal dans ρ il faut et il suffit que $S = S'$; un $S \in \rho$ minimal est par conséquent un A_α-segment.*

Si $S = S'$, $r_i \in S$ entraîne $r_i \in S'$, donc $S_\rho(r_i) = S$.

Réciproquement, pour tout $r_i \in S$, on a d'après (2), $S_\rho(r_i) \subseteq S$, et si S est minimal, $S_\rho(r_i) = S$, donc $r_i \in S'$ et en définitive $S = S'$.

Considérons maintenant les ensembles $\{R_k\}$ et $\{S_k\}$, $1 \leq k \leq n$, de sous-suites de R construites par récurrence comme suit :

(a') $R_1 = R$;

(a) $R_k = R_{k-1} - S'_{k-1}$;

(b) S'_k est un A_α-segment de R_k.

Soit d'autre part :

(c) $\rho = \{S_k\}$, l'ensemble des segments S_k supportés dans R par les S'_k.

1.6. *ρ est une* A-*segmentation concordante de* R *et réciproquement, pour chaque* A-*segmentation concordante ρ de* R, *on peut construire deux ensembles $\{R_k\}$ et $\{S_k\}$ de sous-suites de* R, *satisfaisant, avec ρ, à* (a), (b), (c).

On a $R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_k \supset \ldots$, de sorte que si $r_i \in R$, il existe k avec $r_i \in R_k$ et $r_i \notin R_{k+1}$; mais d'après (a), $R_{k+1} = R_k - S'_k$, donc $r_i \in S'_k$. Par ailleurs, si $r_i \in S'_k$

et $r_i \in S'_h$ à la fois, et si par exemple $k < h$, on a d'après (a), $r_i \notin R_k - S'_k = R_{k+1}$, et d'après (b), $r_i \in S'_h \subseteq R_h \subseteq R_{k+1}$, ce qui est contradictoire. En définitive, on a $(1')$.

Soit maintenant $r_i \in S_h \subseteq R$; comme plus haut, il existe k avec $r_i \in S'_k \subseteq R_k$. Puisque d'après (b), S'_k est un segment de R_k, $R_{k+1} = R_k - S'_k$ ne contient plus d'éléments de S_h, d'où $k \leq h$; pour la même raison $R_{k+1} = R_k - S'_k$ ne contient plus d'éléments de S_k, de sorte qu'on a soit $k = h$, soit $S_k \cap S'_h = 0$, auquel cas S_k est contenu dans un inter-support de S_h. Dans les deux cas, $S_\rho(r_i) = S_k \subseteq S_h$ et par conséquent on a (2).

Supposons enfin la réciproque valable pour toute n^*-suite avec $n^* < n$ et soit R une n-suite admettant la A-segmentation concordante ρ. Un segment S minimal de ρ est d'après 1.5 un A_α-segment et $R - S$ est une n^*-suite avec $n^* < n$. Considérons la A-segmentation concordante σ^* induite, d'après 1.4, par ρ dans $R - S$. D'après l'hypothèse on peut construire les ensembles $\{R_2, \ldots, R_k\}$ et $\{S'_2, \ldots, S'_k\}$ de sous-suites de $R - S$ satisfaisant, avec σ^*, à (a), (b), (c). On déduit que les ensembles $\{R, R_2, \ldots, R_k\}$ et $\{S, S_2, \ldots, S_k\}$ de sous-suites de R, et la segmentation ρ, satisfont également à (a), (b), (c). La proposition est par ailleurs évidente pour $n = 1$.

2. A-IDENTITÉ. — Supposons maintenant que les A_α soient des sous-groupes du groupe G et notons $\bar{R} = r_1 r_2 \ldots r_n$ le produit des éléments d'une A-suite R, dans l'ordre de R. Le segment S de R est dit *unitaire*, si

$$\bar{S}' = 1, \tag{3'}$$

et ρ est une A-*segmentation unitaire* de R, si ses segments sont unitaires.

2.1. *Si* R *admet une* A-*segmentation concordante et unitaire* ρ,

$$\bar{R} = 1.$$

Si la proposition est vraie pour toute n^*-suite avec $n^* < n$, considérons la n-suite R et soit S un segment minimal de ρ. On a d'après 1.5 et $(3')$, $\bar{S} = \bar{S}' = 1$. D'autre part $R - S$, qui est une n^*-suite avec $n^* < n$, admet d'après 1.4, une A-segmentation concordante σ^* induite par ρ, dont les segments $S^* - S$ ont mêmes supports que les segments S^* de ρ; il s'ensuit que σ^* est également unitaire, donc d'après l'hypothèse $\overline{R - S} = 1$. Si l'on pose $S = S(r_i r_j)$, on a par conséquent

$$\bar{R} = r_1 \ldots r_{i-1} \bar{S} r_{j+1} \ldots r_n = r_1 \ldots r_{i-1} r_{j+1} \ldots r_n = \overline{R - S} = 1.$$

Par ailleurs, 2.1 est évidente pour $n = 1$.

2.2 *Pour qu'une* A-*segmentation concordante* ρ *de* R *soit unitaire il faut et il suffit que, pour chaque* $S \in \rho$:

$$\bar{S} = 1 \tag{3}$$

et l'on a alors pour tout t,

$$(3^t) \qquad \bar{S}^t = 1.$$

Si ρ est concordante et unitaire et $S \in \rho$, la A-segmentation concordante σ induite par ρ dans S, d'après 1.4, est composée des segments de ρ contenus dans S et par conséquent σ est également unitaire ; d'après 2.1, on a $\bar{S} = 1$.

Réciproquement, soit ρ concordante, $S = S(s_0 s_u) \in \rho$ et $S' = S(r_{i+1} r_{j-1})$, $r_i = s_{t-1}$, $r_j = s_t$, un inter-support de S ; d'après $(2')$, $S_\rho(r_{i+1}) = S(r_{i_1} r_{i_1})$ où $i+1 \leq i_1 \leq j-1$. Si l'on considère plus généralement les segments définis par

$$S_\rho(r_{i_k+1}) = S(r_{i_k+1} r_{i_k+1})$$

(2^t) entraîne $i+1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k < \ldots \leq j-1$, de sorte que pour un certain k, $i_k = j-1$. Si maintenant (3) est valable, on a

$$\bar{S}(r_{i_k+1} r_{i_k+1}) = 1,$$

d'où

$$\bar{S}^t = \bar{S}(r_{i+1} r_{i_1}) \ldots \bar{S}(r_{i_{k-1}+1} r_{j-1}) = 1,$$

et en définitive

$$1 = \bar{S} = s_0 \bar{S}^1 s_1 \ldots \bar{S}^t s_t \ldots \bar{S}^u s_u = s_0 s_1 \ldots s_u = \bar{S}'.$$

Considérons maintenant une famille $\{A_\alpha\}$ de sous-groupes $A_\alpha \neq 1$ de G qui soient disjoints deux à deux. Une A-relation $\bar{R} = 1$ est dite A-*identité* si la A-suite R admet une A-segmentation concordante et unitaire. D'après 2.1 et 1.4 :

2.3. *Si* $\bar{R} = 1$ *est une* A-*identité,* ρ *une* A-*segmentation concordante et unitaire de* R *et si* $S \in \rho$, $\bar{S} = 1$ *ainsi que* $\bar{S}' = 1$ *et* $\overline{R - S} = 1$ *sont également des* A-*identités.*

Soit $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ une A-suite avec $r_i \neq 1$. Puisque les A sont disjoints deux à deux, les A_α-*segments maximaux* S_j, $1 \leq j \leq m$, de R n'ont pas d'éléments communs et d'autre part chaque r_i de R appartient à un S_j ; il s'ensuit que ceux-ci forment une suite $\{S_1, \ldots, S_m\}$ telle que $\bar{R} = \bar{S}_1 \bar{S}_2 \ldots \bar{S}_m$. Nous disons que $R^1 = \{\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_m\}$ est la *réduite* de R ; on a $\bar{R} = \bar{R}^1$.

R est dite par ailleurs A-*suite réduite* si tout A_α-segment contient un seul élément.

Il est clair que si les éléments de R^1 sont différents de 1, R^1 est une A-suite réduite. Dans le cas contraire, on peut éliminer les $\bar{S}_j$ égaux à 1 et considérer la réduite R^2 de la suite ainsi obtenue à partir de R^1, qu'on appellera *seconde réduite* de R ; on peut continuer de la sorte jusqu'à une $\nu^{ième}$ *réduite* R dont les éléments — s'ils ne sont pas tous égaux à 1, auquel cas $\bar{R} = \bar{R}^\nu = 1$ — sont nécessairement différents de 1, c'est-à-dire que R^ν *est une* A-*suite réduite avec* $R = \bar{R}^\nu$.

Nous disons d'autre part, comme dans [6], que la suite R d'éléments de G est *irréductible*, si $\bar{S} \neq 1$ pour tout segment $S \subset R$.

Soit enfin E_α un système de générateurs de A_α vérifiant : $x \in E_\alpha \Rightarrow x^{-1} \in E_\alpha$, et notons $E = \bigcup E_\alpha$; E est évidemment un système de générateurs de [A].

Considérons les propositions :

(L_α) $\{A_\alpha\}$ *est telle que les seules* A-*relations sont les* A-*identités.*

(L_β) $\{A_\alpha\}$ *est telle que chaque élément* $1 \neq x \in [A]$ *admet une représentation unique comme* A-*produit réduit.*

(L_γ) $\{A_\alpha\}$ *est telle qu'il n'existe pas de* E-*relation irréductible en dehors des* E_α-*relations.*

2.4. *On a les équivalences :* $(L_\alpha) \Leftrightarrow (L_\beta) \Leftrightarrow (L_\gamma)$.

$(L_\alpha) \Rightarrow (L_\gamma)$. Si $1 \neq x = \bar{R} \in [A]$, où R est une A-suite, les réduites de R procurent une représentation réduite de x.

Si maintenant (L_α) est valable, *une* A-*suite réduite* R *est irréductible*; s'il existe en effet $S \subset R$ avec $\bar{S} = 1$, celle-ci est une A-identité, et d'après 1.5 et (3), un segment minimal S^* de la A-segmentation concordante et unitaire ρ qu'admet S est un A-segment avec $\bar{S}^* = 1$ et contient par conséquent plus d'un élément.

Supposons enfin que $1 \neq x = \prod^{n} a_i = \prod^{m} b_j$ avec $\prod a_i$ et $\prod b_j$ réduits, donc irréductibles; d'après (L_α)

$$\bar{R} = \prod b_{m-j+1}^{-1} \prod a_i = 1$$

est une A-identité et R admet une A-segmentation concordante et unitaire ρ. Si $S \in \rho$, on a $\bar{S}' = 1$ pour tout inter-support, de sorte que S' se réduit nécessairement à ses deux extrémités dont l'une est dans $\{b_{m-j+1}^{-1}\}$ et l'autre dans $\{a_i\}$, d'où $m = n$, $S = S(b_i^{-1} a_i)$, $S' = \{b_i^{-1}, a_i\}$ et en définitive $a_i = b_i$.

$(L_\beta) \Rightarrow (L_\gamma)$. Considérons une E-relation irréductible $R = 1$ qui ne soit pas E_α-relation; la réduite $\{\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_m\}$, $m \geq 2$, de R est telle que $\bar{S}_j \neq 1$; c'est donc une A-suite réduite avec $\bar{R} = \bar{S}_1 \bar{S}_2 \ldots \bar{S}_m = 1$ et ceci contredit (L_β).

$(L_\gamma) \Rightarrow (L_\alpha)$, Supposons (L_γ) valable pour un certain système de générateurs $E = \bigcup E_\alpha$. Si $\bar{R} = 1$ est une A-relation, nous disons que : R *contient un* A_α-*segment* S *avec* $\bar{S} = 1$.

La proposition est évidente s'il existe $r_i \in R$ avec $r_i = 1$ ou si $\bar{R} = 1$ est une A_α-relation. Dans le cas contraire, soit $\{\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_m\}$ la réduite de R; si pour un certain j, $\bar{S}_j = 1$, la proposition est également démontrée.

Enfin, le cas $\bar{S}_j \neq 1$ pour tout j est contradictoire. Posons en effet $\bar{S}_j \in A_\alpha$ et

soit $\overline{S}_j = \prod_k^{n_j} e_{jk}$ une représentation irréductible de $\overline{S}_j$ avec les éléments de E_{α_j}. La relation

$$\overline{R}_E = \prod_j \prod_k e_{jk} = 1$$

n'est pas une E_α-relation, donc d'après (L_γ), l'ensemble des $S \subset R_E$ avec $\overline{S} \neq 1$ n'est pas vide et un segment minimal S^* avec $\overline{S}^* = 1$ est nécessairement un E_α-segment. Dans ces conditions, le fait que $\{\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_m\}$ soit une suite réduite entraîne $S^* \subseteq \{e_{j1}, \ldots, e_{j,n_j}\}$ pour un certain j, circonstance exclue par $\overline{S}_j \neq 1$ et l'irréductibilité de $\prod_k e_{jk}$.

Considérons maintenant la A-relation $\overline{R} = 1$ et supposons qu'on ait construit comme dans 1.6, les ensembles $\{R_1, \ldots, R_k\}$ et $\{S'_1, \ldots, S'_k\}$ de sous-suites de R satisfaisant à (a) et (b), et que de plus

$$(4) \qquad R_1 = \ldots = \overline{R}_k = \overline{S}'_1 = \ldots = \overline{S}'_k = 1.$$

Prenons $R_{k+1} = R_k - S'_k$; on a d'après (4), $\overline{R}_{k+1} = \overline{R_k - S'_k} = 1$, et par conséquent, en appliquant la remarque démontrée plus haut, on peut choisir dans R_{k+1} un A_α-segment S'_{k+1} avec $\overline{S}'_{k+1} = 1$. On déduit que (4) est valable pour tout k. Mais alors la A-segmentation $\rho = \{S_k\}$, définie comme dans (c), concordante d'après 1.6, est également telle que $\overline{S}'_k = 1$, c'est-à-dire unitaire.

Si (L_β) est valable on dit que $\{A_\alpha\}$ est un *système libre* de sous-groupes de G, ou encore que [A] est le *produit libre* des sous-groupes A_α et l'on écrit $[A] = \Pi^* A_\alpha$.

L'intérêt des équivalences 2.4 est de permettre le remplacement de (L_β) dans la définition ci-dessus, soit par (L_α), soit par (L_γ), qui seront seules utilisées par la suite.

Si $x = \overline{R}$ est la représentation réduite de $1 \neq x \in \Pi^* A_\alpha$, on appelle *longueur* $\lambda(x)$ de x le nombre $\omega(R)$; on pose $\lambda(1) = 0$ et l'on a $\lambda(x) = \lambda(x^{-1})$.

Si $\lambda(x) = 2m+1$, l'élément r_{m+1} de R est dit *centre* $c(x)$, la suite $\{r_m^{-1}, \ldots, r_1^{-1}\}$ *moitié gauche* $M_{-1}(x)$ et la suite $\{r_{m+2}, \ldots, r_{2m+1}\}$ *moitié droite* $M_1(x)$ de x; la représentation réduite de x s'écrit avec ces notations,

$$x = \overline{M}_{-1}^{-1}(x) . c(x) . \overline{M}_1(x).$$

Si $\lambda(x) = 2m$, r_m est dit *centre à gauche* $c_{-1}(x)$ et r_{m+1} *centre à droite* $c_1(x)$ de x.

Nous notons enfin $A(x)$ le sous-groupe A_α avec $c(x) \in A_\alpha$.

3. Enchainabilité. — Considérons un produit libre $\Pi^* A_\alpha$ et deux éléments x

et y de Π^*A_α, de même longueur impaire $\lambda = 2m+1$ et tels que

$$A(x) = A(y) = A_\alpha.$$

x et y sont dits *contigus* si pour certains ε, $\varepsilon' = \pm 1$:

$$M_\varepsilon(x) = M_{-\varepsilon'}(y), \tag{5}$$

et l'on écrit dans ce cas $x \sim y . x \sim x^{\pm 1}$; $x \sim y \Rightarrow x^{\pm 1} \sim y^{\pm 1}$, $y^{\pm 1} \sim x^{\pm 1}$.

z vérifiant $\lambda(z) = \lambda$ et $A(z) = A_\alpha$ est dit *intermédiaire* entre x et y si pour certains ε, ε_1, $\varepsilon' = \pm 1$:

$$M_\varepsilon(x) = M_{-\varepsilon_1}(z), \qquad M_{\varepsilon_1}(z) = M_{-\varepsilon'}(y). \tag{6}$$

Si z est intermédiaire entre x et y il en est de même pour z^{-1} ; si $x \sim y$, $x^{\pm 1}$ ainsi que $y^{\pm 1}$ sont intermédiaires entre x et y ; si z est intermédiaire entre x et y, on a $x \sim z$ et $z \sim y$, mais la réciproque n'est pas valable.

Soit maintenant H un sous-groupe de Π^*A et supposons de plus que x et y appartiennent à H.

x et y sont dits *enchaînables* (dans H) par la suite $\{z_1, \ldots, z_\nu\}$ d'éléments de H, si $x \sim z_1$, $z_1 \sim z_2$, $\ldots$, $z_\nu \sim y$, autrement dit, d'après (5), si pour certains $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_\nu, \varepsilon' = \pm 1$:

$$M_\varepsilon(x) = M_{-\varepsilon'_1}(z_1), \quad M_{\varepsilon_1}(z_1) = M_{-\varepsilon'_2}(z_2), \quad \ldots, \quad M_{\varepsilon_\nu}(z_\nu) = M_{-\varepsilon'}(y), \tag{7}$$

et l'on écrit dans ce cas $x \Delta y$. $x \Delta y$ est une relation d'équivalence ; $x \Delta x^{-1}$; $x \sim y \Rightarrow x \Delta y$.

3.1. *Si x et y sont enchaînables par $\{z_1, \ldots, z_\nu\}$, on peut déterminer quels que soient $\varepsilon_0, \varepsilon'_0 = \pm 1$, certains $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_\nu, \eta'$ égaux à -1, 0 ou 1, tels que*

$$x^\eta z_1^{\eta_1} \ldots z_\nu^{\eta_\nu} y^{\eta'} = \overline{M}^{-1}_{-\varepsilon_0}(x) . a . \overline{M}_{\varepsilon'_0}(y), \qquad a \in A_\alpha. \tag{7'}$$

Si l'on convient de poser $\overline{M}_0(x) = \overline{M}_0(z_\mu) = \overline{M}_0(y) = 1$, $1 \leq \mu \leq \nu$, on a

$$x^\eta z_1^{\eta_1} \ldots z_\nu^{\eta_\nu} y^{\eta'} = \overline{M}^{-1}_{-\eta}(x) . c^\eta(x) . \overline{M}_\eta(x) . \overline{M}^{-1}_{-\eta_1}(z_1) . c^{\eta_1}(z_1) . \overline{M}_{\eta_1}(z_1)$$
$$\ldots \overline{M}^{-1}_{-\eta_\nu}(z_\nu) . c^{\eta_\nu}(z_\nu) . \overline{M}_{\eta_\nu}(z_\nu) . \overline{M}^{-1}_{-\eta'}(y) . c^{\eta'}(y) . \overline{M}_{\eta'}(y),$$

de sorte que si l'on prend

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon_0 \neq \varepsilon \\ \varepsilon_0 = \varepsilon & \text{si } \varepsilon_0 = \varepsilon \end{cases}, \qquad \eta_\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon'_\mu \neq \varepsilon_\mu \\ \varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu & \text{si } \varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu \end{cases}, \qquad \eta' = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon'_0 \neq \varepsilon \\ \varepsilon'_0 = \varepsilon' & \text{si } \varepsilon'_0 = \varepsilon' \end{cases},$$

(7) entraîne (7').

3.2. *Pour que x et y soient enchaînables, il faut et il suffit qu'un $z \in H$ soit intermédiaire entre x et y.*

La condition est évidemment suffisante.

Réciproquement, supposons $z_1, \ldots, z_\nu \in H$, $x \sim z_1, \ldots, z_\nu \sim y$; d'après 3.1,

il existe $z \in H$ avec

$$z = x^{\eta_0} z_1^{\eta_1} \dots z_\nu^{\eta_\nu} y^{\eta'} = \overline{M}_{-\varepsilon_0}^{-1}(x).a.M_{\varepsilon_0'}(y), \qquad a \in A_\alpha.$$

Si $a \neq 1$, d'après (7), z est intermédiaire entre x et y.

Si $a = 1$, on a

$$z = \overline{M}_{-\varepsilon_0}^{-1}(x).\overline{M}_{\varepsilon_0'}(y) = \left[\overline{M}_{-1}^{-1}(x).c(x).\overline{M}_1(x)\right]^{\varepsilon_0}\left[\overline{M}_{\varepsilon_0}^{-1}(x).c^{-\varepsilon_0}(x).\overline{M}_{\varepsilon_0'}(y)\right] = x^{\varepsilon_0} z',$$

où $z' \in H$ et

$$z' = \overline{M}_{\varepsilon_0}^{-1}(x).c^{-\varepsilon_0}(x).\overline{M}_{\varepsilon_0'}(y), \qquad 1 \neq c^{-\varepsilon_0}(x) \in A_\alpha,$$

c'est-à-dire que z' est intermédiaire entre x et y.

$x \in \Pi^* A_\alpha$, de longueur impaire $\lambda = 2m+1$, est dit *élément symétrique* (1) de moitié $M(x)$, si $M_{-1}(x) = M_1(x) = M(x)$, autrement dit si x est conjugué à un élément d'un A_α.

x et y, symétriques, sont dits *semblables* si $M(x) = M(y)$ et l'on écrit $x \simeq y$; pour x et y non symétriques nous posons $x \simeq y \Leftrightarrow x = y^{\pm 1}$; la relation $\simeq$ est une relation d'équivalence.

Une suite $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ d'éléments de $\Pi^* A_\alpha$ est dite *x-simple* si la classe des r_i semblables à x se réduit à un seul élément de R; R est *x-simple à gauche ou à droite* si $r_1 \simeq x$, où $r_n \simeq x$, respectivement.

Un sous-groupe B de H de la forme

$$B = H \cap \overline{M}^{-1} A_\alpha \overline{M},$$

où M est la représentation réduite d'un élément de $\Pi^* A$ est dit *sous-groupe symétrique* de H, de centre $c(B) = \overline{M} B \overline{M}^{-1} \subseteq A(B) = A_\alpha$ et de moitié $M(B) = M$; B est conjugué à un sous-groupe d'un A_α.

Les éléments $x \neq 1$ d'un sous-groupe symétrique B sont des éléments symétriques avec $A(x) = A(B)$ et $M(x) = M(B)$, que nous appelons *éléments principaux* de B; si B est un sous-groupe cyclique engendré par un non symétrique, les éléments principaux de B sont ses deux générateurs.

Appelons *sous-groupe premier* de H, un sous-groupe qui est soit symétrique, soit cyclique engendré par un non symétrique.

A chaque symétrique x de H on associe le sous-groupe symétrique $B(x) = H \cap \overline{M}^{-1}(x).A(x).\overline{M}(x)$ le contenant, unique; à chaque non symétrique x on associe le sous-groupe premier cyclique $B(x)$ engendré par x; la classe des éléments semblables à x coïncide avec l'ensemble $B^*(x)$ des éléments principaux de $B(x)$.

Deux sous-groupes premiers B_1 et B_2 sont dits *enchaînables* si leurs éléments

(1) « Transformation » dans la terminologie de Kuroš [4].

principaux sont enchaînables; il s'agit évidemment d'une relation d'équivalence dans l'ensemble des sous-groupes premiers.

3.3. *Deux sous-groupes symétriques enchaînables* B_1 *et* B_2 *sont conjugués dans* H *et leurs centres* $c(B_1)$ *et* $c(B_2)$ *sont conjugués dans* $A(B_1) = A(B_2) = A_\alpha$.

Soient $x \in B_1$ et $y \in B_2$ deux éléments principaux donc enchaînables; d'après 3.2, il existe $z \in H$ intermédiaire entre x et y et puisque ceux-ci sont symétriques,

$$z = \overline{M}^{-1}(x).a.\overline{M}(y), \qquad 1 \neq a \in A_\alpha.$$

Si maintenant $\xi \simeq x$:

$$z^{-1}\xi z = M^{-1}(y).a^{-1}.c(\xi).a.M(y) \in B_2, \qquad 1 \neq a^{-1}.c(\xi).a \in c(B_2) \subseteq A_\alpha.$$

d'où

$$z^{-1}B_1 z \subseteq B_2, \qquad a^{-1}.c(B_1).a \subseteq c(B_2);$$

de manière analogue

$$zB_2z^{-1} \subseteq B_1, \qquad a.c(B_2).a^{-1} \subseteq c(B_1),$$

donc

$$B_2 \subseteq z^{-1}B_1 z, \qquad c(B_2) \subseteq a^{-1}.c(B_1).a.$$

Un ensemble X d'éléments de H est dit *enchaîné* si quel que soit le couple x, y d'éléments enchaînables de X, $z \in [X]$ pour un certain z intermédiaire entre x et y; en particulier, X est enchaîné si x et y sont enchaînables par une suite $\{z_1, \ldots, z_\nu\}$ d'éléments de X.

X est dit *bien enchaîné* si quel que soit le couple x, y d'éléments enchaînables de X, $z \in [X]$ pour tout z intermédiaire entre x et y.

Une famille $\{B_\beta\}$ de sous-groupes premiers de H est dite *enchaînée* ou *bien enchaînée* si l'ensemble B des éléments principaux des sous-groupes B_β est enchaîné ou bien enchaîné, respectivement.

3.4. *Pour qu'un ensemble enchaîné* X *soit bien enchaîné, il faut et il suffit que, quelle que soit la classe d'enchaînabilité* $\Delta(c)$ *dans* X,

$$B = H \cap \overline{M}_\varepsilon^{-1}(c_0).A(c_0).\overline{M}_\varepsilon(c_0) \subseteq [X]$$

pour un certain $c_0 \in \Delta(c)$ *et un certain* $\varepsilon = \pm 1$.

La condition est nécessaire car les éléments principaux de B sont intermédiaires entre c_0 et c_0.

Réciproquement soit $z = \overline{M}_{\varepsilon_0}^{-1}(x).a.\overline{M}_{\varepsilon_0'}(y)$ intermédiaire entre $x, y \in \Delta(c)$. Si X est enchaîné, il existe $z_1 \in [X]$ intermédiaire entre x et c_0 et $z_2 \in [X]$ intermédiaire entre c_0 et y, donc d'après $(7')$

$$x^{\eta_1}z_1^{\eta_1'}c_0^{\eta_0} = \overline{M}_{\varepsilon_0}^{-1}(x).a_1.\overline{M}_\varepsilon(c_0), \qquad c_0^{\eta_0'}z_2^{\eta_2}y^{\eta'} = \overline{M}_\varepsilon^{-1}(c_0).a_2.\overline{M}_{\varepsilon_0'}(y).$$

où $a_1, a_2 \in A(\varphi_0)$. Soit maintenant $a' \in A(\varphi_0)$ tel que $a_1 a' = a$; on a

$$\begin{aligned}\overline{M}_{\varepsilon}^{-1}(\varphi_0).a'.\overline{M}_{\varepsilon_0'}(y) &= \overline{M}_{\varepsilon}^{-1}(\varphi_0).a'a_2^{-1}.\overline{M}_{\varepsilon}(\varphi_0).\overline{M}_{\varepsilon}^{-1}(\varphi_0).a_2.\overline{M}_{\varepsilon_0'}(y)\\ &= b\varphi_0^{\eta_0'} z_2^{\eta_2} y^{\eta'}, \qquad b \in B \subseteq [X],\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}z = \overline{M}_{-\varepsilon_0}^{-1}(x).a.\overline{M}_{\varepsilon_0'}(y) &= \overline{M}_{-\varepsilon_0}^{-1}(x).a_1.\overline{M}_{\varepsilon}(\varphi_0).\overline{M}_{\varepsilon}^{-1}(\varphi_0).a'.\overline{M}_{\varepsilon_0'}(y)\\ &= x^{\eta_1} z_1^{\eta_1} \varphi_0^{\eta_0} b \varphi_0^{\eta_0'} z_2^{\eta_2} y^{\eta'} \in [X].\end{aligned}$$

4. Relations irréductibles. — Considérons une relation irréductible $\overline{R} = r_1 r_2 \dots r_n$ avec $r_i \in \Pi^* A_\alpha$ et supposons d'une part que $\omega(R) \underset{\lambda(r_i)}{\geqq} 3$, d'autre part que les r_i ne sont pas tous symétriques semblables; soit $r_i = \prod\limits_j a_{ij}$, la représentation réduite de r_i et notons

$$l(R) = \max\{\lambda(r_i)\}, \qquad \overline{R}_A = \prod_i \prod_j a_{ij}.$$

Si de plus R_A admet une A-segmentation concordante et unitaire ρ, appelons *couverture centrale* $C_\rho(r_i)$ le segment minimum appartenant à $\rho \cup R_A$ et contenant les centres de r_i (dont l'existence est assurée par 1.2).

4.1. *Si $l(R) = 2m$, il existe pour tout $r_\nu \in R$ vérifiant $\lambda(r_\nu) = l(R)$, un segment S de R, r_ν-simple, avec $\lambda(\overline{S}) < \lambda(r_\nu)$.*

D'après (L_α), $\overline{R}_A = 1$ est une A-identité; soit ρ la A-segmentation concordante et unitaire qu'admet R_A.

Considérons l'ensemble ρ^* des couvertures centrales $C_\rho(r_i)$ correspondant aux r_i semblables à r_ν et soit $C = C_\rho(r_\mu)$, $r_\mu \simeq r_\nu$, un segment minimal de ρ^*.

(A) *Un inter-support C^t de C contient des centres de tout au plus un seul r_i semblable à r_ν; il en est de même pour R_A si $C = R_A$.*

Supposons en effet $i < k$,

$$r_i \simeq r_k \simeq r_\nu, \qquad a_{i,m+k} = c_1(r_i) \in C^t, \qquad a_{km} = c_{-1}(r_k) \in C^t,$$

et notons $S^* = S(a_{i,m+1} a_{km})$; l'hypothèse que C est minimal dans ρ^* entraîne

$$a \in S^* \to S_\rho(a) \subseteq S^*,$$

qui reste valable si $C = R_A$, $a_{i,m+1} = c_1(r_i) \in R_A$, $a_{km} = c_{-1}(r_k) \in R_A$.

L'ensemble des $S_\rho(a)$ avec $a \in S^*$ constitue donc une A-segmentation de S^* concordante et, de même que ρ, unitaire; d'après 2.1, on a par conséquent $\overline{S}^* = 1$.

Si $r_i = r_k$,

$$\bar{S}(r_i r_{k-1}) = a_{i1} \dots a_{im} . \bar{S}^* . a_{km}^{-1} \dots a_{k1}^{-1} = 1,$$

et si $r_i = r_k^{-1}$,

$$\bar{S}(r_i r_k) = a_{i1} \dots a_{im} . \bar{S}^* . a_{k,m+1} \dots a_{k,2m} = 1, \qquad \bar{S}(r_{i+1} r_{k-1}) = r_i^{-1} . S(r_i r_k) . r_k^{-1} = 1,$$

ce qui contredit dans les deux cas l'hypothèse : R irréductible et $\omega(R) \geqq 3$.

D'après (A), si $C = R_\lambda$, R est r_ν-simple et par ailleurs $\lambda(\bar{R}) = 0 < \lambda(r_\nu)$, de sorte qu'on peut prendre $S = R$.

Si $C \neq R_\lambda$, considérons parmi les inter-supports de $C = C_\rho(r_\mu)$, l'inter-support C', unique, contenant des centres de r_μ et posons $C' = S(a_{i,j+1} a_{kh})$. On a d'après (3'), $\bar{C}' = 1$; d'autre part a_{ij} et $a_{k,h+1}$ sont des supports de C appartenant à un même A_α, de sorte que $a_{ij} a_{k,h+1} = a \in A_\alpha$.

Quatre cas sont à distinguer :

1° $c_1(r_i) \notin C'$ et $c_{-1}(r_k) \notin C'$. — Dans ce cas $r_\mu \in S(r_{i+1} r_{k-1})$ et d'après (A), $S(r_{i+1} r_{k-1})$ est r_ν-simple. D'autre part

$$2[\lambda(r_i) - j] < \lambda(r_i) \leqq \lambda(r_\nu), \qquad 2h < \lambda(r_k) \leqq \lambda(r_\nu),$$

donc $\lambda(r_i) - j + h < \lambda(r_\nu)$, et

$$\bar{S}(r_{i+1} r_{k-1}) = a_{i,\lambda(r_i)}^{-1} \dots a_{i,j+1}^{-1} . \bar{C}' . a_{kh}^{-1} \dots a_{k1}^{-1} = a_{i,\lambda(r_i)}^{-1} \dots a_{i,j+1}^{-1} a_{kh}^{-1} \dots a_{k1}^{-1},$$

de sorte que

$$\lambda[\bar{S}(r_{i+1} r_{k-1})] \leqq \lambda(r_i) - j + h < \lambda(r_\nu).$$

On peut prendre $S = S(r_{i+1} r_{k-1})$.

2° $c_1(r_i) \in C'$ et $c_{-1}(r_k) \notin C'$. — On a $r_\mu \in S(r_i r_{k-1})$ qui est r_ν-simple. D'autre part

$$2j \leqq \lambda(r_i) \leqq \lambda(r_\nu), \qquad 2h < \lambda(r_\nu),$$

donc $j + h < \lambda(r_\nu)$, et

$$\bar{S}(r_i r_{k-1}) = a_{i1} \dots a_{ij} a_{kh}^{-1} \dots a_{k1}^{-1},$$

de sorte que

$$\lambda[S(r_i r_{k-1})] \leqq j + h < \lambda(r_\nu).$$

On peut prendre $S = S(r_i r_{k-1})$.

3° $c_1(r_i) \notin C'$ et $c_{-1}(r_k) \in C'$. — Ce cas est analogue à 2° et l'on peut prendre $S = S(r_{i+1} r_k)$.

4° $c_1(r_i) \in C'$ et $c_{-1}(r_k) \in C'$. — On a $r_\mu \in S(r_i r_k)$ qui est r_ν-simple. D'autre part

$$2j \leqq \lambda(r_\nu), \qquad 2[\lambda(r_k) - h] \leqq \lambda(r_k) \leqq \lambda(r_\nu),$$

donc $j + \lambda(r_k) - h \leqq \lambda(r_\nu)$, et

$$\bar{S}(r_i r_k) = a_{i1} \dots a_{ij} a_{k,h+1} \dots a_{k,\lambda(r_k)} = a_{i1} \dots a_{i,j-1} . a . a_{k,h+2} \dots a_{k,\lambda(r_k)},$$

de sorte que

$$\lambda[\overline{S}(r_i r_k)] \leq j + \lambda(r_k) - h - 1 < \lambda(r_\nu).$$

On peut prendre $S = S(r_i r_k)$.

4.2. *Si* $l(R) = 2m+1$, *il existe pour tout* $r_\nu \in R$ *vérifiant* $\lambda(r_\nu) = l(R)$, *et tout* $\varepsilon = \pm 1$, *soit un segment* S_{-1} *de* R, r_ν*-simple à gauche, soit un segment* S_1 *de* R, r_ν*-simple à droite, avec*

$$\overline{S}_{-\eta} = [\overline{M}_{-\eta}^{-1}(r_l).a.\overline{M}]^{\eta}, \qquad a \in A(r_\nu), \qquad \lambda(\overline{M}) \leq m, \qquad \eta = \pm 1,$$

où l'on a l'une des quatre conditions :

(α) $a = 1$;
(β) $\lambda(\overline{M}) < m$;
(γ) $M_{-\eta}(r_l) = M_{-\varepsilon}(r_\nu)$, $M = M_\eta(r_k)$, $r_k \not\simeq r_\nu$;
(δ) *si* r_ν *est non symétrique,* $M_{-\eta}(r_l) = M = M_{-\varepsilon}(r_\nu)$.

Considérons comme dans 4.1, $\overline{R}_A = 1$, la A-segmentation concordante et unitaire ρ qu'admet R_A, l'ensemble ρ^* des couvertures centrales d'éléments semblables à r_ν et soit $C = C_\rho(r_\mu)$, $r_\mu \simeq r_\nu$, un segment minimal de ρ^*.

On a $c(r_\mu) \in C$, donc d'après (2), $S_\rho[c(r_\mu)] \subseteq C$, et puisque C est minimum dans $\rho \cup R_A$ à contenir $c(r_\mu)$, $S_\rho[c(r_\mu)] = C$; $C \in \rho$, *et* $c(r_\mu)$ *est un support de* C.

(A) *Un inter-support* C^t *de* C *ne contient pas des centres d'éléments* r_i *semblables à* r_ν.

En effet, $c(r_i) \in C^t$ entraîne d'après (2^t),

$$C_\rho(r_l) \subseteq S_\rho[c(r_l)] \subseteq C^t \subset C,$$

ce qui contredit l'hypothèse que C est minimal dans ρ^*; $c(r_i)$ *est un support de* C.

Posons $C = S(a_{i,j+1} a_{kh})$; on a d'après (3), $\overline{C} = 1$.

Cherchons maintenant parmi les inter-supports de C, un inter-support C^t contenant une moitié $M_{\eta_l}(r_i)$ avec $M_{\eta_l}(r_i) = M_\varepsilon(r_\nu)$, $r_i \simeq r_\nu$.

Si un tel C^t n'existe pas, r_ν est non symétrique et par ailleurs, en tenant compte également de (A), on conclut que $c(r_\mu)$ est une extrémité de C; soit par exemple $\mu = i$, $j = m$, $a_{i,m+1} = c_0 = c(r_i)$. D'autre part $r_\iota \not\simeq r_\nu$ pour $i < \iota < k$ et si $r_k \simeq r_\nu$ on a $h \leq m+1$. Dans ce dernier cas on peut même supposer $h \leq m$, car $h = m+1$ est contradictoire; en effet si $r_i = r_k$, C^t ou C^u est dans les conditions requises pour C^t et si $r_i = r_k^{-1}$:

$$\overline{S}(r_i r_k) = a_{i1} \ldots a_{im}.\overline{C}.a_{k,m+2} \ldots a_{k,2m+1} = 1, \qquad \overline{S}(r_{i+1} r_{k-1}) = 1.$$

Il reste à étudier le cas :

1° Soit $r_k \not\simeq r_\nu$, soit $r_k \simeq r_\nu$ et $h \leq m$. — Si $c_{-1}(r_k) \notin C$, $S(r_i r_{k-1})$ est r_ν-simple

à gauche et $h \leq m$, d'où

$$\overline{S}(r_i r_{k-1}) = a_{i1} \dots a_{im} a_{kh}^{-1} \dots a_{k1}^{-1} = \overline{M}_{-1}(r_i).\overline{M}, \qquad \lambda(\overline{M}) \leq h \leq m;$$

on peut prendre $S_{-1} = S(r_i r_{k-1})$ car celui-ci vérifie (α).

Si $c_{-1}(r_k) \in C$, on a nécessairement $r_k \not\simeq r_\nu$, donc $S(r_i r_k)$ est r_ν-simple à gauche et $\lambda(r_k) - h \leq m$, d'où

$$\overline{S}(r_i r_k) = a_{i1} \dots a_{im}\, a_{k,h+1} \dots a_{k,\lambda(r_k)} = \overline{M}_{-1}^{-1}(r_i).\overline{M}, \qquad \lambda(\overline{M}) \leq \lambda(r_k) - h \leq m;$$

on peut prendre $S_{-1} = S(r_i r_k)$ car celui-ci vérifie (α).

Si d'autre part il existe C^t avec

$$M_{\eta_t}(r_t) \subseteq C^t, \qquad M_{\eta}(r_t) = M_{\varepsilon}(r_\nu),\ r_t \simeq r_\nu,$$

supposons par exemple $\eta_t = 1$; d'après (A), C^t est nécessairement de la forme $C^t = S(a_{i,m+2} a_{kh})$; toujours d'après (A), $r_t \not\simeq r$ pour $i < t < k$; d'après $(3')$, $\overline{C}^t = 1$; enfin

$$a_{i,m+1}\, a_{k,h+1} = c_{t-1}\, c_t = a \in A(r_\nu).$$

Trois cas sont à distinguer une fois choisi C^t :

2° Soit $\lambda(r_k) < 2m+1$, soit $\lambda(r_k) = 2m+1$ et $a_{k,h+1} \neq c(r_k)$. — Si $c_{-1}(r_k) \notin C^t$, $S(r_i r_{k-1})$ est r_ν-simple à gauche et puisque $a_{k,h+1} \neq c(r_k)$, on a $h < m$, d'où

$$\overline{S}(r_i r_{k-1}) = a_{i1} \dots a_{i,m+1}.\overline{C}^t.a_{kh}^{-1} \dots a_{k1}^{-1} = \overline{M}_{-1}^{-1}(r_i).a_{i,m+1}.\overline{M}, \qquad a_{i,m+1} \in A(r_\nu),$$
$$\lambda(\overline{M}) \leq h < m;$$

on peut prendre $S_{-1} = S(r_i r_{k-1})$ car celui-ci vérifie (β).

Si $c_{-1}(r_k) \in C^t$ d'après (A), $r_k \not\simeq r_\nu$, donc $S(r_i r_k)$ est r_ν-simple à gauche et $\lambda(r_k) - h - 1 < m$, d'où

$$\overline{S}(r_i r_k) = a_{i1} \dots a_{i,m+1}\, a_{k,h+1} \dots a_{k,\lambda(r_k)} = \overline{M}_{-1}^{-1}(r_i).a.\overline{M}, \qquad a \in A(r_\nu),$$
$$\lambda(\overline{M}) \leq \lambda(r_k) - h - 1 < m;$$

on peut prendre $S_{-1} = S(r_i r_k)$ car celui-ci vérifie (β).

3° $\lambda(r_k) = 2m+1$, $a_{k,h+1} = c(r_k)$, $r_k \not\simeq r_\nu$. — Dans ce cas, $S(r_i r_k)$ est r_ν-simple à gauche et $h = m$, d'où

$$\overline{S}(r_i r_k) = a_{i1} \dots a_{i,m+1} \dots a_{k,m+1} \dots a_{\lambda,2m+1} = \overline{M}_{-1}^{-1}(r_i).a.\overline{M}, \qquad a \in A(r_\nu),\ M = M_1(r_k);$$

on peut prendre $S_{-1} = S(r_i r_k)$ car celui-ci vérifie (γ).

Si maintenant $a_{k,h+1} = c(r_k)$, $r_i \simeq r_k \simeq r_\nu$ et si r_ν est symétrique,

$$\overline{S}(r_{i+1} r_{k-1}) = a_{i,2m-1}^{-1} \dots a_{i,m+2}^{-1}\, a_{km}^{-1}\, a_{k1}^{-1} = M_1^{-1}(r_i).\overline{M}_{-1}(r_k) = \overline{M}^{-1}(r_\nu).\overline{M}(r_\nu) = 1,$$

c'est-à-dire, étant donnée l'irréductibilité de R, $k = i+1$.

Ceci étant vrai pour tout inter-support C' compris entre des supports centres de symétriques semblables à r_ν, il s'ensuit que si l'on ne réussit pas à choisir

un C^l vérifiant 2° ou 3°, le segment $S(r_\sigma r_{\sigma'})$ de R déterminé par $C = S[c(r_\sigma), c(r_{\sigma'})]$, ne contient que des r_i symétriques semblables à r_ν et

$$\overline{S}(r_\sigma r_{\sigma'}) = \overline{M}_{-1}^{-1}(r_\sigma).\overline{C}.\overline{M}_1(r_{\sigma'}) = \overline{M}^{-1}(r_\nu).\overline{M}(r_\nu) = 1,$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses faites sur R.

Si par ailleurs, dans le cas de r_ν non symétrique, $a_{k,h+1} = c(r_k)$, $r_i = r_k^{-1}$, on a $h = m$, d'où

$$S(r_i r_k) = a_{i1} \dots a_{i,m+1}\, a_{k,m+1} \dots a_{k,2m+1} = 1, \qquad S(r_{i+1} r_{k-1}) = 1.$$

Il reste à étudier le cas :

4° r_ν non symétrique, $a_{k,h+1} = c(r_k)$, $r_i = r_k \simeq r_\nu$. — Dans ce cas $S(r_i r_{k-1})$ est r_ν-simple à gauche et $h = m$, d'où

$$S(r_i r_{k-1}) = a_{i1} \dots a_{i,m+1} a_{km}^{-1} \dots a_{k1}^{-1} = \overline{M}_{-1}^{-1}(r_i).a_{i,m+1}.\overline{M}, \qquad a_{i,m+1} \in A(r_\nu),$$
$$\overline{M} = M_{-1}(r_k) = M_{-1}(r_i) = M_{-\varepsilon}(r_\nu);$$

on peut prendre $S_{-1} = S(r_i r_{k-1})$ car celui-ci vérifie $(\hat{o})$.

5. Théorème de Kuroš. — Si $X \subseteq \Pi^* A_\alpha$, notons $X(\lambda)$ l'ensemble des $x \in X$ avec $\lambda(x) \leq \lambda$ et soit H un sous-groupe de $\Pi^* A_\alpha$.

$\{\beta_1\}, \{\beta_2\}, \dots, \{\beta_\lambda\}, \dots$ étant des ensembles d'indices, considérons les systèmes de sous-groupes premiers de H,

$$\{B_{\beta_1}^1\} \subseteq \{B_{\beta_2}^2\} \subseteq \dots \subseteq \{B_{\beta_\lambda}^\lambda\} \subseteq \dots$$

définis par récurrence comme suit :

(a') $\{B_{\beta_1}^1\}$ est un système libre bien enchaîné *maximal* tel que

$$B^1 \subseteq H(1).$$

(a) $\{B_{\beta_\lambda}^\lambda\}$ est un système libre bien enchaîné *maximal* tel que

$$\{B_{\beta_{\lambda-1}}^{\lambda-1}\} \subseteq \{B_{\beta_\lambda}^\lambda\}, \qquad B^\lambda \subseteq H(\lambda),$$

où, notation déjà utilisée, B^λ est l'ensemble des éléments principaux des sous-groupes $B_{\beta_\lambda}^\lambda$. Il est évident que la propriété d'un système de sous-groupes d'être libre est une *propriété de caractère fini* et l'on voit d'autre part facilement que la propriété d'un système de sous-groupes premiers de H d'être bien enchaîné est une *propriété inductive*. L'existence des systèmes maximaux $\{B_{\beta_\lambda}^\lambda\}$ est donc assurée par le théorème de Zorn (avec la convention que le système vide de sous-groupes premiers est libre bien enchaîné). Notons :

(b) $\{B_\beta\} = \bigcup \{B_{\beta_\lambda}^\lambda\}$; suivant les remarques ci-dessus $\{B_\beta\}$ est également un système libre bien enchaîné de sous-groupes de H.

5.1. *On a* $H = \Pi^* B_\beta$.

Il suffit d'établir $H \subseteq [B]$. Supposons $H(\lambda - 1) \subseteq [B^{\lambda-1}]$ et montrons que

$$H(\lambda) \subseteq [B^\lambda]. \tag{8}$$

Soit $x \in H(\lambda)$; si $\lambda(x) \leq \lambda - 1$, on a $x \in H(\lambda - 1) \subseteq [B^{\lambda-1}] \subseteq [B^\lambda]$; si $\lambda(x) = \lambda$ et si $x \in B^\lambda_{\beta_\lambda}$ pour un certain β_λ, on a $x \in B^\lambda_{\beta_\lambda} \subseteq [B^\lambda]$.

Considérons donc les éléments $x \in H$ avec $\lambda(x) = \lambda$ et $x \notin B^\lambda_{\beta_\lambda}$ pour tout β_λ; on a $B(x) \cap B^\lambda_{\beta_\lambda} = 1$.

Si $\lambda = 2m$, $B^\lambda \cup B^*(x)$ est un ensemble bien enchaîné; d'après (a) il s'ensuit que $\{B^\lambda_{\beta_\lambda}, B(x)\}$ n'est pas un système libre. Il existe donc, d'après (L_γ), une relation $\overline{R} = 1$ irréductible entre les éléments de $B^\lambda \cup B^*(x)$ qui n'appartiennent pas tous à un même sous-groupe de $\{B^\lambda_{\beta_\lambda}, B(x)\}$ on déduit que $\omega(R) \geq 3$ et que les éléments de R ne sont pas tous symétriques semblables. Puisque $\{B^\lambda_{\beta_\lambda}\}$ est un système libre, il existe $r_\nu \in R$ avec $r_\nu \simeq x$ et d'autre part

$$\lambda(r_\nu) = \lambda(x) = \lambda = l(r).$$

On a par conséquent d'après 4.1, une égalité de la forme

$$x_{-n} \ldots x_{-1} x^{\varepsilon_0} x_1 \ldots x_m = \overline{S},$$

où S est x-simple donc $x \not\simeq x_i \in B^\lambda$, et $\lambda(\overline{S}) \leq \lambda - 1$ donc

$$\overline{S} \in H(\lambda - 1) \subseteq [B^{\lambda-1}] \subseteq [B^\lambda],$$

de sorte que $x \in [B^\lambda]$.

Supposons maintenant $\lambda = 2m + 1$; on montre successivement :

(A) *Tout x avec $\lambda(x) = \lambda$, contigu à un élément de B^λ, appartient à $[B^\lambda]$.*

Si x est contigu à $y \in B^\lambda$, $B^\lambda \cup B^*(x)$ est enchaîné et, dans celui-ci, $\Delta(x) = \Delta(y)$; mais d'après 3.4, $B^\lambda \cup B^*(x)$ est dans ces conditions bien enchaîné. On déduit comme plus haut l'existence de $\overline{R} = 1$ irréductible et de $r_\nu \in R$ avec $r_\nu \simeq x$ et $\lambda(r_\nu) = \lambda(x) = \lambda = l(R)$ de sorte que si ε est déterminé par $M_\varepsilon(r_\nu) = M_{-\varepsilon'}(y)$, on a d'après 4.2 une égalité de la forme

$$(x^{\varepsilon_0} x_1 \ldots x_m)^{\eta_1} = \overline{S}_{-\eta_1} = [\overline{M}^{-1}_{-\eta_1}(x^{\varepsilon_0}).a.\overline{M}]^{\eta_1}, \qquad x \not\simeq x_i \in B^\lambda,$$

où — éventualités (α) et (β) — $\lambda(S_{-\eta_1}) \leq \lambda - 1$, ou bien — éventualités (γ) et (δ) — $S_{-\eta_1}$ est intermédiaire entre deux éléments de B^λ; dans les deux cas $S_{-\eta_1} \in [B^\lambda]$, de sorte que $x \in [B^\lambda]$.

(B) *Tout x avec $\lambda(x) = \lambda$, symétrique, appartient à $[B^\lambda]$.*

Si le symétrique x est enchaînable à $y \in B^\lambda$, soit $z = \overline{M}^{-1}(x).a.\overline{M}_\varepsilon(y)$ l'intermédiaire entre x et y dont l'existence est assurée par 3.2; on a

$$xzy^\xi = \overline{M}^{-1}(x).c(x).a.c^\varepsilon(y).\overline{M}_\varepsilon(y) = z',$$

où z est contigu à $y \in B^\lambda$ et z' est soit tel que $\lambda(z') \leq \lambda - 1$, soit contigu à $y \in B^\lambda$. Si l'on tient compte de (A), on déduit z, $z' \in [B^\lambda]$, de sorte que $x \in [B^\lambda]$.

Si le symétrique x n'est enchaînable à aucun élément de B^λ, $B^\lambda \cup B^*(x)$ est bien enchaîné et l'on déduit comme dans (A) l'existence d'une égalité de la forme

$$(\xi x_1 \dots x_m)^\eta = \bar{S}_{-\eta} = [\bar{M}^{-1}(\xi).a.\bar{M}]^\eta, \qquad \xi \simeq x \not\simeq x_i \in B^\lambda,$$

où — éventualités (α) et (β) — $\lambda(\bar{S}_{-\eta}) \leq \lambda - 1$, ou bien — éventualité (γ) — $\bar{S}_{-\eta}$ est contigu à un élément de B^λ; mais alors

$$\begin{aligned}(x^{\varepsilon_0} x_1 \dots x_m)^\eta &= (x\xi^{-1}\xi x_1 \dots x_m)^\eta = [x.\xi^{-1}.\bar{M}^{-1}(\xi).a.\bar{M}]^\eta \\ &= [\bar{M}^{-1}(\xi).c(x).c^{-1}(\xi).a.\bar{M}]^\eta = S^*_{-\eta},\end{aligned}$$

où $\bar{S}^*_{-\eta}$ est soit tel que $\lambda(\bar{S}^*_{-\eta}) \leq \lambda - 1$, soit contigu à un élément de B^λ; on conclut en faisant intervenir (A) que $\bar{S}^*_{-1} \in [B^\lambda]$ et en définitive $x \in [B^\lambda]$.

(C) *Tout x avec $\lambda(x) = \lambda$ appartient à $[B^\lambda]$.*

Supposons x non symétrique. Si l'on tient compte de (B), $B^\lambda \cup B^*(x)$ est d'après 3.4, bien enchaîné, et l'on déduit comme dans (A), l'existence d'une égalité de la forme

$$(x^{\varepsilon_0} x_1 \dots x_m)^\eta = \bar{S}_{-\eta} = [\bar{M}^{-1}_{-\eta}(x^{\varepsilon_0}).a.\bar{M}], \qquad x \not\simeq x_i \in B^\lambda,$$

où — éventualités (α) et (β) — $\lambda(\bar{S}_{-\eta}) \leq \lambda - 1$, ou bien — éventualité (γ) — $\bar{S}_{-\eta}$ est contigu à un élément de B^λ, ou encore — éventualité (δ) — $\bar{S}_{-\eta}$ est symétrique; on conclut en faisant intervenir (A) et (B) que $\bar{S}_{-\eta} \in [B^\lambda]$ et en définitive $x \in [B^\lambda]$.

Avec la convention que tout x avec $\lambda(x) = 1$ est symétrique, (8) est par ailleurs évidente pour $\lambda = 1$, de sorte qu'elle est valable pour tout λ; on déduit en tenant compte de (b)

$$H = \bigcup H(\lambda) \subseteq \bigcup [B^\lambda] = \Big[\bigcup B^\lambda\Big] = [B].$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. G. Kurosch, *Die Untergruppen der freien Produkte von belibigen Gruppen* (*Math. Ann.*, t. 109, 1934, p. 647-660).

[2] H. W. Kuhn, *Subgroup theorems for groups presented by generators and relations* (*Ann. of Math.*, t. 56, 1952, p. 22-46).

[3] M. Hall, *Subgroups of free products* (*Pacific J. Math.*, t. 3, 1953, p. 115-120).

[4] A. G. Kuroš, *The theory of groups*, II (Chelsea, New York, 1956).

[5] A. J. Weir, *The Reidemeister-Schreier and Kuroš subgroup theorems* (*Mathematika G. B.*, t. 3, 1956, p. 47-55).

[6] J. Petresco, *Sur les groupes libres* (*Bull. Sc. math.*, t. 80, 1956, p. 6-32).

SUR LA NON-TOTALITÉ
DE
CERTAINES SUITES D'EXPONENTIELLES
SUR DES INTERVALLES ASSEZ LONGS

Par M. Paul KOOSIS (1).

Introduction. — Considérons une suite croissante de nombres $\lambda_n > 0$; on suppose que cette suite a une densité finie, c'est-à-dire, $\frac{n}{\lambda_n}$ tend vers une limite $D < \infty$ quand $n \to \infty$. On sait depuis longtemps ([1], p. 235), que l'ensemble des exponentielles $\exp(\pm i\lambda_n x)$ est total sur chaque intervalle de longueur $< 2\pi D$, et L. Schwartz ([2], p. 130) a énoncé une hypothèse affirmant que cet ensemble n'est total sur aucun intervalle de longueur $> 2\pi D$. Cependant, cette hypothèse, si belle qu'elle soit, est inexacte; en effet, on doit à J.-P. Kahane [3] un exemple d'une suite $\{\lambda_n\}$ de densité *zéro* pour laquelle l'ensemble des exponentielles $\exp(\pm i\lambda_n x)$ est total sur *chaque* intervalle fini.

Ce résultat intéressant suggère le problème suivant :

Quelles sont les conditions (outre celle d'avoir une densité exacte D) qu'il faut imposer sur la suite $\{\lambda_n\}$ pour que $\{\exp(\pm i\lambda_n x)\}$ ne soit total sur aucun intervalle de longueur $> 2\pi D$?

Ce problème nous semble assez difficile, et nous sommes loin de l'avoir résolu. Ce que nous voulons exposer ici, c'est une méthode générale et simple pour traiter certaines questions liées au problème. Elle ne semble pas assez puissante pour donner une solution complète; en fait, nous ne croyons pas qu'on pourrait la pousser beaucoup plus loin que nous l'avons fait. Mais il nous semble quand même utile de la présenter, d'autant plus qu'elle met dans le

(1) Fellow of the National Science Foundation.

même cadre tous les résultats isolés connus jusqu'ici à cet égard, aussi bien que d'autres, positifs et négatifs.

Je veux exprimer ma vive reconnaissance à M. Kahane, avec qui j'ai souvent discuté ce problème, et qui m'a donné quelques idées importantes. Je dois aussi reconnaître des suggestions de M. C. Hertz.

1. Sur un théorème de Paley-Wiener. — A chaque suite croissante de nombres positifs λ_n, on associe sa *fonction caractéristique* $n(t)$ définie par

$$n(t) = \sup \{ n \mid \lambda_n \leq t \}.$$

La fonction $n(t)$ est non décroissante et constante entre les points λ_n, en chacun desquels sa valeur saute d'une unité. Il est évident que, inversement, chaque fonction ayant ces propriétés correspond à une suite croissante $\{\lambda_n\}$ et une seule; pour définir une suite particulière $\{\lambda_n\}$ il suffira de définir la fonction $n(t)$ et nous parlerons souvent de « la suite $n(t)$ » au lieu de dire « la suite ayant $n(t)$ comme fonction caractéristique ».

Dire qu'une suite $n(t)$ est de densité D, c'est dire que $\frac{n(t)}{t} \to \mathrm{D}$, $t \to \infty$. Nous nous occuperons, la plupart du temps (mais pas toujours) de suites de densité $\mathrm{D} > 0$, et écrirons $n(t) - \mathrm{D}t = \psi(t)$; la fonction $\psi(t)$ mesure dans un certain sens l'écart de la suite donnée d'une progression arithmétique exacte. On aura toujours $\frac{\psi(t)}{t} \to 0$, $t \to \infty$.

La non-totalité des exponentielles $\exp(\pm i\lambda_n x)$ est étroitement liée aux propriétés du produit canonique

$$\mathrm{C}(z) = \prod_n \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

On sait que si la suite λ_n est de densité D, $\mathrm{C}(z)$ est une fonction entière de type exponentiel D. De plus, si $|\mathrm{C}(z)|$ est bornée par une puissance de z sur l'axe réel, soit la $m^{\text{ième}}$, la fonction

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} \sin \frac{\varepsilon z}{m+2}\right)^{m+2} \mathrm{C}(z)$$

sera de type exponentiel $\mathrm{D} + \varepsilon$ et intégrable sur l'axe réel, donc (théorème de Paley-Wiener, *voir* [1], p. 107) la transformée de Fourier d'une fonction continue $\varphi(t)$ s'annulant pour $|t| > \pi(\mathrm{D} + \varepsilon)$, et l'on aura

$$\int e^{\pm i\lambda_n t} \varphi(t)\, dt = 0$$

pour tous n, d'où l'on constate que les $e^{\pm i\lambda_n t}$ ne sont pas totales sur l'intervalle

$(-\pi(D+\varepsilon),\ \pi(D+\varepsilon))$. En prenant $\varepsilon > 0$ arbitraire, on voit bien que les exponentielles $e^{\pm i\lambda_n x}$ ne sont totales sur aucun intervalle de longueur $> 2\pi D$.

Il est aussi important pour d'autres applications d'avoir un critère pour la majorisation de la fonction $|C(z)|$ par un polynome sur l'axe réel, et nous commençons par l'étude de cette question. La lettre x désignera toujours une variable réelle; rappelons aussi que tous les λ_n sont supposés *positifs*, c'est-à-dire $n(t) = 0$ pour t assez près à zéro.

LEMME 1. — *Si x n'est pas un zéro de* $C(z)$,

$$\log|C(x)| = 2\int_0^1 \frac{\frac{\psi(x\tau)}{\tau} - \tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau.$$

Démonstration. — Prenons un $\lambda < 1$. On a, après une intégration par parties,

$$\int_0^{\lambda x} \log\left(\frac{x^2}{t^2} - 1\right) dn(t) = n(\lambda x)\log\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} + \int_0^{\lambda x} \frac{2x^2}{x^2-t^2}\,\frac{n(t)}{t}\,dt$$

$$= n(\lambda x)\log\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} + 2\int_0^{\lambda} \frac{\frac{n(x\tau)}{\tau}}{1-\tau^2}\,d\tau,$$

en posant $\frac{t}{x} = \tau$.

De la même façon,

$$\int_{\frac{x}{\lambda}}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{t^2}\right) dn(t) = -n\left(\frac{x}{\lambda}\right)\log(1-\lambda^2) - 2\int_0^{\lambda} \frac{\tau n\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau,$$

après avoir, d'abord, intégré par parties et, ensuite, posé $\frac{x}{t} = \tau$. [On utilise le fait que

$$n(t)\log\left(1 - \frac{x^2}{t^2}\right) \sim \frac{x^2 n(t)}{t^2} \to 0 \qquad \text{pour} \quad t \to \infty,$$

conséquence de ce que la suite $n(t)$ a une densité finie.]

Ainsi

$$\left\{\int_0^{\lambda x} + \int_{\frac{\lambda}{x}}^{\infty}\right\} \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| dn(t)$$

$$= \left(n(\lambda x) - n\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)\log(1-\lambda^2) + n(\lambda x)\log\frac{1}{\lambda^2} + 2\int_0^{\lambda} \frac{\frac{n(x\tau)}{\tau} - \tau n\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau.$$

Si x n'est pas un zéro de $C(z)$, $n(x\lambda) - n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 0$ pour λ assez près à 1,

donc, en faisant tendre λ vers 1, $\log\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\to 0$, et la dernière expression devient

$$\log|C(x)| = 2\int_0^1 \frac{\frac{n(x\tau)}{\tau} - \tau n\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau. \tag{1}$$

Or, $n(t) = Dt + \psi(t)$, ce qui, après substitution dans (1), donne le lemme.

Complément du lemme 1. — *Pour n'importe quel* $\lambda < 1$,

$$\log|C(x)| \leq n(x)\log\frac{1}{\lambda^2} + 2\int_0^\lambda \frac{\frac{\psi(x\tau)}{\tau} - \tau\psi\frac{(x)}{\tau}}{1-\tau^2}\,d\tau,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $n(x\lambda) = n\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

Démonstration. — C'est évident si $C(x) = 0$, car alors $\log|C(x)| = -\infty$. Supposons donc que x n'est pas un zéro de $C(z)$, et utilisons la formule (1). Pour $\tau \leq 1$,

$$n(\tau x) \leq n(x), \qquad n\left(\frac{x}{\tau}\right) \geq n(x),$$

d'où

$$\int_\lambda^1 \left(\frac{n(x\tau)}{\tau} - \tau n\left(\frac{x}{\tau}\right)\right)\frac{d\tau}{1-\tau^2} \leq n(x)\int_\lambda^1 \tau^{-1}\,d\tau = n(x)\log\frac{1}{\lambda},$$

et l'on aura l'égalité si et seulement si

$$n(x\tau) = n(x) = n\left(\frac{x}{\tau}\right), \qquad \lambda \leq \tau \leq 1.$$

De l'intégrale de droite dans (1) il reste une partie prise entre les limites 0 et λ, et la démonstration s'achève comme celle du lemme.

D'habitude on se servira du complément avec λ pris comme fonction de x convenable.

Théorème 1 (de Paley-Wiener). — *Si* $|\psi(t)| < \text{Cte}$, $|C(x)|$ *est bornée par une puissance de* x *pour* x *assez grand.*

Remarque. — Ce résultat, jusqu'alors le seul connu de son genre, a été obtenu par Paley et Wiener ([4], p. 92) en faisant une comparaison entre $C(x)$ et $\frac{\sin\frac{\pi x}{D}}{\frac{\pi x}{D}}$. Paley et Wiener ont écrit l'hypothèse dans une forme un peu différente, à savoir, $|D\lambda_n - n| < \text{Cte}$; il est cependant aisé de voir que cette formulation équivaut à la nôtre.

Démonstration du théorème. — Utilisons le complément du lemme 1 avec $1-\lambda^2=\frac{1}{x}$.

Supposons que $|\psi(t)|<K$. Par la définition même de $\psi(t)$, il est clair que

$$|\psi(t)|=O(t), \qquad 0\leq t\leq 1,$$

d'où

$$2\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{|\psi(x\tau)|}{\tau(1-\tau^2)}\,d\tau=O\left(x\log\frac{x+1}{x-1}\right)=O(1) \qquad (x\to\infty).$$

Ensuite,

$$2\int_{\frac{1}{x}}^{\lambda}\frac{|\psi(x\tau)|\,d\tau}{(1-\tau^2)\tau}\leq 2K\int_{\frac{1}{x}}^{\lambda}\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)}=K\log\frac{\lambda^2(x^2-1)}{1-\lambda^2}\leq 3K\log x$$

et

$$2\int_0^{\lambda}\frac{\tau\left|\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)\right|}{1-\tau^2}\,d\tau\leq 2K\int_0^{\lambda}\frac{\tau\,d\tau}{1-\tau^2}=K\log\frac{1}{1-\lambda^2}=K\log x.$$

Enfin,

$$n(x)\log\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\leq 2Dx\log\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}=O(1) \qquad (x\to\infty)$$

et

$$\log|C(x)|\leq O(1)+4K\log x \qquad (x\to\infty).$$

C. Q. F. D.

Il est naturel d'essayer d'étendre ce théorème, de façon à avoir le même résultat en changeant l'hypothèse en quelque chose comme, par exemple,

$$|\psi(t)|<O(\log\log t).$$

Or, il est remarquable que le théorème de Paley-Wiener est, dans un certain sens, le meilleur possible de sa forme, comme nous allons voir par un exemple. Le même fait sera la conséquence des résultats généraux que nous établirons plus tard; la valeur de l'exemple que nous donnons maintenant, c'est de montrer qu'on peut même avoir $|\psi(t)|<1$ sur des intervalles assez longs, et pas trop grands ailleurs, sans avoir la conclusion du théorème 1.

Exemple 1. — Étant donné une fonction $\omega(t)$ croissant vers l'infini aussi lentement qu'on veut, et telle que

$$\omega(t)=o(t) \qquad (t\to\infty).$$

Il existe une suite $n(t)$ telle que

$$|n(t)-Dt|\leq\omega(t)+1,$$

mais pour laquelle le produit canonique associé n'est majoré par aucune puissance de x quand $x\to\infty$.

Preuve. — Il est commode de poser $D = 1$, ce qui n'équivaut qu'à un changement de variable.

Commençons avec un $x > 100$ pour lequel $\frac{\omega(t)}{t} < \frac{1}{2}$, $t > \sqrt{x}$, et posons

$$n(t) = [t], \qquad 0 \leq t \leq 2, \tag{2}$$

$$n(t) = \left[t + \frac{t-2}{\sqrt{x}-2}\,\omega(t) \right], \qquad 2 \leq t \leq \sqrt{x}, \tag{3}$$

$$n(t) = [t + \omega(\sqrt{x})], \qquad \sqrt{x} \leq t \leq \frac{x}{2}, \tag{4}$$

$$n(t) = \left[t + 2\omega(\sqrt{x})\left(1 - \frac{t}{x}\right) \right], \qquad \frac{x}{2} \leq t \leq x, \tag{5}$$

$$n(t) = [t], \qquad x \leq t \leq x^2; \tag{6}$$

comme d'habitude, on a désigné par $[a]$ le plus grand nombre entier $\leq a$. Pour le moment, $n(t)$ n'est pas précisé pour $t > x^2$; convenons seulement que quand nous l'y définirons tout à l'heure, nous le ferons de façon que $|n(t) - t|$ restera $\leq \omega(t) + 1$.

La fonction $n(t)$, comme nous venons de la définir, ne décroît pas. C'est évident sauf, peut-être, dans le cas de la formule (5), et on le vérifie là en prenant la dérivée par rapport à t de la quantité entre [ ].

On a toujours

$$[t] \leq n(t) \leq t + \omega(t),$$

d'où

$$|n(t) - t| \leq \omega(t) + 1.$$

L'inégalité $[t] \leq n(t)$ entraîne

$$\psi(t) = n(t) - t \geq -1;$$

d'ailleurs

$$|\psi(t)| = |n(t) - t| \leq t, \qquad 0 \leq t \leq 2, \tag{7}$$

$$\psi(t) = [t + \omega(\sqrt{x})] - t \geq \omega(\sqrt{x}) - 1, \qquad \sqrt{x} \leq t \leq \frac{x}{2}, \tag{8}$$

$$\psi(t) = [t] - t \leq 0, \qquad x \leq t \leq x^2. \tag{9}$$

Maintenant, il convient de prendre x égal à un nombre de la forme $N + \frac{1}{2}$, N entier; il suit de (5) et (6) que pour $\lambda = 1 - \frac{1}{3x}$, $n(\lambda x) = n\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. En se servant du complément du lemme 1, on aura donc

$$\log|C(x)| = 2n(x)\log\frac{1}{\lambda} + 2\int_0^\lambda \frac{\frac{\psi(x\tau)}{\tau} - \tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau,$$

avec ce λ, le premier terme de droite étant positif. De (9) on aura

$$-2\int_0^\lambda \frac{\tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau \geq 0, \tag{10}$$

de (7),

$$(11)\qquad \left| 2\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\psi(x\tau)}{\tau(1-\tau^2)}\,d\tau \right| \leq x \log\frac{x+1}{x-1} \leq 3 \qquad (x>100)$$

et de (8),

$$(12)\qquad 2\int_{\frac{1}{x}}^{\lambda} \frac{\psi(x\tau)}{\tau(1-\tau^2)}\,d\tau \geq \left\{ \omega(\sqrt{x}) \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{x}}^{\lambda} \right\} \frac{2\,d\tau}{\tau(1-\tau^2)}$$

$$= \omega(\sqrt{x}) \log\frac{x-1}{3} - \log\frac{(x^2-1)\lambda^2}{1-\lambda^2} \geq \omega(\sqrt{x}) \log\frac{x}{4} - \log 3x^3.$$

Pour ce qui reste, on a

$$(13)\qquad \left| 2\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau \right| \leq \frac{2}{3}\, x \log\frac{x+1}{x-1} \leq 2,$$

vu que $x>100$ et $|\psi(t)|$ sera

$$\leq \omega(t)+1 < \frac{2}{3}t \quad \text{pour} \quad t>x^2.$$

Des estimations (10), (11), (12) et (13), il résulte enfin que

$$\log|C(x)| \geq (\omega(\sqrt{x})-3)\log\left(\frac{x}{4}\right) - \log 192 - 5.$$

Le procédé est maintenant à poursuivre en choisissant d'abord un nombre X, moitié d'un entier impair, tel que $\sqrt{X}>x^2$, puis en posant

$$n(t) = \left[t + \frac{t-x^2}{\sqrt{X}-x^2}\,\omega(t) \right], \qquad x^2 \leq t \leq \sqrt{X},$$

$$n(t) = \left[t + \omega(\sqrt{X}) \right], \qquad \sqrt{X} \leq t \leq \frac{X}{2},$$

$$n(t) = \left[t + 2\omega(\sqrt{X})\left(1-\frac{t}{X}\right) \right], \qquad \frac{X}{2} \leq t \leq X,$$

$$n(t) = [t], \qquad X \leq t \leq X^2.$$

On vérifie tout de suite qu'on a toujours

$$|n(t)-t| \leq \omega(t)+1 \qquad \text{et} \qquad n(t)-t \geq -1.$$

En reprenant les mêmes calculs que nous venons de faire, on trouve donc

$$\log|C(X)| \geq (\omega(\sqrt{X})-3)\log\left(\frac{X}{4}\right) - \log 192 - 5.$$

De cette façon, on construit en étapes successives toute la suite $n(t)$, avec

$$|n(t)-t| \leq \omega(t)+1,$$

aussi bien qu'une suite de nombres $x_n \to \infty$ ($x_1 = x$, $x_2 = X$, ...) pour lesquels

$$|C(x_n)| \geq \frac{1}{192\, e^5}\left(\frac{x_n}{4}\right)^{(\omega(\sqrt{x_n})-3)}.$$

Puisque $\omega(\sqrt{x_n}) \to \infty$, avec n, le produit canonique $C(x)$ associé à la suite $n(t)$ est supérieur à n'importe quelle puissance de x quand x tend vers l'infini en prenant les valeurs x_n.

2. Théorèmes de remplacement et de comparaison. — Dans les raisonnements ultérieurs, il sera très commode, au lieu de baser les considérations sur l'étude des fonctions $n(t)$ et $\psi(t)$, de pouvoir se servir d'autres qui jouissent d'un comportement plus régulier. Dans ce numéro, on fera le nécessaire pour assurer qu'un tel remplacement est permis.

Lemme 2. — *Soit $\nu(t)$ une fonction non décroissante.*

Pour $z = x + iy$ (y réel), on a

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\nu(t) \leq \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\nu(t).$$

Démonstration. — Si t est réel,

$$\left|\frac{t \pm x}{t \pm z}\right| \leq 1, \qquad \text{d'où} \qquad \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| \leq \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right|.$$

Lemme 3. — *Soit $\nu(t)$ une fonction continue, non décroissante, et dérivable, sauf en des points isolés.*

Soient $\nu(0) = 0$, $\nu(t) = O(t)$, $t \to \infty$, et $\nu'(t)$ (toutes les fois qu'elle existe) bornée sur chaque intervalle bornée. Alors, l'intégrale

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\nu(t) \tag{14}$$

converge absolument pour $\Im z \geq 0$, et y définit une fonction harmonique $F(z)$. $F(z)$ est continue dans le demi-plan fermé $\Im z \geq 0$ et

$$F(z) \leq O(|z|) \qquad (|z| \to \infty).$$

Démonstration. — Supposant d'abord que $z = x$ réel, on a

$$\log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| = O(t^{-2}) \qquad \text{pour} \quad t > 2|x|,$$

donc l'intégrale (14) prise entre les limites $2|x|$ et ∞ converge absolument, car

$$\int_1^\infty t^{-2}\, d\nu(t) < \infty.$$

D'autre part, si

$$|\nu'(t)| < K, \qquad 0 < t < 2|x|,$$

l'intégrale (14) prise entre les limites 0 et $2|x|$ est majorée par

$$K\int_0^{2|x|} \left|\log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right|\right| dt < \infty.$$

Si $z = x + iy$, $y \geq 0$, on a, comme dans le lemme 2,

$$\log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| \leq \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| \leq \log\left|1 + \frac{|z|^2}{t^2}\right|$$

et

$$\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{|z|^2}{t^2}\right) d\nu(t) = \int_0^\infty \frac{|z|^2}{t^2 + |z|^2} \frac{\nu(t)}{t}\, dt = O(|z|),$$

en intégrant par parties. Ceci, avec l'estimation faite ci-dessus, montre que l'intégrale (14) converge absolument dans le cas général.

Il est alors évident que l'intégrale (14) est une fonction harmonique de z pour $\Im z > 0$, car il en est ainsi de $\log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right|$ pour chaque $t > 0$. Il nous reste à montrer que la fonction $F(z)$ ainsi définie est continue à la frontière $\Im z = 0$. Pour x réel supposons que $z = x + \delta$, δ étant une quantité complexe qu'on va faire tendre vers zéro. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut écrire

$$|F(z) - F(x)| \leq \int_{|t^2 - x^2| > \varepsilon} \left|\log\left|\frac{t^2 - z^2}{t^2 - x^2}\right|\right| d\nu(t) + 2K\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\log|s||\, ds$$
$$+ K\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\log|s^2 \operatorname{sgn} s - 2\delta x - \delta^2||\, ds,$$

où l'on a posé

$$s = \sqrt{|t^2 - x^2|}\, \operatorname{sgn}(t^2 - x^2),$$

$K < \infty$ étant une borne pour $\left|\nu'(t)\frac{\sqrt{t^2 - x^2}}{t}\right|$ sur l'intervalle $|t^2 - x^2| \leq \varepsilon$. Faisons encore décroître ε (cependant, K ne croît pas) jusqu'à ce que les deux dernières intégrales soient au-dessous d'une borne choisie à l'avance mais aussi petite qu'on veut, lorsque $\delta <$ un δ_0 fixé. Après avoir fixé un tel ε, on remarque que $\left|\log\left|\frac{t^2 - z^2}{t^2 - x^2}\right|\right| \to 0$ uniformément pour $|t^2 - x^2| > \varepsilon$ quand $\delta \to 0$, en restant toujours bornée par $\frac{\text{Cte}}{t^2}$ pour t grand. Puisque $\int_1^\infty t^{-2}\, d\nu(t) < \infty$, ceci montre que

$$|F(z) - F(x)| \to 0, \qquad z \to x.$$

Lemme 4. — *Soient $\nu_1(t)$ et $\nu_2(t)$ deux fonctions non décroissantes, $O(t)$ pour $t \to \infty$, et ayant des dérivées bornées pour $0 \leq t \leq 1$. Supposons que*

$$|\nu_1(t) - \nu_2(t)| < \text{Cte}.$$

Alors, pour $y > 0$ fixé et $z = x + iy$, les deux intégrales

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\nu_k(t) \quad (k = 1 \text{ et } 2)$$

convergent absolument, et leur différence est $O(\log x)$ *pour* $x \to \infty$.

Démonstration. — Car $\log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right|$ est, pour z fixé avec $\Im z > 0$, bornée inférieurement comme fonction de t, la preuve de la convergence absolue s'achève comme dans la démonstration du lemme 3.

On a

$$\int_0^1 \log\left|\frac{z^2}{t^2} - 1\right| d\nu_k(t) \leq \text{Cte} \int_0^1 \log\left|\frac{z^2}{t^2} - 1\right| dt = O(\log x)$$

pour $x \to \infty$, $k = 1$ et 2. Considérons alors l'expression

$$\int_1^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| (d\nu_1(t) - d\nu_2(t)). \tag{15}$$

Moyennant un simple croquis, il est aisé de voir que $\log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right|$ décroît de $\log|z^2 - 1|$ jusqu'à $-\log\left(\frac{|z|^2}{\Im z^2}\right)$ quand t augmente de 1 à $\frac{|z|^2}{\sqrt{\Re z^2}}$, et puis tend en croissant vers zéro quand t continue à augmenter vers l'infini. En se servant de ce fait et de ce que $|\nu_1(t) - \nu_2(t)| \leq K$, une intégration par parties montre que l'intégrale (15) est égale à une expression de la forme

$$A \log \frac{|z|^2}{\Im z^2} + B \log \frac{|z^2 - 1| \cdot |z|^2}{\Im z^2} + C \log \frac{|z|^2}{\Im z^2}, \tag{16}$$

où A, B et C sont des quantités dépendantes de z, mais toujours inférieures à $2K$ en valeur absolue. Et pour $z = x + iy$ avec $y > 0$ fixé, l'expression (16) est bien $O(\log x)$ pour $x \to \infty$.

Le résultat suivant constitue un principe général, assez important pour la comparaison des produits canoniques.

Théorème 2. — *Soient* $C_1(z)$ *et* $C_2(z)$ *les produits canoniques correspondant aux suites* $n_1(t)$ *et* $n_2(t)$ *de densité finie.*

Si $|n_1(t) - n_2(t)| < \text{Cte}$, *la majoration de* $|C_1(x)|$ *par un polynome en* x *entraîne celle de* $|C_2(x)|$ (*avec, peut-être, un autre polynome*).

Démonstration. — $C_1(z)$ est de type exponentiel fini, donc par le théorème de Phragmén-Lindelöf, l'inégalité $|C_1(x)| \leq Ax^K + B$ entraîne une inégalité de la même forme avec $C_1(x)$ remplacée par $C_1(x + iy)$, $y > 0$ fixé. Le lemme 4 montre alors qu'il en est de même pour $C_2(x + iy)$ (avec, peut-être, des constantes A, B et K différentes), et, enfin, pour $C_2(x)$ par le lemme 2.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3. — *Soit* $C(z)$ *le produit canonique associé à une suite* $n(t)$ *de densité finie. Soit* $\nu(t)$ *une fonction satisfaisant à l'hypothèse du lemme* 3, *et soit* $|n(t)-\nu(t)|<\text{Cte}$. *Alors,* $|C(x)|$ *est bornée par un polynome en* x *si et seulement si*

$$\int_0^\infty \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| d\nu(t) \leq O(\log x) \qquad (x\to\infty).$$

Démonstration. — Fixons un $y>0$. Si $|C(x)|$ est bornée par un polynome en x on voit, comme dans la démonstration du théorème 2, que

$$F(z)\equiv\int_0^\infty \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| d\nu(t) \leq O(\log x),$$

avec $z=x+iy$ et $x\to\infty$, donc, par le lemme 2, le même résultat avec z remplacé par x.

Si, en revanche, $F(x)\leq O(\log x)$ pour $x\to\infty$, on peut, par le lemme 3, appliquer le théorème de Phragmén-Lindelöf à la fonction $F(z)$ harmonique et continue dans $\mathcal{I}z\geq 0$; on en déduit que $F(z)\leq \text{Cte}(\log|z|+y)$, ce qui est $O(\log x)$ pour $z=x+iy$, y fixé, et $x\to\infty$. Comme tout à l'heure, on aura

$$\log|C(z)| \leq O(\log x) \qquad (x\to\infty),$$

et, enfin, la même inégalité avec x au lieu de z. C. Q. F. D.

3. RÉSULTATS BASÉS SUR LE THÉORÈME 3. UNE CONDITION NÉCESSAIRE. — Considérons une suite $n(t)$. Soit L la ligne polygonale qui relie successivement le point $(0, 0)$ à $(\lambda_1, 1)$, puis $(\lambda_1, 1)$ à $(\lambda_2, 2)$ et ainsi de suite. Nous appellerons L le *graphique* de la suite $n(t)$. Si, pour $t\geq 0$, $\nu(t)$ est l'ordonnée de L correspondant à l'abscisse t, $\nu(t)$ est une fonction continue, croissant avec t, et $\nu'(t)$ existe à l'intérieur de chaque intervalle $(\lambda_{n-1}, \lambda_n)$, où elle prend la valeur constante $(\lambda_n-\lambda_{n-1})^{-1}$.

Il est évident que $n(t)=[\nu(t)]$, $t\geq 0$, donc, si $\frac{n(t)}{t}\to D$, $t\to\infty$, il en est de même avec $n(t)$ remplacée par $\nu(t)$. On a d'ailleurs

$$\nu(t)-1<n(t)\leq\nu(t),$$

et il résulte que le théorème 3 est valable pour cette fonction $\nu(t)$.

Si la suite $n(t)$ est de densité $D<\infty$, il convient de poser $\nu(t)-Dt=\theta(t)$, notation que nous conserverons dans la suite. La fonction $\theta(t)$ joue un rôle analogue à celui de $\psi(t)$ utilisée dans le paragraphe 1, mais, vu qu'elle est continue et même dérivable sauf aux points isolés λ_n, elle convient davantage que celle-ci à nos considérations. Remarquons que $|\theta(t)-\psi(t)|\leq 1$, $\frac{\theta(t)}{t}\to 0$ pour $t\to\infty$, et que $\theta(0)=0$.

Correspondant au lemme 1 et son complément, on a le

LEMME 5 :

$$\int_0^\infty \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| d\nu(t) = 2\int_0^1 \frac{\frac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau$$

$$\leq \nu(x)\log\frac{1}{\lambda^2} + 2\int_0^\lambda \frac{\frac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau \qquad \textit{pour} \quad 0<\lambda<1.$$

Sauf, pour des petits détails, la démonstration en est de même que pour le lemme 1.

Et du théorème 3 on tire immédiatement :

THÉORÈME 4. — *Le produit canonique* $C(x)$ *est majoré par un polynome en* x *si et seulement si*

$$\frac{1}{\log x}\int_0^1 \frac{\frac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau$$

est bornée supérieurement pour $x\to\infty$.

Ce théorème peut être mis sous une forme plus commode. On a

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)\right) = -\frac{\theta(x\tau)-x\tau\theta'(x\tau)}{\tau^2} - \left(\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)-\frac{x}{\tau}\theta'\left(\frac{x}{\tau}\right)\right);$$

donc, pour $0<\delta<\lambda<1$, une intégration par parties donne

$$2\int_\delta^\lambda \frac{\frac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau = \left(\frac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)\right)\log\frac{1+\tau}{1-\tau}\Big]_\delta^\lambda$$

$$+\int_\delta^\lambda \log\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)\frac{\theta(x\tau)-x\tau\theta'(x\tau)}{\tau^2}\,d\tau$$

$$+\int_\delta^\lambda \left(\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)-\frac{x}{\tau}\theta'\left(\frac{x}{\tau}\right)\right)\log\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)d\tau.$$

De sa définition, il s'ensuit que $\theta(t)$ satisfait à une condition de Lipschitz en chaque point, donc le premier terme de droite tend vers zéro pour $\delta\to 0$, $\lambda\to 1$. En même temps, le deuxième terme de droite devient

$$\int_0^1 \log\left|\frac{1+t}{1-\tau}\right|\frac{\theta(x\tau)-x\tau\theta'(x\tau)}{\tau^2}\,d\tau,$$

et le troisième,

$$\int_1^\infty \log\left|\frac{1+\tau}{t-1}\right|\frac{\theta(xt)-xt\theta'(xt)}{t^2}\,dt,$$

en posant $\frac{1}{\tau}=t$.

Définissons une nouvelle fonction $I(t)$ par $I(t) = \theta(t) - t\theta'(t)$; $I(t)$ s'appellera la *fonction indicatrice* de la suite $n(t) = [Dt + \theta(t)]$. D'après le lemme 5 on a alors le

LEMME 6 :

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\nu(t) = \int_0^\infty \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \frac{I(xt)}{t^2}\, dt. \tag{17}$$

[Selon sa définition, la fonction $I(t)$ est bornée sur des intervalles finis, et $O(t)$ pour $t \to 0$. Prise entre des limites finies, l'intégrale de droite dans (17) converge donc absolument, et est ainsi à entendre comme intégrale impropre (par rapport à sa limite supérieure) lorsqu'on le prend entre 0 et ∞.]

Le théorème 4 devient :

THÉORÈME 5. — *Le produit canonique* $C(x)$ *associé à une suite* $n(t)$ *est majoré par un polynome en* x *si et seulement si*

$$\int_0^\infty \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \frac{I(xt)}{t^2}\, dt \leq O(\log x) \qquad (x \to \infty),$$

$I(t)$ *étant la fonction indicatrice de la suite* $n(t)$.

La fonction $I(t)$ a un rapport géométrique simple avec le graphique L de la suite $n(t)$. En effet, l'identité

$$I(t) = \theta(t) - t\theta'(t) = \nu(t) - t\nu'(t)$$

fait apparaître $I(t)$ comme ordonnée à l'origine de la tangente à L au point d'abscisse t. Notons aussi que

$$I(t) = -t^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\theta(t)}{t}\right),$$

d'où il résulte qu'on peut toujours déterminer $\theta(t)$ si $I(t)$ est connue, puisque $\theta(t) = o(t)$, $t \to \infty$.

Il est, selon le cas, plus ou moins difficile de vérifier si la condition du théorème 5 est satisfaite ou non par une suite donnée. Citons seulement quelques corollaires généraux de ce théorème, conséquences directes de notre interprétation géométrique.

La quantité $t^{-2} \log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|$ est positive pour $t > 0$. Aussi, comme l'on voit immédiatement avec l'aide d'un croquis, la fonction indicatrice $I(t)$ est respectivement non négative et non décroissante ou non positive et non croissante selon que L est concave ou convexe. De là :

COROLLAIRE 1. — *Si le graphique d'une suite est convexe, son produit canonique associé est majoré par un polynome sur l'axe réel.*

Pour $I(t) \geq o$ et non décroissante, l'intégrale (17) de droite est supérieure à

$$I(\sqrt{x}) \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\infty} t^{-2} \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| dt = I(\sqrt{x}) (\log x + O(1)).$$

Un simple raisonnement géométrique montre que $I(t)$ ne peut pas être bornée à moins que $\theta(t)$ ne le soit, d'où :

Corollaire 2. — *Le produit canonique associé à une suite $n(t)$ avec* graphique concave *n'est majoré par un polynome sur l'axe réel que si $\theta(t)$ (et donc $|n(t) - Dt|$) est bornée.*

Pour une suite $n(t)$ quelconque de densité $D > o$, on peut toujours former le polygone de Newton correspondant à l'ensemble de points (λ_n, n); c'est la plus haute courbe convexe qui se trouve au-dessous de la graphique L. Le corollaire 1 donne avec le théorème 2 :

Corollaire 3. — *Si tous les points (λ_n, n) se trouvent à distance bornée de leur polygone de Newton, le produit canonique $C(x)$ associé à la suite $\{\lambda_n\}$ est majoré par un polynome en x.*

Remarquons que l'hypothèse du corollaire 3 est toujours satisfaite quand les côtés du polygone de Newton ont une longueur bornée.

Les corollaires 1 et 3 constituent des résultats positifs qui ne sont pas contenus dans le théorème 1.

Maintenant, nous allons trouver une condition nécessaire, satisfaite par toutes les suites de densité finie dont les produits canoniques sont majorés par un polynome sur l'axe réel.

Après un changement de variable, l'intégrale (17) de droite s'écrit

$$\int_0^{\infty} x \log \left| \frac{x+t}{x-t} \right| \frac{I(t)}{t^2} dt. \tag{18}$$

Supposons que cette quantité est inférieure à $Cte \log x$ pour $x \to \infty$. Pour $M > 1$ et $s > o$, on a, en posant $\frac{x}{s} = u$,

$$o < \int_0^{M} \frac{1}{x} \log \left| \frac{x+s}{x-s} \right| dx < \int_0^{\infty} \frac{1}{u} \log \left| \frac{u+1}{u-1} \right| du = A, \tag{19}$$

$$\int_0^{M} \frac{\log x}{x} \log \left| \frac{x+s}{x-s} \right| dx < \int_0^{\infty} \frac{\log s + \log u}{u} \log \left| \frac{u+1}{u-1} \right| du = A \log s + B, \tag{20}$$

A et B étant des constantes indépendantes de M.

Nous allons multiplier l'intégrale (18) par $\frac{1}{x} \log \left| \frac{x+s}{x-s} \right|$ et intégrer de o à ∞, les relations (19) et (20) donnant une borne supérieure pour l'intégrale double

ainsi obtenue. Puis on invertira l'ordre des deux intégrations, et l'on obtiendra la condition cherchée après l'utilisation de la formule (24) ci-dessous. Cependant, l'intégrale (18) n'étant forcément pas absolument convergente, ce procédé nécessite la justification suivante.

Prenons un $M > 1$. Par (19) et (20),

$$(21) \qquad \int_0^M \frac{1}{x} \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \int_0^\infty x \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| \frac{I(t)}{t^2}\, dt\, dx < C \log s \qquad (s > 2);$$

C étant indépendant de M. Mais $n(t) = [Dt + \theta(t)]$ est non décroissante, donc $\theta'(t) \geqq -D$, tandis que $\theta(t) = o(t)$, $t \to \infty$. La fonction $\varphi(t) = \frac{I(t)}{t^2} - \frac{K}{t}$ sera donc $\leqq 0$ pour K assez grand. L'interversion de l'ordre des intégrations dans (21) sera ainsi permis avec $\frac{I(t)}{t^2}$ remplacée, soit par $\varphi(t) \leqq 0$, soit par $\frac{K}{t} > 0$. Dans le dernier cas on obtiendra d'ailleurs une valeur finie, à savoir

$$\int_0^M \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| dx \int_0^\infty K \log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| \frac{du}{u}.$$

L'ordre des intégrations dans (21) elle-même est donc aussi inversible, et l'on a

$$(22) \qquad \int_0^\infty \frac{I(t)}{t^2} \int_0^M \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| dx\, dt < C \log s \qquad (s > 2);$$

quel que soit $M > 1$.

Maintenant, nous avons besoin du :

Lemme 7. — *Pour* $M > 0$ *et* $s > 0$, *la fonction*

$$F(t) = \int_0^M \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| dx$$

est non décroissante pour $t > s$.

Démonstration :

$$(23) \qquad F(t+\delta) - F(t-\delta) = \int_0^M \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \log\left|\frac{(x+\delta)^2 - t^2}{(x-\delta)^2 - t^2}\right| dx,$$

intégrale qui est absolument convergente pour $t > s + \delta$. Un examen assez simple montre alors que pour $x > 0$, $t > \delta > 0$, $\log\left|\frac{(x+\delta)^2 - t^2}{(x-\delta)^2 - t^2}\right|$ est positif ou négatif suivant que x est supérieur ou inférieur à $\sqrt{t^2 - \delta^2}$.

Si donc $M \leqq \sqrt{t^2 - \delta^2}$, l'intégrale (23) sera évidemment négative. Sinon, on utilise la formule ([5], p. 180, form. (7.3.3))

$$(24) \qquad \int_0^\infty \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| dx = \pi^2 \min(s, t),$$

valide pour $s, t > 0$. Elle montre que l'intégrale (23) avec M remplacé par ∞ sera nulle pour $t > s + \delta$. Mais en même temps, l'intégrale (23) prise entre les limites M et ∞ sera positive si $M > \sqrt{t^2 - \delta^2}$, ce qui, joint au précédent, entraîne encore que l'intégrale (23) elle-même est négative. C. Q. F. D.

Maintenant, nous partageons l'intégrale (22) en deux parties dans lesquelles t varie respectivement entre 0 et un nombre $a > s$, et entre a et ∞. Par le lemme, on peut appliquer le deuxième théorème de la moyenne à la seconde partie pour en trouver la valeur

$$\int_a^{a'} \frac{I(t)}{t^2}\, dt \int_0^M \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| dx \qquad (a' > a).$$

La formule (24) montre alors que la valeur absolue de celle-ci est, pour chaque $M > 0$, inférieure à

$$\pi^2 s \left|\frac{\vartheta(a)}{a} - \frac{\vartheta(a')}{a'}\right|, \tag{25}$$

vu que $a > s$ et

$$\frac{I(t)}{t^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\vartheta(t)}{t}\right).$$

Quant à la première partie, on fait tendre M vers ∞, grâce à quoi l'intégrale intérieure converge uniformément vers la valeur (24) pour $0 < t < a$, et l'expression tout entière tend vers

$$\int_0^a \frac{I(t)}{t^2} \pi^2 \min(s, t)\, dt = \pi^2 \int_0^s \frac{\vartheta(t)}{t}\, dt - \pi^2 s \frac{\vartheta(a)}{a}. \tag{26}$$

L'estimation (22) donne donc, avec les résultats (25) et (26) :

$$\pi^2 \int_0^s \frac{\vartheta(t)}{t}\, dt - \pi^2 s \frac{\vartheta(a)}{a} - \pi^2 s \left|\frac{\vartheta(a)}{a} - \frac{\vartheta(a')}{a'}\right| < C \log s \qquad (s > 2,\ a > s).$$

Or, le nombre $a > s$ était complètement arbitraire. On peut donc le faire tendre vers l'infini, lorsqu'on aura $\frac{\vartheta(a)}{a} \to 0$ et $\frac{\vartheta(a')}{a'} \to 0$ puisque $a' > a$.

On arrive ainsi au :

THÉORÈME 6. — *Le produit canonique correspondant à la suite* $[Dt + \vartheta(t)]$ *n'est majoré par un polynome sur l'axe réel que si*

$$\frac{1}{\log s} \int_0^s \frac{\vartheta(t)}{t}\, dt < \text{Cte} < \infty \qquad (s \to \infty).$$

Cela exige une sorte de borne supérieure en moyenne pour la fonction $\vartheta(t)$, et ressemble donc un peu à la condition suffisante du théorème 1.

Vu que

$$|\vartheta(t) - \psi(t)| < 1, \qquad \psi(t) = n(t) - Dt,$$

on peut donner à la conclusion du théorème 6 la formulation suivante :

$$\frac{1}{\log s}\int_0^s \frac{n(t)-Dt}{t}\,dt < \text{Cte} \qquad (s\to\infty).$$

[Si $n(t)$ est de densité $D=0$, cela montre que son produit canonique associé n'est borné par un polynome que si $n(t)$ est bornée, c'est-à-dire que le produit canonique se réduit à un polynome. Fait d'ailleurs connu, car alors $C(z)$ sera de type exponentiel zéro, et une extension classique du théorème de Phragmén-Lindelöf affirmera le même résultat.]

Il est à remarquer que, comme M. Kahane m'a fait observer, le dernier théorème pourrait aussi être obtenu en partant d'une certaine formule, conséquence des théorèmes de Jensen et de Nevanlinna (*voir* [6], § 5). Cependant, une telle démonstration serait étrangère aux méthodes de cet article, et nous avons préféré celle que nous venons de donner.

4. Impossibilité de certaines propositions inverses du théorème 6. — Le théorème 6 ne peut pas être étendu de façon à assurer aussi une sorte de borne inférieure pour la fonction $\theta(t)$. En effet, étant donné n'importe quelle fonction $\omega(t)$ tendant vers $-\infty$ mais $o(t)$ pour $t\to\infty$, on peut construire une fonction $\theta(t)$ convexe telle que $\theta(t)\leqq\omega(t)$ pour t assez grand, $\theta(t)=o(t)$, $t\to\infty$ et $t+\theta(t)$ soit non décroissante. (Même procédé que pour construire des polygones de Newton.) La suite $[t+\theta(t)]$ satisfera donc à l'hypothèse du corollaire 1 (§ 3), et le produit canonique associé sera majoré par un polynome sur l'axe réel, alors que $-\theta(t)$ sera assez grand.

En se servant de l'exemple de Kahane auquel on a fait allusion dans l'introduction, on peut voir d'autre part qu'une condition, même de la forme $\theta(t)\leqq 0$, n'est nullement suffisante pour que le produit canonique soit majoré par un polynome sur l'axe réel (à ceci nous reviendrons plus tard).

Il semblerait peut-être encore probable qu'une condition de la forme

$$\left|\int_0^s \frac{\theta(t)}{t}\,dt\right| = O(\log s) \qquad \text{ou même} \qquad \int_0^s \frac{|\theta(t)|}{t}\,dt = O(\log s)$$

pour $s\to\infty$, serait suffisante pour avoir la majorisation cherchée du produit canonique, ce qui donnerait une extension assez naturelle au théorème 1. Cependant, aucune condition du type envisagé n'est valable; ce que nous montrerons maintenant en donnant des exemples.

Exemple 2. — Il existe une suite $n(t)=[t+\theta(t)]$, avec

$$\theta(t)\geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^s \frac{\theta(t)}{t}\,dt = O(\log s) \qquad (s\to\infty),$$

telle que le produit canonique $C(x)$ associé ne satisfait aucune inégalité de la forme

$$|C(x)| < x^K \qquad (x \to \infty).$$

Preuve. — Utilisons le théorème 4. Prenons d'abord un x et un $M > 0$, avec $x - 2M > 0$. Posons

$$\omega(t) = \frac{1}{2}(x - t) \qquad \text{pour} \quad x - 2M \leq t \leq x,$$

0 pour t dehors de $[x - 2M - \varepsilon, x]$, et linéaire sur $[x - 2M - \varepsilon, x - 2M]$; ε étant une petite quantité positive. Si $\frac{M}{x}$ est petit, on aura

$$(27) \quad 2\int_0^1 \frac{\frac{\omega(x\tau)}{\tau} - \tau\omega\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\, d\tau \geq x \int_{1-\frac{2M}{x}}^1 (\tau(1+\tau))^{-1}\, d\tau$$

$$= x\log\left(1 - \frac{2M}{x}\right)^{-1} - x\log\left(1 - \frac{M}{x}\right)^{-1} = M + xO\left(\frac{M^2}{x^2}\right).$$

En particulier, pour $M = \sqrt{x\log x}$, la quantité (27) de droite est $\sqrt{x\log x} + o(1)$, $x \to \infty$.

D'autre part, on a

$$(28) \quad \int_0^x \frac{\omega(t)}{t}\, dt \leq \int_{x-2M}^x \left(\frac{x}{t} - 1\right) dt = x\left(\frac{2M}{x} + \frac{4M^2}{2x^2} + \dots\right) - 2M$$

$$= \frac{2M^2}{x} + O\left(\frac{M^3}{x^2}\right) = 2\log x + o(1)$$

pour $M = \sqrt{x\log x}$ et $x \to \infty$, si ε est choisi assez petit.

Alors, prenons une suite de nombres $x_n \to \infty$ et une suite des $\varepsilon_n > 0$ telles que :

i. $x_{n+1} - 2\sqrt{x_{n+1}\log x_{n+1}} - \varepsilon_{n+1} > x_n^2$;

ii. Pour chaque n, l'estimation (28) ait lieu avec x et ε remplacés respectivement par x_n et ε_n.

Définissons enfin :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}(x_n - t), \qquad x_n - 2\sqrt{x_n\log x_n} \leq t \leq x_n;$$

$\theta(t) = 0$ dehors des intervalles $[x_n - 2\sqrt{x_n\log x_n} - \varepsilon_n, x_n]$; et $\theta(t) =$ fonction linéaire sur les intervalles

$$[x_n - 2\sqrt{x_n\log x_n} - \varepsilon_n, x_n - 2\sqrt{x_n\log x_n}].$$

Selon (28) joint à la propriété ii,

$$\int_0^{x_n} \frac{\theta(t)}{t}\, dt \leq \sum_1^n 3\log x_k,$$

ce qu'on voit facilement être $\leq 6 \log x_n$ par un raisonnement inductif, puisque $x_{k+1} > x_k^2$. Avec le fait que

$$\frac{\sqrt{x_n \log x_n}}{x_n} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

cela montre bien que

$$\int_0^x \frac{\theta(t)}{t}\, dt = O(\log x) \qquad (x \to \infty). \tag{29}$$

Cependant, par (27), la propriété i, et la définition de $\theta(t)$:

$$2\int_0^1 \frac{\frac{\theta(x_n\tau)}{\tau} - \tau\theta\left(\frac{x_n}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\, d\tau \geq 2\int_0^1 \frac{\theta(x_n\tau)}{\tau(1-\tau^2)}\, d\tau - 2\int_0^{\frac{1}{x_n}} \frac{\tau\theta\left(\frac{x_n}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\, d\tau$$

$$\geq \sqrt{x_n \log x_n} + o(1) - \sup_{t \geq x_n^2} \frac{\theta(t)}{t}\, x_n \log \frac{x_n+1}{x_n-1} = \sqrt{x_n \log x_n} + o(1)$$

pour $n \to \infty$, ce qui n'est pas $O(\log x_n)$, $n \to \infty$.

La fonction $[t + \theta(t)]$ est non décroissante, donc définit une suite $n(t)$ pour laquelle le produit canonique associé n'est majoré par aucun polynome sur l'axe réel (théorème 4), malgré la relation (29).

Cet exemple montre que la condition

$$\int_0^s \frac{|\theta(t)|}{t}\, dt = O(\log s) \qquad (s \to \infty)$$

n'est pas suffisante.

Or, il en est de même pour $|\theta(t)|$ remplacée par $|\theta(t)|^p$, $p > 1$ quelconque. Ceci se montre par une construction analogue à celle que nous venons de faire; il suffit de la reprendre avec $\sqrt{x_n \log x_n}$ toujours remplacé par $\sqrt[p+1]{x_n \log x_n}$.

On pourrait encore croire que la condition

$$\int_0^s \frac{|\theta(t)|}{t}\, dt = O(\log s) \qquad (s \to \infty)$$

est suffisante si l'on impose une restriction supplémentaire sur la rapidité de croissance de la fonction $\theta(t)$. Or, un résultat de ce genre devrait être assez faible :

Exemple 3. — Il existe une suite $[2t + \theta(t)]$, avec

$$|\theta(s)| = O(\log s) \qquad \text{et} \qquad \int_0^s \frac{|\theta(t)|}{t}\, dt = O(\log s) \qquad (s \to \infty),$$

pour laquelle le produit canonique associé n'est majoré par aucun polynome sur l'axe réel.

Preuve. — Prenons d'abord un nombre x assez grand, et considérons la

fonction $\omega(t)$ définie par

$$\omega(t) = \log x, \qquad \frac{x}{e} \leq t \leq x - \log x; \quad x - t, \quad x - \log x \leq t \leq x;$$

o dehors de l'intervalle $\left[\frac{x}{e} - \varepsilon, x\right]$; et linéaire sur l'intervalle $\left[\frac{x}{e} - \varepsilon, \frac{x}{e}\right]$; ε étant un petit nombre positif.

Pour ε assez faible, on a

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \log x,$$

tandis que

$$2\int_0^1 \frac{\omega(x\tau)}{\tau(1-\tau^2)}\, d\tau > \log x \int_{\frac{1}{e}}^{1-\frac{\log x}{x}} \frac{2\, d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \log x \log \frac{(e^2-1)\left(1-\frac{\log x}{x}\right)^2}{1-\left(1-\frac{\log x}{x}\right)^2}$$

$$= (\log x)^2 (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty),$$

ce qui n'est pas $O(\log x)$.

La construction est maintenant à achever comme dans l'exemple 2.

5. La « redressabilité » de certaines suites $n(t)$. — Revenons au problème général posé dans l'introduction. On a le théorème suivant :

Théorème 7. — *Étant donné une suite $n(t)$ de densité $D < \infty$, formée de nombres $\lambda_n > 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des exponentielles $\exp(\pm i\lambda_n x)$ soit non totale sur chaque intervalle de longueur $> 2\pi D$ est, que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une suite de nombres réels positifs μ_n de densité $\leq \varepsilon$ telle que $C(x)C_\varepsilon(x)$ est majoré par un polynome sur l'axe réel, $C(x)$ et $C_\varepsilon(x)$ étant respectivement les produits canoniques associés aux suites $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$.*

Démonstration. — Que la condition soit suffisante, c'est une conséquence des raisonnements au début du paragraphe 1.

Quant à la nécessité, supposons qu'il existe une mesure m sur l'intervalle $[-2\pi(D+\varepsilon), 2\pi(D+\varepsilon)]$ telle que

$$F(z) = \int_{-2\pi(D+\varepsilon)}^{2\pi(D+\varepsilon)} \exp(itz)\, dm(t)$$

soit nulle pour $z = \pm\lambda_n$. Quitte à diviser $F(z)$ par une puissance de z, on peut supposer qu'elle n'est pas une fonction impaire; posons donc

$$G(z) = F(z) + F(-z);$$

$G(z) \not\equiv 0$ est une fonction de type exponentiel $\leq 2\pi(D+\varepsilon)$ et bornée sur l'axe réel, et

$$G(z) = G(-z), \qquad G(\pm\lambda_n) = 0.$$

A un facteur de la forme $\mathrm{Cte}\,x^{\mathrm{K}}\exp(i\alpha x)$ près,

$$\mathrm{G}(z)=\prod_n\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)\prod_n\left(1-\frac{z^2}{\alpha_n^2}\right),$$

les α_n étant les zéros de $\mathrm{G}(z)$, outré des λ_n. Par un théorème de Levinson (*voir* [6]), la réunion des suites $\{\lambda_n\}$ et $\{\alpha_n\}$ a une densité $\leq \mathrm{D}+\varepsilon$, tandis que $\{\lambda_n\}$ est de densité D; la suite de nombres complexes α_n a donc une densité $\leq\varepsilon$. Il en est de même pour la suite de nombres réels positifs $\mu_n=|\alpha_n|$ et, puisque $|\alpha_n^2-x^2|\geq|\mu_n^2-x^2|$, x réel, on a

$$\prod_n\left(1-\frac{x^2}{\lambda_n^2}\right)\prod_n\left(1-\frac{x^2}{\mu_n^2}\right)\leq|\mathrm{G}(x)|\leq\mathrm{Cte}.$$

On introduit donc la définition suivante :

Une suite $n(t)$ est dite *redressable* si, pour chaque $\varepsilon>0$, il existe une suite $n_\varepsilon(t)$ de densité $\leq\varepsilon$ telle que $\mathrm{C}(x)\mathrm{C}_\varepsilon(x)$ est majoré par un polynome en x, $\mathrm{C}(x)$ et $\mathrm{C}_\varepsilon(x)$ étant respectivement les produits canoniques correspondant aux suites $n(t)$ et $n_\varepsilon(t)$.

Théorème 8. — *Une suite concave est toujours redressable.*

Démonstration. — Si la suite $n(t)=[\mathrm{D}t+\theta(t)]$ est concave, la fonction $\theta(t)\geq 0$ l'est aussi, ce qui, joint au fait que $\theta(t)=o(t)$, $t\to\infty$, entraîne

$$\theta'(t)\to 0,\qquad t\to\infty.$$

Pour $\varepsilon>0$, prenons un a pour lequel $\theta'(t)<\varepsilon$, $\frac{\theta(t)}{t}<a$, $t\geq a$, et posons $\theta_1(t)=\frac{t\theta(a)}{a}$ pour $t\leq a$ et $\theta(t)$ pour $t>a$. On a toujours $\theta_1'(t)<\varepsilon$; la fonction $[\varepsilon t-\theta_1(t)]$ est donc non décroissante et définit une suite $n_\varepsilon(t)$ de densité ε. Pour $t>a$,

$$n(t)+n_\varepsilon(t)=(\mathrm{D}+\varepsilon)t+\theta(t)-\theta(t)+\mathrm{O}(1)=(\mathrm{D}+\varepsilon)t+\mathrm{O}(1),$$

et le produit canonique associé à la suite $n(t)+n_\varepsilon(t)$, réunion des deux suites $n(t)$ et $n_\varepsilon(t)$, est majoré par un polynome sur l'axe réel par le théorème 1.

Par le même procédé exactement, on démontre qu'une suite $\{\lambda_n\}$ de densité zéro avec $\lambda_{n+1}-\lambda_n\to\infty$, $n\to\infty$, est redressable. (Fait cité comme « théorème de Ingham » par Schwartz [2].)

Le théorème 8 montre qu'aucune conclusion comme celle du théorème 6 ne résulte de la seule redressabilité d'une suite.

En revanche,

$$\int_0^s\frac{\theta(t)}{t}\,dt<\mathrm{O}(\log s)\qquad(s\to\infty)$$

n'entraîne pas la redressabilité. Pour voir ceci, prenons la suite $n_{\mathrm{K}}(t)$ de

M. Kahane [3], qui est de densité nulle, mais qui n'est contenue dans aucune suite redressable. Soit $\omega(t)$ une fonction concave, majorante de $n_K(t)$, telle que $\omega(t)=o(t)$, $t\to\infty$. [$\omega(t)$ est formée comme on construit le polygone de Newton.] Pour D assez grand, la fonction $[Dt-\omega(t)]$ sera non décroissante, et définira une suite de densité D. On a

$$n(t)+n_K(t)=[Dt+\theta(t)], \qquad \text{avec} \quad \theta(t)<O(1),$$

puisque $\omega(t)\geqq n_K(t)$, mais la réunion des deux suites $n(t)$ et $n_K(t)$ ne peut pas être redressable.

Passons à un théorème plus général. C'est M. Kahane qui nous a fait remarquer la possibilité d'avoir un résultat du type suivant, en observant qu'il s'ensuivrait de certaines estimations de Mandelbrojt-Ostrowski (*voir* [7], chap. V, et [8], p. 61 et 119). Cependant, nous en donnons une preuve directe, basée sur la méthode de cet article.

THÉORÈME 9. — *Soit $n(t)=[\nu(t)]$ une suite et $C(x)$ son produit canonique associé. S'il existe une fonction non décroissante $T(x)\geqq 0$, avec*

$$\log|C(x)|\leqq T(x) \qquad et \qquad \int_0^\infty \frac{T(x)}{x^2}\,dx<\infty,$$

la suite $n(t)$ est redressable.

Remarque. — Le même vaut avec $\log|C(x)|$ remplacé par $\int_0^\infty \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| d\nu(t)$, la preuve en restant à peu près de même.

Démonstration du théorème. — Prenons un $\varepsilon>0$. Il suffit de trouver une suite $n_\varepsilon(t)$ de densité ε dont le produit canonique $C_\varepsilon(x)$ associé satisfasse

$$\log|C_\varepsilon(x)|\leqq -T(x)+O(\log x)$$

pour x assez grand.

Posons

$$\omega(x)=x\int_x^\infty \frac{T(t)}{t^2}\,dt.$$

Par l'hypothèse on a

$$\frac{\omega(x)}{x}\to 0 \qquad (x\to\infty).$$

De plus, par la non décroissance et positivité de $T(t)$,

$$\int_x^z \frac{T(t)}{t^2}\,dt\geqq\frac{T(x)}{x}\geqq 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\omega(x)}{x}\geqq\int_x^\infty \frac{T(t)}{t^2}\,dt-\frac{T(x)}{x}=\omega'(x)\geqq 0,$$

ce qui montre à la fois que $\omega(t)$ est non décroissante et que $\omega'(t)\to 0$, $t\to\infty$. Enfin,

$$\omega(x)-x\omega'(x)=T(x).$$

Prenons un a tel que

$$\frac{\omega(x)}{x} < \varepsilon, \qquad \omega'(x) < \varepsilon, \qquad x > a,$$

et posons

$$\omega_1(t) = \frac{t\omega(a)}{a} \quad \text{pour} \quad t \leq a, \qquad \omega_1(t) = \omega(t), \quad t > a.$$

$\omega_1(t)$ est aussi non décroissante, et si l'on pose

$$J(t) = \omega_1(t) - t\omega_1'(t),$$

on a

$$J(t) = 0, \quad t < a, \qquad J(t) = T(t) \geq 0, \quad t > a.$$

Alors, par le lemme 6, on a pour $x > a$,

$$(30) \quad \int_0^x \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\omega_1(t) = \int_0^x \log\left|\frac{\tau+1}{\tau-1}\right| \frac{J(x\tau)}{\tau^2}\, d\tau \geq \int_1^x \frac{1}{\tau^2} \log\left|\frac{\tau+1}{\tau-1}\right| T(x\tau)\, d\tau$$
$$\geq T(x) \int_1^\infty \log\left|\frac{\tau+1}{\tau-1}\right| \frac{d\tau}{\tau^2} > T(x),$$

vu que $T(t)$ est non décroissante. Fixons un $y > 0$. Pour $z = x + iy$, $x > a$, le lemme 2 donne, avec (30),

$$(31) \qquad \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\omega_1(t) \geq T(x).$$

La fonction $\nu_\varepsilon(t) = \varepsilon t - \omega_1(t)$ ne décroît pas, car $\omega_1'(t) < \varepsilon$. Par le lemme 6,

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d(\varepsilon t) = 0,$$

donc, on peut appliquer le lemme 3 pour faire un raisonnement analogue à celui dans la deuxième partie de la démonstration du théorème 3, et conclure :

$$\int_0^x \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d(\varepsilon t) \leq O(1).$$

Avec (31), cela donne

$$\int_0^x \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\nu_\varepsilon(t) \leq -T(x) + O(1) \qquad (x > a);$$

donc, si $n_\varepsilon(t) = [\nu_\varepsilon(t)]$,

$$\int_0^x \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| dn_\varepsilon(t) \leq -T(x) + O(\log x) \qquad (x \to \infty).$$

Utilisons encore une fois le lemme 2 pour en déduire :

$$\log|C_\varepsilon(x)| = \int_0^x \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| dn_\varepsilon(t) \leq -T(x) + O(\log x) \qquad (x \to \infty),$$

et la suite $n_\varepsilon(t)$ est de densité ε, car

$$\frac{\omega_1(t)}{t} \leq \frac{\omega(t)}{t} \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

C. Q. F. D.

Il serait bon de voir si la réciproque du théorème 9 est vraie, même en se restreignant à des suites de densité zéro. Malheureusement, nous ne sommes nullement parvenus à le faire.

Donnons quelques applications du théorème 9.

THÉORÈME 10. — *Pour une suite* $n(t) = Dt + \psi(t)$ *avec*

$$\left| \int_0^x \frac{\psi(t)}{t}\, dt \right| = O(\log x) \qquad (x \to \infty),$$

il existe une fonction $T(x)$ *satisfaisant l'hypothèse du théorème* 9 [*et donc* $n(t)$ *est redressable*].

Remarque. — Ce résultat peut être considérablement amélioré; nous choisissons la formulation ci-dessus pour faciliter la comparaison avec la matière du paragraphe 4.

Démonstration. — Appliquons le complément du lemme 1 au produit canonique $C(x)$ associé à $n(t)$. On prend $\lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ et l'on a

$$\log|C(x)| \leq 2n(x)\log\frac{1}{\lambda} + 2\int_0^\lambda \frac{\frac{\psi(x\tau)}{\tau} - \tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\, d\tau. \tag{32}$$

Le premier terme de droite dans (32) est $O(\sqrt{x})$, $x \to \infty$; considérons alors le deuxième. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \frac{\psi(x\tau)}{\tau(1-\tau^2)}\, d\tau &= \frac{1}{1-\tau^2}\int_0^{\tau x}\frac{\psi(u)}{u}\, du\Big]_0^\lambda - \int_0^\lambda \frac{2\tau}{(1-\tau^2)^2}\int_0^{\tau x}\frac{\psi(u)}{u}\, du\, d\tau \\ &\leq O(\log x)\left(\sqrt{x} + \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} 2\tau(1-\tau^2)^{-2}\, d\tau\right) = \sqrt{x}\, O(\log x) \qquad (x\to\infty). \end{aligned} \tag{33}$$

Pareillement, en posant $\frac{1}{\tau} = s$,

$$\begin{aligned} -\int_0^\lambda \frac{\tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\, d\tau &= -\int_{\frac{1}{\lambda}}^x \frac{1}{s^2-1}\,\frac{\psi(xs)}{s}\, ds \\ &= -\frac{1}{s^2-1}\int_0^{sx}\frac{\psi(u)}{u}\, du\Big]_{\frac{1}{\lambda}}^\infty - \int_{\frac{1}{\lambda}}^x \frac{2s}{(s^2-1)^2}\int_0^{sx}\frac{\psi(u)}{u}\, du\, ds \\ &\leq \sqrt{x}\, O(\log x) + \int_{\frac{1}{\lambda}}^x \frac{2s\, O(\log sx)}{(s^2-1)^2}\, ds \\ &\leq 2 + \sqrt{x}\, O(\log x) + 2 + \sqrt{x}\, O(\log x) + O\left(\int_{\frac{1}{\lambda}}^\infty \frac{ds}{s(s^2-1)}\right) \\ &= (2\sqrt{x}+1)\, O(\log x) \qquad (x\to\infty). \end{aligned} \tag{34}$$

De (32) et la remarque qui la suit, (33) et (34); on a $\log|C(x)| \leq \text{Cte}\sqrt{x}\log x$ pour x assez grand, et l'intégrale de $\frac{\sqrt{x}\log x}{x^2}$ prise entre 1 et ∞ converge.

THÉORÈME 11. — *Si pour un* $p<1$, $\int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t^{1+p}}\,dt<\infty$, *il existe une fonction* $T(x)$ *satisfaisant à l'hypothèse du théorème* 9 (*et la suite est donc redressable*).

Démonstration. — Utilisons la formule (32) avec $\lambda = 1-(\log x)^{-2}$. Le premier terme de droite dans (32) sera alors $O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$, $x\to\infty$. Quant au deuxième,

$$\int_0^\lambda \frac{\frac{\psi(x\tau)}{\tau}}{1-\tau^2}\,d\tau \leq \int_0^\lambda \frac{x^p\tau^p}{1-\tau^2}\,\frac{|\psi(x\tau)|}{(x\tau)^{1+p}}\,d(x\tau)$$

$$\leq x^p(\log x)^2\int_0^\infty \frac{|\psi(u)|}{u^{1+p}}\,du = O(x^p(\log x)^2) \qquad (x\to\infty)$$

et

$$-\int_0^\lambda \frac{\tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau \leq \int_0^\lambda \frac{x^p\tau^{2-p}}{1-\tau^2}\,\frac{\left|\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)\right|}{\left(\frac{x}{\tau}\right)^{1+p}}\,d\left(\frac{x}{\tau}\right) = O(x^p(\log x)^2) \qquad (x\to\infty).$$

Alors, pour $x\to\infty$,

$$\log|C(x)| \leq \text{Cte}\left(x^p(\log x)^2 + \frac{x}{(\log x)^2}\right),$$

ce qui est croissante pour x assez grand. Et

$$\int^\infty \frac{x^p(\log x)^2 + \frac{x}{(\log x)^2}}{x^2}\,dx<\infty \qquad \text{puisque} \quad p<1.$$

COROLLAIRE. — *Si, pour* $t\to\infty$, $|n(t)-Dt| = O(t^\alpha)$, *avec* $\alpha<1$, *la suite* $n(t)$ *est redressable.*

Exemple 4. — La condition $\int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t^2}\,dt<\infty$ n'entraîne pas l'existence d'une fonction $T(x)$ satisfaisant à l'hypothèse du théorème 9. (Bien entendu, nous ne savons pas si la suite ne pourrait pas être redressable quand même, puisque nous ne savons pas si la réciproque du théorème 9 est vraie.)

Preuve. — Prenons deux suites de nombres positifs, $\{x_k\}$ et $\{M_k\}$, avec $x_{k+1}-x_k^2>M_{k+1}$; nous préciserons ces deux suites plus tard. Posons $\theta(t)=x_k-t$ pour $x_k-M_k\leq t\leq x_k$, $\theta(t)=0$ dehors des intervalles $[x_k-M_k-\varepsilon_k,\ x_k]$, et $\theta(t)$ linéaire sur des intervalles $[x_k-M_k-\varepsilon_k,\ x_k-M_k]$; les ε_k sont des petites quantités >0. On note que toujours $\theta'(t)>-1$.

Si $\frac{\theta(t)}{t} \to 0$, $t \to \infty$, on a comme dans l'exemple 2,

$$2\int_0^{\lambda_k} \frac{\frac{\theta(x_k\tau)}{\tau} - \tau\theta\left(\frac{x_k}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\, d\tau \geqq \frac{M_k}{2} + O(1) \qquad (k\to\infty),$$

où l'on a posé $\lambda_k = 1 - \frac{1}{5x_k}$. Ainsi, pour la suite

$$n(t) = [2t + \theta(t)]$$

on aura

$$|\theta(t) - \psi(t)| \leqq 1,$$

et par un calcul analogue à celui du théorème 1,

$$2\int_0^{\lambda_k} \frac{\frac{\psi(x_k\tau)}{\tau} - \tau\psi\left(\frac{x_k}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\, d\tau \geqq \frac{M_k}{2} - O(\log x_k) \qquad (k\to\infty). \tag{35}$$

Si chaque x_k est le quart d'un nombre entier impair, on a évidemment $n\left(\frac{x_k}{\lambda_k}\right) = n(x_k\lambda_k)$ et donc, par le complément du lemme 1,

$$\log|C(x_k)| \geqq \frac{M_k}{2} - O(\log x_k) + O(1) \qquad (k\to\infty) \quad \text{par (35)}.$$

Alors, si $T(x) \geqq \log|C(x)|$ est positive et non décroissante,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{T(t)}{t^2}\, dt \geqq \left(\frac{M_k}{2} - O(\log x_k)\right)\left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}\right) \geqq \frac{M_k}{4x_k} - \frac{O(\log x_k)}{x_k}$$

pour k assez grand, vu que $x_{k+1} > x_k^2$. On voit facilement que $\sum_k \frac{\log x_k}{x_k}$ converge, donc, si

$$\int_0^\infty \frac{T(t)}{t^2}\, dt < \infty, \qquad \sum_k \frac{M_k}{x_k} < \infty.$$

D'autre part, on a

$$\int_{x_k - M_k}^{x_k} \frac{\theta(t)}{t^2}\, dt < \frac{M_k^2}{(x_k - M_k)^2},$$

c'est-à-dire que si les ε_k sont assez faibles,

$$\int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t^2}\, dt < \infty$$

dès que $\sum_k \frac{M_k^2}{(x_k - M_k)^2}$ converge.

Il s'agit alors de choisir les x_k et les M_k de façon que

$$x_{k+1} - M_{k+1} > x_k^2, \qquad \frac{M_k}{x_k} \to 0,$$

$$\sum_k \frac{M_k^2}{(x_k - M_k)^2} < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum_k \frac{M_k}{x_k} = \infty.$$

Ce qui est assez facile; il suffit de prendre

$$x_{k+1} > 2x_k^2 \qquad \text{et} \qquad M_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{k+1}.$$

Exemple 5. — Il existe des suites

$$n(t) = Dt + \psi(t), \qquad \text{avec} \quad \int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t^2}\,dt = \infty,$$

qui sont redressables.

Preuve. — Posons $\theta(t) = \frac{t}{2}$ pour $0 \leq t \leq e^2$, et $\frac{t}{\log t}$ pour $t > e^2$; prenons $n(t) = [t + \theta(t)]$. $\theta(t)$ est concave, donc $n(t)$ redressable par le théorème 8. Mais

$$\int_{e^2}^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt > \int_{e^2}^\infty \frac{\theta(t)-1}{t^2}\,dt = \infty.$$

Malgré l'exemple 4, on a le :

THÉORÈME 12. — *Si $\psi(t)$ est positive et non décroissante, et si*

$$\int_0^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt < \infty,$$

il existe une fonction $T(x)$ satisfaisant à l'hypothèse du théorème 9 (et la suite est redressable).

Démonstration. — Si x n'est pas un zéro de $C(x)$, on a, comme dans le lemme 6,

$$(36) \qquad 2\int_0^1 \frac{\frac{\psi(x\tau)}{\tau} - \tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau = \int_0^\infty \frac{1}{\tau^2}\log\left|\frac{\tau+1}{\tau-1}\right| (\psi(x\tau)\,d\tau - \tau\,d\psi(x\tau))$$
$$\leq \int_0^\infty \frac{1}{\tau^2}\log\left|\frac{\tau+1}{\tau-1}\right| \psi(x\tau)\,d\tau,$$

si $\psi(t)$ est non décroissante. Notons par $T(x)$ la dernière intégrale dans (36); on a

$$\log|C(x)| \leq T(x), \qquad T(x) \geq 0,$$

et $T(x)$ est non décroissante, puisque pour $x' > x$,

$$\psi(x'\tau) \geq \psi(x\tau)$$

pour chaque $\tau > 0$. On a enfin,

$$\int_0^\infty \frac{T(x)}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\int_0^\infty \frac{1}{x}\log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| dx\,dt = \int_0^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt \int_0^\infty \frac{1}{u}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| du < \infty.$$

C. Q. F. D.

Ce théorème inclut le résultat (*voir* [2], p. 131) qu'une suite $\{\lambda_n\}$, avec $\sum_n \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ est toujours redressable.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. P. Boas, *Entire functions*, Acad. Press, New-York, 1954.

[2] L. Schwartz, *Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires* (*Ann. Toulouse*, t. 6, 1942, p. 111-174).

[3] J. P. Kahane, *Sur la totalité des suites d'exponentielles imaginaires* [*Ann. Inst. Fourier* (sous presse)].

[4] R. Paley et N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain* (*Amer. Math. Soc.*, New-York, 1934).

[5] E. Titchmarsh, *Theory of Fourier Integrals*, Oxford, 1948.

[6] P. Koosis, *Nouvelle démonstration d'un théorème de Levinson* (*Bull. Soc. math. Fr.*, sous presse).

[7] S. Mandelbrojt, *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1935.

[8] J. P. Kahane, *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 5, 1953-1954, p. 39-130).

SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

PAR M. PAUL VINCENSINI.

INTRODUCTION. — Cet article, qui complète une Communication faite au *Congrès national des Sociétés Savantes* de 1958, a trait à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles du deuxième ordre en relation avec une transformation géométrique, dont j'ai déjà eu l'occasion de faire diverses applications (1), et qui, de par la considération des invariants associés, permet de présenter sous une forme nouvelle, et parfois même *de résoudre complètement* le problème de leur intégration.

La transformation géométrique en question, que nous désignerons dans la suite par $T(O, \alpha)$, est un cas particulier d'une transformation de l'espace réglé, dont j'ai étudié les propriétés générales dans le Mémoire cité (1) du *Bulletin des Sciences mathématiques*, et à laquelle on peut rattacher, en les présentant sous un jour nouveau, de nombreux résultats relatifs à des théories diverses, et parfois assez éloignées, de la Géométrie différentielle des surfaces.

Nous nous bornerons, dans la suite, à signaler celles des propriétés de la transformation $T(O, \alpha)$ que nous aurons à utiliser pour l'objet précis que nous avons en vue.

1. LA TRANSFORMATION $T(O, \alpha)$ ET LES INVARIANTS ASSOCIÉS. — O étant un point fixe quelconque de l'espace euclidien à trois dimensions et D une droite quel-

(1) P. VINCENSINI, *Sur une transformation des congruences les unes par les autres* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 70, 1946, p. 155). *Voir* aussi : *Sur certaines congruences normales dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante et leurs transformations* [*Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 48, 1931, p. 397-438]; *Sur les généralisations de quelques problèmes de Géométrie différentielle et sur certains cycles de congruences* (*Acta Mathematica*, t. 71, 1939, p. 145); *Sur une transformation de l'espace réglé et sur les systèmes sphériques isothermes* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 65, 1941, p. 183).

conque de cet espace, menons par O la parallèle Δ à D, et faisons tourner D autour de Δ (dans un sens déterminé suivi par continuité) d'un angle constant α. D vient occuper une nouvelle position D', et la transformation $T(O, \alpha)$ à laquelle il a été fait allusion est celle qui fait passer de chaque droite D à la droite D' correspondante.

L'ensemble des transformations $T(O, \alpha)$ relatives aux différentes valeurs de α forme évidemment un groupe, deux transformations inverses ou la transformation identique étant respectivement obtenues (à $2k\pi$ près) pour deux valeurs opposées ou pour la valeur nulle de α.

La transformation continue $T(O, \alpha)$ [pour O fixe et α variable] appliquée aux différentes droites de l'espace transforme une congruence (D) en une autre (D'), et jouit d'un certain nombre de propriétés d'invariance qui en font un remarquable instrument d'investigation géométrique.

Les rayons de (D) étant supposés orientés dans un sens déterminé, nous désignerons par $\vec{N}(u, v)$ le vecteur unitaire porté par le rayon D, u et v étant les deux paramètres fixant D dans (D). $I(u, v)$ étant la projection orthogonale de O sur D, la congruence peut alors être définie par la donnée des vecteurs $\overrightarrow{OI}(u, v)$ [supposés rapportés à un repère orthogonal d'origine O], et par les points $N(u, v)$ de la sphère unitaire Σ de centre O (extrémités des vecteurs menés par O équipollents aux vecteurs $\vec{N}$ qui viennent d'être définis) dont l'ensemble constitue la représentation sphérique de la congruence.

Le ds^2 de Σ, que nous pouvons supposer orthogonal moyennant un choix convenable des coordonnées curvilignes u, v $\left(ds^2 = d\vec{N}^2 = E\,du^2 + G\,dv^2\right)$, est la première forme fondamentale de la congruence (D), la deuxième forme étant, comme il est bien connu :

$$d\vec{N}\,d\vec{I} = e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2,$$

e, f, f', g ayant les expressions

$$e = \frac{\partial \vec{N}}{\partial u}\frac{\partial \vec{I}}{\partial u}, \qquad f = \frac{\partial \vec{N}}{\partial u}\frac{\partial \vec{I}}{\partial v}, \qquad f' = \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}\frac{\partial \vec{I}}{\partial u}, \qquad g = \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}\frac{\partial \vec{I}}{\partial v}.$$

Les abscisses $\rho_1 = I\overline{F}_1$ et $\rho_2 = I\overline{F}_2$ des foyers portés par le rayon D sont les racines de l'équation

$$EG\rho^2 + (gE + eG)\rho + eg - ff' = 0, \tag{1}$$

et la somme et le produit de ces abscisses ont respectivement pour expressions

$$\begin{cases} S = I\overline{F}_1 + I\overline{F}_2 = -\dfrac{gE + eG}{EG}, \\ P = I\overline{F}_1 \times I\overline{F}_2 = \dfrac{eg - ff'}{EG}. \end{cases} \tag{2}$$

Si l'on désigne par I′ la projection orthogonale de O sur le rayon D′, transformé de D, dans la congruence (D′) transformée de (D) par T(O, α), on a

$$\overrightarrow{OI'} = \overrightarrow{OI}\cos\alpha + \left(\overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{OI}\right)\sin\alpha,$$

et de là on déduit sans difficulté la deuxième forme fondamentale de (D′),

$$\varepsilon\, du^2 + (\varphi + \varphi')\, du\, dv + \gamma\, dv^2,$$

dont les coefficients s'expriment *linéairement* au moyen de ceux de la deuxième forme fondamentale de (D) par les relations

$$(3)\qquad \begin{cases} \varepsilon = e\cos\alpha - f'\sin\alpha, \\ \varphi = f\cos\alpha - g\sin\alpha, \\ \varphi' = f'\cos\alpha + e\sin\alpha, \\ \gamma = g\cos\alpha + f\sin\alpha. \end{cases}$$

Les relations (3) permettent de calculer les éléments différentiels du premier ordre attachés à un rayon quelconque de la congruence (D′) à partir des mêmes éléments de (D). On trouve, en particulier, pour la somme et le produit des abscisses (comptées à partir de I′) des foyers portés par D′,

$$S' = -\left(\frac{gE + eG}{EG}\right)\cos\alpha + \frac{f' - f}{\sqrt{EG}}\sin\alpha,$$
$$P' = \frac{eg - ff'}{EG},$$

soit en tenant compte des relations (2) et en introduisant le paramètre moyen $\left(\pi = \frac{f' - f}{\sqrt{EG}}\right)$ de (D) :

$$(4)\qquad \begin{cases} S' = S\cos\alpha + \pi\sin\alpha, \\ P' = P. \end{cases}$$

La dernière relation (4) montre que le produit des abscisses (comptées à partir de la projection orthogonale du point fixe O) des deux foyers situés sur un rayon quelconque de (D) *reste invariant* au cours de la transformation continue (au paramètre α) T(O, α).

La première relation (4) se simplifie si la congruence (D) soumise à la transformation est *normale* ($\pi = 0$). On a alors

$$S' = S\cos\alpha,$$

ce qui montre que par la transformation T(O, α) la distance du plan médiateur du segment F_1F_2 (plan moyen du rayon D) est multipliée par le facteur constant $\frac{1}{2}\cos\alpha$; la surface *enveloppée moyenne* (enveloppe des plans moyens) de la transformée (D′) est donc homothétique de celle de (D) dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}\cos\alpha$. Cette surface enveloppée moyenne se réduit au

point O pour la transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ (les foyer F'_1 et F'_2 de D′ sont alors symétriques par rapport à I′, et par suite équidistants du point fixe O), et l'on voit de même que, réciproquement, les transformées par $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ des congruences admettant pour enveloppée moyenne le point O sont des congruences normales.

En dehors de l'invariant P la transformation $T(O, \alpha)$ admet, de par sa définition même, l'invariant évident $\overrightarrow{OI}^2$; mais elle en admet d'autres qu'il convient de signaler.

Si nous appliquons à (D′) la transformation $T(O, -\alpha)$ nous retrouvons (D); nous pouvons donc écrire

$$S = S' \cos\alpha - \pi' \sin\alpha, \tag{5}$$

π' étant le paramètre moyen de D′.

Remplaçons dans (5) S′ par son expression (4); nous obtenons la formule de transformation du paramètre moyen

$$\pi' = \pi \cos\alpha - S \sin\alpha, \tag{6}$$

et (6), jointe à la première relation (4) donne aussitôt

$$S'^2 + \pi'^2 = S^2 + \pi^2, \tag{7}$$

qui montre que la quantité $S^2 + \pi^2$ *est un invariant* de la transformation $T(O, \alpha)$.

Un autre invariant intéressant résulte de la relation

$$\pi^2 = 4d^2 - 4\delta^2 \tag{8}$$

liant, pour toute congruence, le paramètre moyen π relatif à un rayon quelconque, aux distances respectives 2δ et $2d$ des deux foyers et des deux points limites portés par le rayon envisagé. On a

$$4\delta^2 = (\overline{IF}_2 - \overline{IF}_1)^2 = (IF_1 + IF_2)^2 - 4\overline{IF}_1 \times IF_2 = S^2 - 4P,$$

et par suite, d'après (8)

$$4d^2 = S^2 + \pi^2 - 4P.$$

$S^2 + \pi^2$ et P étant invariants il en est de même de $2d$: la distance des deux points limites sur chaque rayon de (D) *reste donc constante au cours de la transformation* $T(O, \alpha)$.

Un cas particulier important est celui où (D) est normale et à foyers associés (F_1, F_2) équidistants du point O (congruence normale à enveloppée moyenne point). On a alors

$$S = \pi = 0,$$

(6) montre que $\pi' = 0$ [c'est-à-dire que toutes les congruences (D′) transformées de (D) par $T(O, \alpha)$ sont normales], et (7) prouve que pour toutes les

congruences (D'), on a $S' = 0$ [les congruences (D') ont toutes leurs couples de foyers associés équidistants du point fixe O].

Si d'ailleurs S reste constamment nulle au cours d'une transformation $T(O, \alpha)$, l'invariance de $S^2 + \pi^2$ montre qu'il en est de même de π, de sorte que les seules congruences à enveloppée moyenne point (O) restant telles par une transformation continue $T(O, \alpha)$ (et il suffit pour cela qu'elles le restent pour *une* transformation particulière pour laquelle $\alpha \neq k\pi$) sont les congruences normales à foyers associés équidistants du point O.

2. Les formules de Weingarten et les expressions des invariants attachés a une congruence normale. — Dans le cas où la congruence (D) soumise à la transformation $T(O, \alpha)$ est normale, les invariants qui viennent d'être mis en évidence sont susceptibles d'expressions intéressantes ne mettant en jeu que les paramètres de Beltrami relatifs au ds^2 de la sphère unitaire (Σ) sur laquelle est effectuée la représentation de la congruence, ds^2 que nous supposerons avoir la forme la plus générale

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

On peut, dans ce cas, définir la congruence (D) au moyen de l'une des surfaces Θ orthogonales à ses différents rayons. Si D est le rayon normal à Θ au point $M(u, v)$ et I la projection orthogonale de O sur D, $\overline{IM}$ est une fonction $\Phi(u, v)$ des deux variables u et v [ou du point $N(u, v)$, représentation sphérique de D sur la sphère unitaire Σ], et la connaissance de cette fonction permet de représenter la congruence par la formule vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{OI} = \Delta\left(\overrightarrow{N}, \Phi\right), \tag{9}$$

qui condense les trois formules classiques de Weingartein :

$$\mathfrak{X} = \Delta(X, \Phi) = \frac{E\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} - F\left(\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} + \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\right) + G\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}}{EG - F^2},$$

$$\mathfrak{Y} = \Delta(Y, \Phi) = \ldots,$$

$$\mathfrak{Z} = \Delta(Z, \Phi) = \ldots.$$

où $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ sont les coordonnées cartésiennes rectangulaires du point I, (X, Y, Z) les composantes du vecteur unitaire $\overrightarrow{N}(u, v)$ porté par le rayon D (ou les coordonnées cartésiennes du point N image de D sur Σ), et où $\Delta(X, \Phi)$ est le paramètre différentiel mixte de Beltrami calculé pour les fonctions X et Φ relativement au ds^2 de la sphère unitaire.

La considération des différentes congruences normales de l'espace permet d'attribuer une signification géométrique remarquable aux paramètres différentiels Δ, Δ_2, Δ_{22} du premier et du deuxième ordre de Beltrami *relatifs au* ds^2

sphérique calculés pour une même fonction quelconque $\Phi(u, v)$:

$$\Delta\Phi = \frac{E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2},$$

$$\Delta_2\Phi = \frac{G\Phi_{11} - 2F\Phi_{12} + E\Phi_{22}}{EG - F_2},$$

$$\Delta_{22}\Phi = \frac{\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2}{EG - F^2},$$

$\Phi_{ij}(i, j = 1, 2)$ désignant les dérivées secondes covariantes de Φ relatives au ds^2 considéré, à savoir

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_i\,\partial u_j} - \sum_k^{(1,2)} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial\Phi}{\partial u_k} \qquad (u_1 = u,\ u_2 = v),$$

$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ étant les symboles de deuxième espèce de Christoffel :

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial u} + F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \qquad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial E}{\partial u}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial G}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \qquad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u}}{2EG - F^2)}.$$

Dans le Mémoire des *Annales de l'École Normale Supérieure* cité dans l'Introduction, j'ai formé l'équation donnant les abscisses (comptées à partir du point I) des foyers F_1 et F_2 situés sur un rayon quelconque D d'une congruence normale définie, conformément à la représentation ci-dessus de Weingarten, par la fonction $\Phi(u, v)$ (définie à une constante additive près) donnant la distance du point fixe O au plan tangent à l'une quelconque des surfaces Θ orthogonales aux rayons [ou, ce qui revient au même, la distance du point I au point $M(u, v)$ où le rayon envisagé perce l'une quelconque de ces surfaces]. Cette équation peut être mise sous la forme

$$\rho^2 + \Delta_2\Phi \cdot \rho + \Delta_{22}\Phi = 0, \tag{10}$$

d'où l'on déduit les expressions invariantes suivantes de la somme $S = \overline{IF_1} + \overline{IF_2}$ et du produit $P = \overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$:

$$\begin{cases} \overline{IF_1} + \overline{IF_2} = -\Delta_2\Phi, \\ \overline{IF_1} \times \overline{IF_2} = \Delta_{22}\Phi. \end{cases} \tag{11}$$

En ce qui concerne le paramètre différentiel du premier ordre $\Delta\Phi$, la forma-

tion du carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{OI}$ défini par (9) montre aussitôt qu'on a

$$\overrightarrow{OI}^2 = \Delta\Phi. \tag{12}$$

(11) et (12) fournissent les significations géométriques annoncées pour $\Delta\Phi$, $\Delta_2\Phi$, $\Delta_{22}\Phi$.

Les relations précédentes permettent d'obtenir immédiatement (et *sous forme invariante*) les équations aux dérivées partielles d'un grand nombre de congruences normales jouissant de propriétés focales (ou de surfaces jouissant de propriétés de courbure) données. Ainsi par exemple, considérons les congruences normales telles que les deux foyers F_1, F_2 situés sur chaque rayon soient conjugués par rapport à une sphère fixe, que nous pouvons supposer être la sphère unitaire de Σ de centre O. Si M_1 et M_2 sont les points (symétriques par rapport à I) où le rayon générateur D de l'une des congruences envisagées perce la sphère Σ, la conjugaison des foyers situés sur D par rapport à Σ s'exprime par la relation

$$\overline{IF_1} \times \overline{IF_2} = \overline{IM_1}^2 = 1 - \overline{OI}^2,$$

soit d'après (11) et (12)

$$\Delta_{22}\Phi + \Delta\Phi = 1, \tag{13}$$

équation qui définit, pour une représentation sphérique arbitrairement donnée, les fonctions $\Phi(u, v)$ correspondant aux différentes congruences normales du type considéré.

Les congruences normales dont les couples de foyers associés F_1, F_2 sont conjugués par rapport à la sphère imaginaire de centre O et de rayon i sont, comme on le voit aussitôt, définies par l'équation

$$\Delta_{22}\Phi + \Delta\Phi = -1. \tag{4}$$

Dans le cas, intermédiaire entre les deux précédents, où les couples de foyers associés sont conjugués par rapport à la sphère point O (congruences normales telles que les différents segments focaux F_1, F_2 soient vus du point O sous un angle droit), l'équation donnant Φ se réduit à

$$\Delta_{22}\Phi + \Delta\Phi = 0. \tag{5}$$

Les transformées par polaires réciproques (relativement à une sphère de centre O) des congruences normales définies par (15), jouissent évidemment de la propriété que les plans focaux issus d'un rayon quelconque F_1F_2 (respectivement perpendiculaires à OF_1 et OF_2) sont *orthogonaux*; ces congruences sont donc *normales*, et de là résulte que l'équation (15) définit la famille (complète) des congruences normales *transformables en congruences normales par une transformation par polaires réciproques par rapport à une sphère fixe de centre* O.

Si D et d sont deux rayons homologues dans deux congruences normales se

correspondant dans une telle polarité, si I et i sont les projections orthogonales de O sur D et d, et si R est le rayon de la sphère définissant la polarité, on a

$$\overline{OI} \times \overline{Oi} = R^2,$$

et l'on déduit de là que l'inverse de la droite d dans l'inversion de pôle O et de puissance $2R^2$ est le cercle (C) passant par O et ayant pour axe la droite D.

L'ensemble des ∞^2 cercles (C) inverses des ∞^2 rayons de la congruence (d) est (puisque la congruence des droites d est normale) orthogonal à une famille de ∞^1 surfaces et constitue par suite un *système cyclique*. La congruence (D) est donc non seulement normale mais aussi *cyclique* (formée par les axes des cercles d'un système cyclique). On peut donc considérer l'équation (15) comme définissant *les congruences rectilignes cycliques normales pour lesquelles les cercles du système cyclique associé passent par un même point fixe de l'espace.*

Comme autre exemple intéressant de familles de congruences normales dont on peut écrire aussitôt l'équation aux dérivées partielles, on peut citer celui fourni par les congruences normales à couples de foyers associés F_1, F_2 équidistants du point O signalées à la fin du n° 1. Ces congruences conservent, comme on l'a vu, leur double propriété de rester normales et d'avoir leurs couples de foyers associés équidistants du point O lorsqu'on les soumet à la transformation continue (au paramètre α) $T(O, \alpha)$. On obtient l'équation aux dérivées partielles qui les définit en exprimant la nullité de la somme $\overline{IF_1} + \overline{IF_2}$, ce qui, d'après (11) donne

$$\Delta_2 \Phi = 0. \tag{16}$$

Les inverses des congruences précédentes dans des inversions de pôle O sont les systèmes cycliques, formés de cercles issus du point fixe O, restant cycliques lorsqu'on fait tourner chaque cercle d'un angle déterminé quelconque α, dans un sens déterminé autour de sa tangente en O.

Eu égard à la transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, on voit que, moyennant une telle transformation, le problème de la recherche des congruences normales définies par les équations (13), (14) ou (15) est susceptible d'une transformation remarquable, présentant sous un aspect tout à fait nouveau la question de l'intégration des équations du type envisagé.

La transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ appliquée aux congruences normales à couples de foyers associés conjugués par rapport à la sphère fixe Σ de centre O et de rayon 1, ramène (n° 1) la détermination de ces congruences à celle de types déterminés de congruences à foyers associés équidistants du point O. Les relations géométriques caractérisant ces dernières s'obtiennent, vu l'invariance simultanée du produit $\overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ et de la distance OI signalée au n° 1, en remplaçant dans les équations (13), (14) et (15), $\Delta_{22}\Phi = \overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ et $\Delta\Phi = \overline{OI}^2$

respectivement par $\overline{I'F'_1} \times \overline{I'F'_2}$ et $\overline{OI'}^2$, les accents prime désignant les éléments transformés des éléments de même définition de la congruence normale initiale.

La détermination des congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à la sphère Σ revient ainsi à celle des congruences à foyers associés équidistants du point O jouissant de la propriété supplémentaire

$$\overline{I'F'_1} \times \overline{I'F'_2} + \overline{OI'}^2 = 1,$$

soit puisque $\overline{I'F'_1} + \overline{I'F'_2} = 0$,

$$\overline{OI'}^2 - \overline{I'F'_1}^2 = 1. \tag{13'}$$

Celles des congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à la sphère imaginaire de centre O et de rayon i, revient à celle des congruences à foyers associés équidistants du point O telles qu'on ait, pour chaque rayon

$$\overline{OI'}^2 - \overline{I'F'_1}^2 = -1. \tag{14'}$$

Enfin, la détermination des congruences normales dont les segments focaux (F_1, F_2) sont vus du point O sous un angle droit, équivaut à celle des congruences à foyers associés équidistants du point O pour lesquelles on a, pour chaque rayon

$$\overline{OI'}^2 - \overline{I'F'_1}^2 = 0, \tag{15'}$$

soit

$$OI' = I'F'_1 = I'F'_2,$$

condition qui exprime que *tous les triangles déterminés par le point fixe* O *et par un couple quelconque de foyers associés sont rectangles isoscèles.*

Les relations (13'), (14'), (15') caractérisent les congruences à foyers associés équidistants du point O correspondantes par la *forme* qu'affecte le triangle isoscèle déterminé par le point O et par les foyers F'_1, F'_2 situés sur un même rayon quelconque, forme qui *ne dépend que de la distance* OI′ *du point* O *au rayon envisagé*, et qui est *complètement déterminée* (triangle rectangle isoscèle) pour les congruences du troisième type [transformées par $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ des congruences normales dont les segments focaux sont vus du point fixe O sous un angle droit].

5. Transformation du problème de l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. — Les équations (13), (14), (15) rentrent dans le type général

$$\mathcal{F}(\Delta_{22}\Phi, \Delta\Phi) = 0, \tag{17}$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction arbitraire des deux paramètres différentiels du premier et du deuxième ordre $\Delta\Phi$ et $\Delta_{22}\Phi$ relatifs au ds^2 sphérique. Ce qui a été dit

pour les trois types particuliers d'équations dont il vient d'être question s'applique à toutes les équations de la forme (17). Ces équations définissent les congruences normales (D) pour lesquelles, sur chaque rayon D, les positions des foyers F_1, F_2 sont liées par la relation fixe

$$\mathcal{F}\left(\overline{IF_1} \times \overline{IF_2}, \overline{OI}^2\right) = 0,$$

et leur intégration est un problème équivalent à celui de la recherche des congruences (D′) à foyers associés équidistants d'un point fixe pour lesquelles on a, sur chaque rayon D′

$$\mathcal{F}\left(\overline{I'F'_1} \times \overline{I'F'_2}, \overline{OI'}^2\right) = 0,$$

soit en vertu de $\overline{I'F'_1} + \overline{I'F'_2} = 0$,

$$\mathcal{F}\left(-\overline{I'F'_1}^2, \overline{OI'}^2\right) = 0. \tag{17'}$$

(17′) exprime que la *forme* du triangle $OF'_1F'_2$ (isoscèle de sommet O) relatif à un rayon quelconque D′ de (D′) *ne dépend que de la distance du rayon au point fixe* O, et si l'on veut déterminer les congruences (D′) satisfaisant à (17′), l'intégration de (17) pourra, comme on va le voir, être réalisée par la quadrature d'une différentielle totale exacte.

Supposons connues les congruences à foyers associés équidistants du point fixe O vérifiant la relation (17′), et soit (D′) l'une quelconque d'entre elles. On connaîtra donc les vecteurs $\overrightarrow{OI'}$ et $\vec{N}$ (vecteur unitaire de D′), dont les positions sont des fonctions des deux paramètres u et v qui fixent l'image du rayon D′ sur la sphère unitaire Σ de centre O. On pourra par suite construire la congruence *normale* (D) dont (D′) dérive par la transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, et la fonction $\Phi(u, v)$ relative à cette congruence sera la solution générale de l'équation aux dérivées partielles (17). Cette solution $\Phi(u, v)$ se détermine de la façon suivante :

On obtient le point I du rayon générateur D de la congruence normale (D) en faisant tourner $\overrightarrow{OI'}$ de $-\frac{\pi}{2}$ autour de la parallèle Δ à D′ issue du point fixe O; I′ vient alors en I tel que

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI'} \wedge \vec{N},$$

et D est la droite issue de I de vecteur unitaire $\vec{N}$.

Quant à la fonction Φ solution générale de (17), qui représente comme l'on sait la distance algébrique, $\Phi = \overline{IM}$, du point I au point M où D perce l'une quelconque des surfaces Θ orthogonales aux rayons de la congruence (D), on l'obtient en exprimant l'orthogonalité de $\overrightarrow{dM} = d\left(\overrightarrow{OI} + \Phi\vec{N}\right)$ et de $\vec{N}$, ce qui

donne

$$d\Phi = -\vec{N}\, d\overrightarrow{OI},$$

le second membre étant une différentielle totale exacte puisque (D) est une congruence normale.

En remplaçant $\overrightarrow{OI}$ par son expression donnée plus haut, on obtiendra la solution générale de l'équation (17) qui est fournie par la quadrature

$$\Phi = \int \vec{N}\, d\left(\overrightarrow{OI'} \wedge \vec{N}\right). \tag{18}$$

4. Cas d'intégration complète. — La transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ nous a permis de réaliser, pour l'intégration des équations aux dérivées partielles (17), un progrès à rapprocher de celui que la célèbre méthode de Weingarten a réalisé pour l'intégration de l'équation de Monge-Ampère du problème général de la déformation des surfaces.

Dans ce dernier cas l'intégration est, comme l'on sait, ramenée à la détermination d'une famille de surfaces définies par une certaine relation entre les couples de rayons de courbure principaux associés.

Dans le cas des équations (17) l'intégration est ramenée à la détermination d'une famille, non plus de surfaces comme dans la méthode de Weingarten, mais de congruences rectilignes, définies par une relation déterminée entre les positions des couples de foyers associés.

La méthode de Weingarten a permis, comme il est bien connu, d'obtenir les différents cas (au nombre de cinq) d'intégration complète de l'équation du problème de la déformation. Nous allons indiquer ici un type particulier d'équations (17) susceptible lui aussi d'une intégration complète.

Soit l'équation

$$\Delta\Phi - \Delta_{22}\Phi = 1, \tag{19}$$

qui ne diffère que par le signe placé devant $\Delta_{22}\Phi$ de l'équation (13) (qu'on ne sait pas intégrer complètement). La méthode exposée au n° 3 ramène, comme on l'a vu, l'intégration de (19) à la recherche des congruences (D'), à foyers associés équidistants du point O, caractérisées par la propriété géométrique

$$\overline{OI'}^2 + \overline{I'F'_1}^2 = 1, \tag{19'}$$

qu'on obtient en remplaçant dans (19), $\Delta_{22}\Phi = \overline{IF}_1 \times \overline{IF}_2$ par $\overline{I'F'}_1 \times \overline{I'F'}_2 = -\overline{I'F'_1}^2$, et $\Delta\Phi = \overline{OI}^2$ par $\overline{OI'}^2$.

Le premier membre de (19') n'est autre chose que $\overline{OF'_1}^2$, et la relation (19') exprime que F'_1 et F'_2 sont situés sur la sphère Σ de centre O et de rayon 1. Il en

résulte que les deux nappes focales de la congruence (D′), devant être portées toutes les deux par la sphère Σ, *se réduisent à deux courbes* (pouvant d'ailleurs être confondues) tracées sur Σ. Les remarques géométriques du n° 3 vont alors permettre de ramener à de simples calculs algébriques et à l'intégration de différentielles totales exactes, la détermination de la solution générale de toutes les équations aux dérivées partielles du type (19) correspondant aux différentes formes possibles de l'élément linéaire de la sphère unitaire Σ.

Supposons cet élément linéaire ($ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$) déterminé par un choix arbitraire des coordonnées curvilignes (u, v) du point courant $N(u, v)$ de Σ, et traçons, sur Σ, deux courbes quelconques (P_1) et (P_2), décrites par les points $P_1(\alpha)$ et $P_2(\beta)$ dont les positions sont respectivement définies par les deux paramètres α et β.

Le point I′ du rayon $D' \equiv P_1P_2$ de la congruence (D′) est défini par

$$\overrightarrow{OI'} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}}{2}, \tag{20}$$

et le vecteur unitaire $\overrightarrow{N}$ de D′ a pour expression

$$\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|}. \tag{21}$$

$\overrightarrow{OI'}$ et $\overrightarrow{N}$ sont des fonctions connues de α et β, paramètres qui sont liés aux paramètres u et v auxquels est rapporté l'élément linéaire de Σ par la relation

$$\overrightarrow{N}(\alpha, \beta) = \overrightarrow{N}(u, v),$$

moyennant laquelle on peut regarder α et β comme exprimés en u et v.

La relation (18) du n° 3 fait alors connaître la solution générale Φ de l'équation (19), qu'on obtient en calculant

$$\Phi = -\int \overrightarrow{N}\, d\left(\overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{OI'}\right),$$

où $\overrightarrow{OI'}$ et $\overrightarrow{N}$ ont les expressions (20) et (21), et en remplaçant dans le résultat α et β par leurs expressions en u et v.

Les deux fonctions dont dépend cette solution générale se manifestent géométriquement par les deux courbes (P_1) et (P_2), arbitrairement choisies sur la sphère Σ.

5. Remarques. — Les surfaces Θ orthogonales aux rayons des congruences normales dont les différents segments focaux sont vus d'un point fixe O sous

un angle droit (n° 2) sont, comme l'a montré G. Darboux (²), celles que la méthode de transformation de Weingarten à laquelle il a été fait allusion au n° 4 associe aux surfaces à courbure totale constante.

L. Bianchi (³) a montré que les surfaces orthogonales aux rayons des congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe (réelle ou de rayon imaginaire pur) considérées au n° 2 dérivent simplement des surfaces précédentes; ce sont les surfaces orthogonales aux congruences (normales) formées par les axes des cercles passant par O et orthogonaux aux surfaces Θ : le problème de la détermination des surfaces à courbure totale constante se trouvait ainsi ramené à celui de la recherche des surfaces de l'un quelconque des trois types ci-dessus.

Les travaux cités ne font pas mention des formes *invariantes* (13), (14), (15) qu'on peut donner aux équations aux dérivées partielles des surfaces des types envisagés, et que j'ai obtenues pour la première fois (simultanément avec celles des équations aux dérivées partielles de nombreux autres types de surface géométriquement intéressants) dans le Mémoire des *Annales de l'École Normale Supérieure* cité dans l'Introduction.

L'importance de l'invariance ci-dessus mérite d'être soulignée. Grâce à elle nous avons pu ici *prolonger la transformation de Weingarten* par une autre, fournissant une transformation plus radicale encore que celle de Weingarten du problème de la recherche des surfaces à courbure totale constante, et ramenant la détermination de ces dernières surfaces à celle de types déterminés de congruences rectilignes à foyers associés équidistants d'un point fixe, à savoir les congruences définies par les propriétés géométriques (13′), (14′), (15′) du n° 2.

Toute transformation de ces dernières congruences rectilignes en congruences de même type conduit à une méthode de transformation des surfaces à courbure totale constante en nouvelles surfaces à courbure totale constante; il y a là relativement à cette dernière transformation un point de vue nouveau que nous nous bornerons ici à signaler, pour lequel on pourra trouver quelques indications dans le Mémoire cité des *Annales de l'École Normale Supérieure*, et qui permet de compléter sur certains points les résultats obtenus sur ce sujet.

En ce qui concerne plus spécialement le cas d'intégration complète présenté par l'équation (19) du n° 4, il convient de remarquer que le succès de la méthode exposée tient, comme cela arrive souvent en pareille matière, à un phénomène de *dégénérescence*, se manifestant par la *réduction à deux courbes* des deux nappes de la surface focale des congruences à la détermination desquelles le problème de l'intégration est en définitive ramené.

Une telle dégénérescence se retrouve par exemple, ainsi qu'il est bien connu,

---

(²) G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 322.

(³) L. Bianchi, *Opere*, vol. 8, p. 40.

à l'origine de la possibilité d'intégration complète des équations *de Laplace* pour lesquelles l'une des équations de la suite (de Laplace) des transformées a au moins un invariant nul, ce qui, pour la suite des surfaces représentatives des équations transformées successives, équivaut à dire que cette suite se termine dans un sens au moins, les surfaces terminant la suite dégénérant soit en courbes soit en surfaces développables.

RIGIDITÉS

DES

SURFACES CONVEXES A BORDS

PAR Mme SIMONE BAUDOIN-GOHIER.

INTRODUCTION.

Dans ce travail, nous serons amenée à considérer deux sortes de surfaces, qu'il est préférable de définir dès maintenant :

1° On appelle surface plongée dans l'espace euclidien ordinaire E_3 de dimension 3, un ensemble F de points de E_3 sur lequel la topologie de E_3 induit une structure de variété de dimension 2, c'est-à-dire tel que :

a. chacun des points de F possède un voisinage homéomorphe à un disque euclidien ouvert;

b. il y a connexité par arcs : deux points quelconques peuvent être joints par un chemin de F.

Si A, B $\in$ F peuvent être joints par un chemin de longueur euclidienne finie, il existe une limite inférieure de cette longueur qui prend le nom de *distance de* A *à* B *sur la surface* F.

Cette distance satisfait aux propriétés suivantes :

$$\rho(AB) = 0 \quad \text{entraîne} \quad A = B,$$
$$\rho(AB) = \rho(BA),$$
$$\rho(AB) + \rho(BC) \geq \rho(AC).$$

Notre surface est alors un espace métrique, de métrique ρ. Si, entre deux surfaces F et F*, de métriques respectives ρ et ρ^*, il existe un homéomorphisme

tel que

$$\rho(AB) = \rho^*(A^*B^*)$$

pour A et B quelconques, les deux surfaces sont *isométriques*.

2° Une classe très restreinte de surfaces est celle des surfaces différentiables : ce sont des variétés différentiables de dimension 2, plongées différentiablement et régulièrement dans E_3; O étant un point fixe de E_3, il existe sur F des systèmes de coordonnées locales $(x^i x^j)$ telles que $\overrightarrow{OM}(M \in F)$ est une fonction C^n (n fois continûment dérivable) de ces coordonnées

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(x^i x^j).$$

Pour que deux surfaces différentiables soient isométriques, il faut et il suffit qu'elles possèdent le même élément linéaire

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (i, j = 1, 2).$$

Pour les hypersurfaces différentiables d'un espace euclidien de dimension quelconque, on connaît le théorème de plongement énoncé par Eisenhart [1] qui pose le problème en termes très simples :

THÉORÈME I. — *Pour que*

$$\varphi = g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$
$$\psi = B_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

soient les première et deuxième formes fondamentales de V_n *plongée dans* E_{n+1} *réel, il faut et il suffit que soient satisfaites les équations de Gauss-Codazzi :*

$$R_{ijkl} = e(B_{ik}B_{jl} - B_{il}B_{jk}),$$
$$B_{ij,k} - B_{ik,j} = 0,$$

V_n *est alors déterminée à un déplacement près dans* E_{n+1}.

Lorsque, d'une part, le plongement de V_n dans E_{n+1} est possible, et que, d'autre part, V_n est déterminé à une transformation orthogonale près, par sa première forme fondamentale, on dit que V_n est (globalement) *rigide* dans E_{n+1}. Il est équivalent de dire qu'*une surface est rigide si toute surface qui lui est isométrique est égale ou symétrique*.

Cette dernière définition de la rigidité est la seule valable dans le cas où la surface n'est pas différentiable (cas du 1°).

Le théorème I permet de prouver aisément la rigidité de toute hypersurface différentiable de E_{n+1} pour $n > 2$, R_{ijkl} étant déterminé par les g_{ij}, sous la condition que trois au moins des rayons de courbure principaux soient finis.

L'espace euclidien ordinaire fait exception et, *a priori*, une surface quelconque n'est pas rigide. Ce résultat n'est pas pour nous étonner : nous avons tous l'expérience de surfaces faites de matière mince, flexible et inextensible, et qui peuvent subir des déformations.

Cependant, nous avons également l'expérience, ou l'intuition, de surfaces indéformables dans les mêmes conditions, par exemple la sphère. Il y a donc un partage à faire parmi toutes les surfaces possibles de l'espace ordinaire; ce qui se traduit dans le cas différentiable, par la recherche de conditions supplémentaires qui, jointes aux équations de Gauss-Codazzi, définissent sans équivoque la seconde forme fondamentale à partir de la première. On est ainsi amené à définir des classes de surfaces S, telles que, une surface est rigide si on lui impose de satisfaire aux conditions qui définissent la classe S (par exemple la classe des surfaces différentiables convexes closes).

Dès l'Antiquité, les géomètres se sont posé le problème de la rigidité, mais seulement pour les surfaces qu'ils connaissaient, en particulier les polyèdres. Ils étudièrent les polyèdres isomorphes, et Euclide affirma le premier qu'il n'existe qu'un seul polyèdre possédant des faces données, disposées dans un ordre donné. De cette affirmation, la première démonstration, d'une clarté remarquable, fut donnée par Cauchy [2] en 1813; cette démonstration utilise exclusivement des résultats de géométrie élémentaire. La question en resta là jusqu'à la fin du XIX^{e} siècle. Avant qu'elle puisse être abordée sous un angle nouveau, il fallut tout le développement de la géométrie différentielle classique à la suite des travaux de Gauss, et de l'analyse. Le premier problème résolu par les nouvelles méhodes fut celui de la rigidité de la sphère : en 1899 par Liebmann. En 1917, donc plus d'un siècle après Cauchy, H. Weyl [3] donna une nouvelle démonstration de la rigidité des polyèdres, qui si elle ne possède pas l'élégance de celle de Cauchy, a le mérite très important de pouvoir s'étendre aux surfaces closes convexes, à courbure continue. Weyl ne fut pas suivi dans sa tentative de jeter un pont entre les deux sortes de surfaces, celles de la géométrie élémentaire et celles de la géométrie différentielle; jusqu'à ces dernières années on étudia à peu près exclusivement la rigidité des surfaces différentiables, et parmi celles-ci on est parvenu à des résultats principalement pour les surfaces convexes. En 1927, Cohn-Vossen, en 1943 Herglotz [4] prouvèrent par des méthodes différentes la rigidité des surfaces closes convexes différentiables de classe C^3.

Depuis quelques années, les développements de l'analyse moderne, de la topologie, de la théorie des ensembles, ont donné un sens nouveau, très large, à la notion de fonction, et fait tomber définitivement les barrières entre les deux espèces de surfaces; ces dernières ne constituent plus que deux classes assez restreintes de l'ensemble de toutes les surfaces qui peuvent être envisagées, et la géométrie différentielle classique devient une branche de la géométrie dite intégrale. C'est ainsi qu'un théorème de Pogorelov [5] résout définitivement le problème de la rigidité des surfaces closes convexes, en élargissant le théorème de Cohn-Vossen à toute surface close convexe, (telle que nous la définirons plus loin).

Il existe, à côté des problèmes de rigidité que nous venons d'envisager, des

problèmes voisins mais distincts par leurs méthodes et leurs résultats; ce sont :

1° *La rigidité locale* ou rigidité pour un voisinage suffisamment petit d'un point d'une surface. Darboux [6] a montré que le voisinage d'un point arbitraire d'une surface analytique est non rigide.

2° *La rigidité infinitésimale :* On étudie les possibilités de déformation d'une surface à partir d'une position donnée, chaque point subissant un déplacement infiniment petit. Il y a *déformation infinitésimale* si, après le déplacement individuel de chaque point, la longueur d'une courbe arbitraire de la surface a varié d'une quantité infiniment petite, d'ordre supérieur à l'ordre du déplacement. Si les déplacements de tous les points conduisent à un déplacement global de la surface on dit qu'elle est *infinitésimalement rigide*. Nous définirons de façon plus précise ces notions au chapitre II.

La rigidité infinitésimale des surfaces a été étudiée notamment par W. Blaschke, N. Efimov, E. Rembs; W. Blaschke [7] a prouvé qu'une surface close convexe, de classe C^3 est infinitésimalement rigide.

Pour la distinguer de ces deux autres rigidités, nous appellerons la rigidité que nous avons considérée en premier lieu : rigidité globale, ou en abrégé : R.G.: une surface globalement rigide sera dite G. R. De même, les abréviations R. I. et I. R. signifient respectivement : rigidité infinitésimale et infinitésimalement rigide.

On pourrait croire, et les résultats cités semblent nous y inviter, que la R. I. d'une surface est la conséquence de sa R. G.; un exemple simple prouve que ceci est inexact :

Soit un cercle dont la circonférence est fixée, il est évidemment G. R., cependant il n'est pas I. R.; en effet, on peut soumettre chacun de ses points à un déplacement infinitésimal, perpendiculaire au plan du cercle, et qui tend vers zéro sur le bord du cercle; les conditions de la déformation infinitésimale, c'est-à-dire de la non R. I. sont remplies.

Cependant nous constaterons une analogie certaine dans l'établissement des formules qui permettent de conclure à la R. I. ou à la R. G. d'une surface.

Nous considèrerons toujours par la suite des surfaces « lisses », c'est-à-dire partout de classe C^4. Cependant nous serons amenée à utiliser le théorème de Pogorelov relatif à une surface convexe du type défini en 1°.

Il nous faut maintenant définir la notion de convexité globale d'une surface de E_3.

Une *surface convexe* est la frontière ou toute partie connexe de la frontière d'un corps convexe (ensemble de points de E_3 qui contient tous les points d'un segment quand il en contient les extrémités).

De cette définition résulte, comme le montre Alexandrov [8] que :

a. une surface convexe est douée d'une métrique; le problème de la R. G. a donc un sens pour cette surface;

b. la frontière entière d'un corps convexe est une surface complète en ce sens que tout ensemble infini borné, admet un point d'accumulation situé sur la surface.

Pour une surface différentiable nous définissons la courbure de Gauss par l'équation de Gauss citée dans le théorème I. La *courbure intégrale* d'une surface connexe Δ, de courbure de Gauss K, d'élément de surface *do*, est égale à la valeur de l'intégrale

$$\iint_{\Delta} K\, do.$$

Si δ est l'image sphérique de Δ et dw l'élément d'aire de la sphère unité, cette intégrale est égale à

$$\iint_{\delta} dw,$$

c'est-à-dire à l'aire de l'image sphérique du domaine δ. La condition de *convexité locale* pour une surface C^2 est de posséder une courbure de Gauss positive.

En général il n'y a aucune équivalence entre les deux conditions de convexités locale ou globale. Un théorème de Hadamard [9] détermine une classe de surfaces pour lesquelles l'une est conséquence de l'autre.

Théorème II. — *Si une surface est close et à courbure de Gauss partout continue et positive, elle est* (*globalement*) *convexe*.

Remarquons qu'on peut étendre le théorème aux surfaces à $K \geqq 0$ qui contiennent un ensemble dense de points à courbure de Gauss positive.

Ici, nous utilisons la méthode qui a permis à Herglotz [4] de démontrer la R. G. des surfaces closes convexes C^3, pour prouver la R. G. de certaines surfaces convexes à bords C^2. Nous parviendrons à des résultats plus complets en employant conjointement le théorème de Pogorelov [5] :

Théorème III. — *Une surface close convexe quelconque est G. R.*

Dans le chapitre I nous exposons la méthode de Herglotz et les résultats immédiats qu'on peut en tirer pour des surfaces à bords; en particulier celles qui sont tout le long de leurs bords, soit tangentes à une sphère, soit tangentes à un cylindre de révolution, ou les surfaces qui ont une courbure de Gauss positive ou même nulle, sur un ensemble dense de points.

Dans le chapitre II nous définissons la R. I. et nous appliquons la formule de

Blaschke pour démontrer la R. I. de certaines surfaces R définies dans ce chapitre.

Dans le chapitre III nous étudions plus particulièrement la R. G. d'une surface convexe tangente tout le long de son bord à une sphère, rigidité déjà étudiée en certains cas au chapitre I, mais démontrée complètement en faisant appel au théorème de Pogorelov.

Enfin, au chapitre IV, nous définissons une classe de surfaces convexes à bords, de courbure intégrale 4π; nous montrerons qu'elles sont G. R.; en application directe de cette étude, nous retrouvons un théorème d'A. D. Alexandrov sur des surfaces closes homéomorphes au tore. Ce théorème détermine la condition pour que les lignes frontières séparant les parties à courbure de Gauss de signes opposés soient des courbes planes. Nous montrons que dans ce cas, la courbure intégrale de la partie à courbure de Gauss positive atteint son minimum 4π.

Je tiens à exprimer à M. Henri Villat toute ma reconnaissance pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce Jury.

J'ai été dirigée vers ces problèmes par M. André Lichnerowicz qui a suivi ce travail avec sollicitude, qui m'a apporté l'aide de ses critiques rigoureuses et l'exemple d'une pensée mathématique très étendue. Je suis heureuse de lui témoigner en cette occasion, toute ma gratitude.

Je remercie également M. Georges Darmois pour la bienveillance avec laquelle il a accueilli ce projet de thèse; et enfin M. Eduard Rembs, de Berlin, éminent spécialiste de ces questions depuis de longues années, qui m'a fait le très grand plaisir de manifester de l'intérêt pour ma première publication et qui n'a cessé depuis de me prodiguer ses conseils et ses encouragements.

CHAPITRE I.

L'intérêt de l'élégante méthode suivie par Herglotz dans l'Ouvrage cité [4], est de déduire de la propriété R. G. d'une surface, du fait qu'une certaine intégrale, prise sur son bord, est non positive. Dans le seul cas envisagé par l'auteur, celui d'une surface sans bord, la condition ci-dessus est automatiquement remplie, puisque l'intégrale disparaît. Cependant, depuis, E. Rembs [10] et K. P. Grotemeyer [11] ont déterminé des surfaces avec bords, pour lesquels la condition est satisfaite. A l'exposé de Herglotz lui-même, rapide, mais qui met au second plan le contenude l'intégrale qui nous intéresse (parce que ce contenu importait peu à l'auteur), nous préférons celui de Grotemeyer. Si sa méthode est plus compliquée en apparence, elle présente l'avantage d'utiliser des notations tensorielles, susceptibles de généralisation, et surtout de donner à l'intégrale de bord une forme qui peut être clairement interprétée en termes géométriques.

1. Exposé de la méthode de Herglotz. — Nous désignons par F et F* deux surfaces C^3, supposées isométriques, donc possédant la même première forme fondamentale.

A tout élément T, tenseur ou vecteur de F, correspond un élément T*, défini de la même façon relativement à F*.

Si les surfaces ne sont pas égales, l'homéomorphie ainsi définie ne coïncide pas avec l'application isométrique de F sur F*, qui fait correspondre non seulement les points des surfaces mais aussi les vecteurs tangents. Nous désignerons par V* le vecteur de F, isométrique du vecteur V* de F*, et par $\overline{V}$ le vecteur de F*, isométrique du vecteur V de F.

Supposons les surfaces représentées par

$$r(u^1 u^2) \quad \text{et} \quad r^*(u^1 u^2).$$

Dans la suite nous désignerons par :

$|k$ la différentiation ordinaire par rapport au paramètre u^k ;
$,k$ la différentiation covariante par rapport au même paramètre ;
$\dot{x}$ la dérivée de x par rapport à l'abscisse curviligne s sur la courbe bord.

A. On définit les tenseurs

$$g_{ik} = (r_i r_k) \qquad (i, k, \ldots = 1, 2),$$
$$g = \| g_{ik} \|,$$

g est défini positif, on pose

$$g = \Delta^2, \qquad r_i = \frac{dr}{du^i},$$

les g_{ik} sont les coefficients de la première forme fondamentale de F ; on a ici

$$g_{ik} = g^*_{ik}.$$

Le vecteur unitaire de la normale est défini par

$$\xi = \frac{r_1 \wedge r_2}{| r_1 \wedge r_2 |} = \frac{r_1 \wedge r_2}{\Delta}.$$

On a

$$B_{ik} = (\xi r_{i|k}),$$

les B_{ik}, coefficients de la seconde forme fondamentale de F, sont les symboles de Christoffel de plongement : Γ^3_{ik}. On sait que ce sont des tenseurs par rapport aux indices inférieurs.

D'après l'équation de Gauss, on a

$$\frac{\| B_{ik} \|}{g} = K.$$

D'après le théorème I, il suffira de montrer que

$$B_{ik} = B^*_{ik},$$

chacun de ces tenseurs satisfaisant aux équations de Codazzi, pour démontrer l'égalité de F et F*.

B. Nous nous servirons de la relation suivante :

$$r_{i,k} = B_{ik}\zeta \tag{1}$$

et de la relation de Codazzi :

$$B_{ik,l} - B_{il,k} = 0, \tag{2}$$

ainsi que de la formule de Stokes :

$$\iint_D C^k{}_{,k}\, do = -\oint_{\partial D} C^k n_k\, ds, \tag{3}$$

où $C^k(u^i)$ est un champ continuement différentiable de vecteurs, D est un domaine d'une surface C^3 limité par une courbe C^1 (∂D), le sens de parcours sur ∂D est choisi de façon que, lorsqu'on regarde dans la direction de la normale positive à D, on laisse D à gauche, *do* est l'élément d'aire de D, et *ds* l'élément linéaire de la courbe bord.

On pose

$$C_{ik} = B_{ik} - B^*_{ik},$$
$$\underline{B}^{ik} = \varepsilon^{i\alpha}\,\varepsilon^{k\beta}\,B_{\alpha\beta},$$
$$\varepsilon_{ik} = (\zeta r_i r_k).$$

On a, dans le cas envisagé :

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \Delta,$$
$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = \frac{1}{\Delta},$$
$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0.$$
$$\underline{B}^{11} = \frac{1}{g} B_{22},$$
$$\underline{B}^{12} = -\frac{1}{g} B_{12},$$
$$\underline{B}^{22} = \frac{1}{g} B_{11}.$$

C. Écrivons sous forme tensorielle les grandeurs connues :

$$K = \frac{1}{2} B_{ik}\underline{B}^{ik},$$
$$H = \frac{1}{2} g_{ik}\underline{B}^{ik} \qquad \text{(courbure moyenne)},$$
$$J = B^*_{ik}\underline{B}^{ik} = \underline{B}_{ik}B^{*ik}.$$

On obtient aisément les deux relations suivantes :

$$\frac{\|C_{ik}\|}{g} = (B_{ik} - B^*_{ik})(\underline{B}^{ik} - \underline{B}^{*ik}) = 2K - J,$$
$$\underline{B}^{ik}C_{ik} = B_{ik}\underline{C}^{ik} = 2K - J,$$

d'où

$$\frac{\| C_{ik} \|}{g} = C^{ik} B_{ik}. \tag{4}$$

D'autre part, la relation de Codazzi s'écrit

$$B^{ik}{}_{,k} = 0,$$

d'où

$$C^{ik}{}_{,k} = 0. \tag{2 bis}$$

De (1), (4) et (2 *bis*), on déduit l'équation

$$(C^{ik} r_i)_{,k} = \frac{\| C_{ik} \|}{g} \xi. \tag{5}$$

Par intégration sur F, en appliquant la formule (3), on obtient l'équation fondamentale

$$\iint_F \frac{\| C_{ik} \|}{g} \xi \, do = - \oint C^{ik} r_i n_k \, ds. \tag{6}$$

D. Étudions d'abord l'intégrale de bord qui figure au second membre de (6).

Nous définissons le vecteur unitaire η de façon que le système

$$r, \quad \eta, \quad \xi$$

soit orthogonal et normé.

L'expression figurant au second membre de (6) représente un vecteur du plan tangent à F; posons

$$C^{ik} r_i n_k = \alpha \dot{r} + \beta \eta,$$

n^k est le vecteur normal intrinsèque à la courbe bord et $\dot{u}^i$ est le vecteur tangent intrinsèque.

En utilisant les relations

$$\begin{aligned} n_k &= \varepsilon_{ik} \dot{u}^i, \\ g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k &= 1, \\ B_{ik} \dot{u}^i n^k &= a, \\ B_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k &= b \end{aligned}$$

(a et b sont respectivement la torsion géodésique et la courbure normale de la courbe bord), on trouve l'expression de Grotemeyer :

$$- C^{ik} r_i n_k = (a - a^*) \dot{r} - (b - b^*) \eta$$

qui peut encore s'écrire sous une autre forme; en effet on a

$$\frac{d\xi}{ds} = - b \dot{r} - a \eta,$$

d'où

$$a \dot{r} - b \eta = \xi \wedge (- b \dot{r} - a \eta) = \xi \wedge \frac{d\xi}{ds},$$

$$(a^* \dot{r} - b^* \eta) \, ds = \overline{\xi^* \wedge d\xi^*}.$$

L'intégrale de Herglotz prend alors l'une ou l'autre des formes

$$(I_1) \qquad \iint_F \frac{\| C_{ik} \|}{g} \xi \, do = \oint [(a - a^*) r - (b - b^*) \eta] \, ds,$$

$$(I_2) \qquad \iint_F \frac{\| C_{ik} \|}{g} \xi \, do = \oint (\xi \wedge d\xi - \overline{\xi^* \wedge d\xi^*}).$$

2. Discussion suivant le signe de K. — Étudions le signe du déterminant

$$\frac{\| C_{ik} \|}{g}$$

et posons

$$\frac{1}{\sqrt{g}} B_{11} = X,$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} B_{12} = Y,$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} B_{22} = Z,$$

en développant il vient

$$\frac{\| C_{ik} \|}{g} = \begin{vmatrix} X - X^* & Y - Y^* \\ Y - Y^* & Z - Z^* \end{vmatrix} = f.$$

Considérons la famille de quadriques Q ayant pour équations en coordonnées cartésiennes

$$XZ - Y^2 - K = 0,$$

K variant de façon continue d'après les hypothèses de différentiabilité faites sur F.

Deux points P(X, Y, Z) et P* (X*, Y*, Z*) sont conjugués par rapport à une quadrique Q si leurs coordonnées satisfont à la relation suivante :

$$XZ^* - 2YY^* + ZX^* - 2K = 0,$$

c'est-à-dire à

$$(-f) = 0.$$

Supposons P fixé, l'équation précédente représente le plan conjugué de P par rapport à Q; l'expression f conserve un signe constant si P* reste dans le même demi-espace limité par le plan conjugué (pour connaître ce signe il suffit de placer P* à l'origine).

Or, d'après les relations de Gauss :

$$\frac{\| B_{ik} \|}{g} = \frac{\| B^*_{ik} \|}{g} - K,$$

P et P* se trouvent donc sur la même quadrique Q. Trois cas sont à envisager suivant la nature de cette quadrique :

a. $K > 0$. — Les quadriques Q sont des hyperboloïdes à deux nappes,

symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine des coordonnées et au plan

$$X + Z = 0.$$

On constate que f est positive si P et P* sont sur deux nappes différentes et négative s'ils sont sur la même nappe; or, si nous orientons la normale ξ du côté concave de F, ce qui a un sens puisque nous supposons la courbure de Gauss positive en tout point, B_{11} et B_{22} sont égales à un facteur positif près aux courbures normales le long des lignes coordonnées, et sont donc positives. Il en est de même des grandeurs X, X*, Y, Y*. Par suite P et P* se trouvent sur la même nappe de Q, dans le dièdre limité par les demi-plans

$$Z = 0, \quad X > 0 \quad \text{et} \quad X = 0, \quad Z > 0.$$

Dans ce cas on arrive à la conclusion *f est négative, si* P *et* P* *sont distincts, et ne peut être nulle que si* P *et* P* *sont confondus.*

b. $K < 0$. — Les quadriques Q sont des hyperboloïdes réglés; en chacun de leurs points elles sont traversées par le plan tangent, P et P* étant tous les deux sur Q, on ne peut savoir s'ils sont ou non du même côté du plan tangent en P, ni par suite déterminer le signe de f. Il en résulte que la méthode de Herglotz, qui repose sur l'hypothèse d'un signe constant de f, ne peut s'appliquer aux surfaces à courbure de Gauss négative sur un domaine d'aire non nulle.

c. $K = 0$. — Les quadriques Q sont des cônes ayant leur sommet à l'origine. Les conclusions sont à peu près les mêmes que dans le cas *a*, c'est-à-dire : f est négative si P et P* sont sur une même nappe de Q et positive s'ils sont sur deux nappes différentes à la condition qu'*ils ne se trouvent pas sur une même génératrice*. Dans cette éventualité, en effet f est nulle, et l'on a

$$\frac{X^*}{X} = \frac{Y^*}{Y} = \frac{Z^*}{Z} = \lambda, \tag{7}$$

avec λ positif si les courbures normales correspondantes sur F et F* ont le même signe.

La différence essentielle entre les cas *a* et *c* réside dans le fait que, $f = 0$ entraîne dans le premier cas : P et P* sont confondus, tandis que dans le dernier on ne peut que conclure : P et P* sont sur une même génératrice de Q c'est-à-dire la relation (7) est vérifiée.

Cependant, supposons que F (et par suite F*), aient une courbure $K \geqq 0$ (l'ensemble des points à $K > 0$ est partout dense) si d'autres considérations imposent $f = 0$ partout, $\lambda = 1$ aux points où la courbure de Gauss est positive, et, par continuité on peut conclure que $\lambda = 1$ en tout point.

3. Rigidité d'une surface convexe close. — C'est cette dernière hypothèse que nous ferons toujours quand nous considérerons des surfaces à courbure de

Gauss positive (nous avons déjà remarqué que le théorème II de Hadamard peut justement s'étendre aux surfaces où K s'annule en des points isolés et est positive partout ailleurs). Si, de plus, la surface est globalement convexe, il existe au moins un point intérieur au corps convexe qui admet la surface pour frontière et qu'aucun plan tangent ne traverse. Nous prendrons un tel point pour origine du vecteur r.

Multiplions scalairement les deux termes de l'équation fondamentale (5) par r. Le vecteur unitaire de la normale ξ étant orienté vers l'intérieur de F, le produit scalaire (ξr) est négatif pour tout point de F. L'équation (5) devient

$$(\underline{C}^{ik} r_i r)_{,k} - \underline{C}^{ik} g_{ik} = \frac{\| C_{ik} \|}{g} (r\xi),$$

or

$$\underline{C}^{ik} g_{ik} = 2H - 2H^*.$$

D'où par intégration sur la surface F :

$$(I_3) \qquad \iint_F \frac{\| C_{ik} \|}{g} (r\xi)\, do = -\iint_F (2H - 2H^*)\, do + \oint [(a - a^*) r\dot{r} - (b - b^*) r\eta]\, ds$$

ou

$$(I_4) \qquad \iint_F \frac{\| C_{ik} \|}{g} (r\xi)\, do = -\iint_F (2H - 2H^*)\, do + \oint r(\xi \wedge d\xi - \overline{\xi^* \wedge d\xi^*}).$$

Nous avons de même pour la seconde surface :

$$(I_5) \qquad \iint_F \frac{\| C^*_{ik} \|}{g} (r^*\xi^*)\, do = \iint_{F^*} (2H - 2H^*)\, do + \oint [(a^* - a) r^*\dot{r}^* - (b^* - b) r^*\eta^*]\, ds$$

ou

$$(I_6) \qquad \iint_{F^*} \frac{\| C^*_{ik} \|}{g} (r^*\xi^*)\, do = \iint_{F^*} (2H - 2H^*)\, do + \oint r^* (\xi^* \wedge d\xi^* - \overline{\xi \wedge d\xi}).$$

D'après l'étude faite au paragraphe 2, les premiers membres de toutes ces équations sont positifs.

En ajoutant membre à membre I_3 et I_4, ou I_4 et I_6, on élimine l'intégrale de surface des seconds membres. Il vient alors

$$(I_7) \qquad \iint_{F^*} \frac{\| C_{ik} \|}{g} [(r\xi) + (r^*\xi^*)]\, do = \oint (a - a^*)(r\dot{r} - r^*\dot{r}^*) - (b - b^*)(r\eta - r^*\eta^*)\, ds$$

ou

$$(I_8)\qquad \iint_F \frac{\|C_{ik}\|}{g}[(r\xi)+(r^*\xi^*)]\,do = \oint r(\xi\wedge d\xi-\overline{\xi^*\wedge d\xi^*})+r^*(\xi^*\wedge d\xi^*-\overline{\xi\wedge d\xi}).$$

Dans le cas d'une surface close (Herglotz), l'intégrale de bord disparaît, et comme l'on a en tout point

$$(r\xi)+(r^*\xi^*)<0,$$

on en déduit que, partout

$$\frac{\|C_{ik}\|}{g}=0$$

D'après l'étude du paragraphe 2, on a alors

$$f=0,$$

les points figuratifs P et P* sont alors (*a* du paragraphe 2) nécessairement confondus. D'où

$$B_{ik}=B^*_{ik}.$$

4. Cas des surfaces convexes a bords. — Si F et F* ont un ou plusieurs bords, et si l'intégrale du second membre de (I_7) ou de (I_8) prise le long des bords, est nulle ou négative, nous arrivons au même résultats : F est G. R.

On obtient immédiatement les théorèmes suivants qui définissent chacun une classe de rigidité dans l'ensemble des surfaces :

Théorème. IV. — *Si une surface* C^3, *à courbure de Gauss positive, a un bord fixé, ou un bord à courbure normale et torsion géodésique constants, elle est G. R.* [12].

En effet, si partout

$$a=a^* \quad \text{et} \quad b=b^*,$$

l'intégrale de bord de (I_7) est nulle.

Théorème V. — *Si une surface convexe* C^3 *à courbure de Gauss positive, a un bord situé dans un plan, et est tangente à ce plan tout le long du bord (bord plan-parabolique), elle est G. R.* [13].

En effet, pour tout point du bord, on a

$$d\xi=d\xi^*=0$$

et l'intégrale de bord de (I_8) est nulle.

Théorème VI. — *Si une surface convexe* C^3 *à courbure de Gauss positive, est tangente tout le long de son bord à une sphère dont le centre lui est intérieur (ou à la limite situé sur la surface) elle est G. R.* [14].

En effet

$$(\xi \wedge d\xi) \quad \text{et} \quad (\overline{\xi^* \wedge d\xi^*})$$

sont des vecteurs situés dans le plan tangent à F; si l'on place l'origine au centre de la sphère, l'intégrale de bord de (I_4) est nulle. On procède de même pour F* (remarquons que les sphères respectivement tangentes à F et F* ne sont pas supposées égales), l'intégrale de bord de (I_6) est nulle, donc aussi celle de (I_8).

5. Cas d'une surface a bord plan. — Nous allons maintenant examiner un cas où les calculs peuvent être considérablement allégés : celui où l'on peut trouver un vecteur fixe e tel que le produit scalaire (ξe) conserve un signe constant sur F. On multiplie scalairement les deux termes de (I_1) et de l'équation analogue pour F*, par e, on ajoute membre à membre les deux équations et l'on obtient pour l'intégrale de bord l'expression suivante :

$$\oint [(a - a^*)(e\dot{r} - e\dot{r}^*) - (b - b^*)(e\eta - e\eta^*)]\, ds.$$

Considérons par exemple une surface convexe (C^3 et à K positive) à bord plan, de courbure intégrale inférieure à 2π, et qui se projette orthogonalement de façon biunivoque sur le plan du bord. Choisissons e perpendiculaire à ce plan, orienté vers le demi-espace qui contient la surface. Sans diminuer la généralité, on peut supposer le plan du bord de F* parallèle à celui de F. On a donc

$$(e\dot{r}) = (e\dot{r}^*) = 0.$$

L'intégrale ci-dessus se réduit à

$$\oint -(b - b^*)(e\eta - e\eta^*)\, ds.$$

Nous donnons ici une démonstration simple et géométrique de l'impossibilité pour cette intégrale d'être positive, et par suite de la R. G. de la calotte considérée.

Supposons le plan du bord perpendiculaire au plan de la feuille et soit xy sa trace; faisons coïncider sur la figure les points M et M* des bords (les plans normaux aux bords en ces points sont confondus avec le plan de la feuille); menons ξ et ξ^* supposées distinctes, normales aux surfaces en M et M*, et η et η^* les normales géodésiques. Portons sur ces vecteurs respectivement, les rayons de courbure géodésique MG et M*G*(ou MG*). Les surfaces étant isométriques, leur courbure géodésique est la même :

$$MG = MG^*.$$

Les centres de courbure normale : N et N* sont à l'intersection des normales ξ et ξ^* et des axes de courbure menés par G et G*, respectivement,

perpendiculaires à xy. Les courbures normales, comme les courbures géodésiques, sont positives. D'après la figure il est évident que

$$e\eta - e\eta^* > 0$$

entraîne

$$MN - MN^* < 0,$$

d'où

$$\frac{1}{MN} - \frac{1}{MN^*} > 0,$$

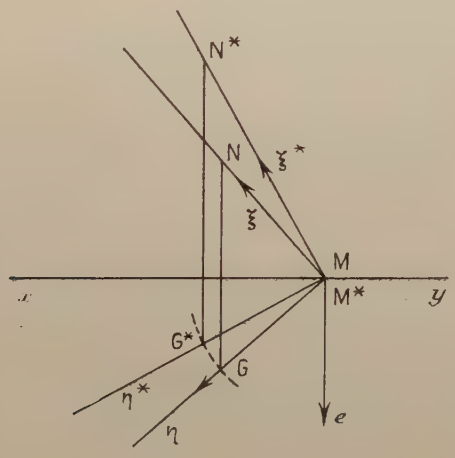
c'est-à-dire

$$b - b^* > 0$$

et inversement. L'intégrale de bord est donc négative, alors que l'intégrale de surface du premier membre :

$$\iint_F \frac{\| C_{ik} \|}{g} [(e\xi) + (e\xi^*)]\, do$$

est toujours positive. Nous pouvons énoncer le théorème suivant (déjà prouvé



par K. P. Grotemeyer, par une méthode beaucoup plus longue, et par A. V. Pogorelov, sans hypothèse de différentiabilité) :

Théorème VII. — *Une surface* C^3 *à bord plan, à courbure de Gauss positive, et qui se projette orthogonalement de façon biunivoque sur le plan du bord, est G. R.*

6. Surfaces a K nulle. — Interprétons maintenant les relations (7), qui peuvent s'écrire

(7 *bis*)
$$\frac{B^*_{11}}{B_{11}} = \frac{B^*_{12}}{B_{12}} = \frac{B^*_{22}}{B_{22}} = \lambda,$$

Elles sont satisfaites par les surfaces isométriques à courbure de Gauss

nulle, lorsqu'elles sont limitées par des courbes pour lesquelles s'annule l'intégrale de bord de l'équation de Herglotz. En effet :

Supposons deux surfaces, dont les bords satisfont à l'une des propriétés qui on fait l'objet des théorèmes IV, V, VI et sur lesquelles il existe un domaine à courbure de Gauss nulle (le reste étant à K positif), telles que :

1° il existe au moins un point qu'aucun plan tangent à F ne traverse, point que nous prendrons pour origine, de façon que le signe de $(r\xi)$ soit toujours négatif; de même pour F*;

2° les coefficients $B_{11}B_{22}$, B^*_{11}, B^*_{22}, soient toujours positifs, de sorte que les points figuratifs P et P* (*voir* § 2) se trouvent sur la même nappe de Q (cône ou hyperboloïde à deux nappes). Les conditions de bord imposent

$$\iint_F f[(\xi r) + (\xi^* r^*)]\, do = 0,$$

(ξr) et $(\xi^* r^*)$ étant constamment négatifs, nous devons conclure

$$f = 0$$

et par suite aux relations (7) ou (7 *bis*) (*voir* le paragraphe 2, *c* de ce chapitre), où $\lambda > 0$.

Nous pouvons choisir les paramètres pour que $\dot{u}^i = \dot{u}^j = 1$ de sorte que B_{11}, B_{12} représentent les courbures normales dans les directions $u^i = \text{Cte}$.

Autrement dit : les courbures normales dans les directions qui se correspondent dans l'isométrie sont, pour le domaine à courbure de Gauss nulle, proportionnelles; en particulier les directions à courbure nulle (directions des génératrices pour une développable), se correspondent. D'où la conclusion :

Dans sa déformation, la surface définie précédemment conserve les droites contenues dans le domaine à courbure de Gauss nulle.

Remarquons que si la méthode ne permet pas d'obtenir des résultats plus complets relativement aux surfaces à $K = 0$, la R. G. est évidente dans certains cas : par exemple celui d'un cône ou d'un cylindre assujetti à rester tangent à une sphère,

7. Méthode de variation de l'origine. — Après ces quelques résultats qui découlent directement de l'équation de Herglotz mise sous la forme (I_7) ou (I_8), nous en obtiendrons un autre en abordant le problème sous un jour différent [15].

Considérons l'intégrale de bord de (I_4) :

$$\oint r(\xi \wedge d\xi - \overline{\xi^* \wedge d\xi^*}).$$

On peut se poser la question suivante : soit l'intégrale de bord

$$\oint (\mathrm{OM}\, d\mathrm{U}),$$

OM étant le rayon vecteur du point M décrivant une courbe C, close, et U un vecteur aux composantes continûment différentiables par rapport à l'abscisse curviligne du point M. *Peut-on déterminer,* U *étant une fonction donnée, le lieu du point* O *pour lequel l'intégrale ci-dessus est nulle ?*

Procédons comme pour la recherche du barycentre, en posant

$$\oint (\mathrm{OM}\, d\mathrm{U}) = \oint (\mathrm{OO'}\, d\mathrm{U}) + \oint (\mathrm{O'M}\, d\mathrm{U}),$$

O′ étant un point arbitraire, mais fixe.

On voit que

$$\oint (\mathrm{OM}\, d\mathrm{U}) = 0$$

si

$$\mathrm{O'O} \oint d\mathrm{U} = \oint \mathrm{O'M}\, d\mathrm{U}. \tag{8}$$

Ici nous avons :

$$d\mathrm{U} = (\xi \wedge d\xi) - (\overline{\xi^* \wedge d\xi^*}).$$

Choisissons pour surface une calotte convexe, assujettie à rester tangente le long de son bord à un cylindre de révolution (le bord n'est pas supposé plan). L'image sphérique du bord est le grand cercle de la sphère unité, perpendiculaire à l'axe du cylindre. Fixons O′ à l'intersection de la surface avec cet axe. $(\xi \wedge d\xi)$ est un vecteur parallèle à l'axe; soit i le vecteur unitaire dans cette direction, dirigé du côté opposé à la surface.

Pour plus de clarté dans la démonstration, sans compromettre les résultats, puisque nous supposons l'intégrale de bord nulle au départ, nous ferons décrire le bord par M, dans un sens tel que $(\xi \wedge d\xi)$ soit positif.

Le vecteur $(\overline{\xi^* \wedge d\xi^*})$ a, au moins en quelques points, une direction différente de celle de i (sinon, $d\xi$ et $d\xi^*$ font respectivement des angles égaux avec les tangentes à C et C*, les courbes bords sont donc congruentes, et d'après le théorème IV les calottes seraient égales).

On a

$$\oint |\xi \wedge d\xi| = \oint |d\xi| = \oint |d\xi^*| = 2\pi$$

et, par suite

$$\left| \oint \xi \wedge d\xi \right| > \left| \overline{\oint \xi^* \wedge d\xi^*} \right|,$$

il en résulte que le vecteur :

$$\oint \left[(\xi \wedge d\xi) - (\overline{\xi^* \wedge d\xi^*}) \right]$$

fait un angle aigu avec i.

D'autre part, le plan déterminé par i et O'M est constamment perpendiculaire au plan tangent à F en M, d'où l'on déduit aisément :

$$O'M(\xi \wedge d\xi) > O'M(\overline{\xi^* \wedge d\xi^*})$$

pour tout point M, d'où

$$\oint O'M(\xi \wedge d\xi) > \oint O'M(\overline{\xi^* \wedge d\xi^*}).$$

D'après (8), le lieu de O est le plan perpendiculaire au vecteur

$$\oint dU$$

mené sur ce vecteur à la distance algébrique

$$\oint O'M\, dU.$$

Ici, nous avons vu que dU fait avec i un angle aigu, et que

$$\oint O'M\, dU > 0.$$

Le plan cherché coupe la surface, ou le cylindre circonscrit la prolongeant. On peut choisir O quelconque à l'intérieur de la courbe d'intersection du plan et de la surface (ou de son prolongement), Pour que la démonstration soit complète, on procède de même pour F*, le cylindre circonscrit n'ayant pas forcément le même rayon que pour F. On peut énoncer le théorème :

Théorème VIII. — *Une surface convexe* C^3, *à courbure de Gauss positive, tangente tout le long de son bord à un cylindre de révolution, est G. R.*

CHAPITRE II.

Dans ce chapitre, nous traiterons de la rigidité infinitésimale (R. I.) de certaines surfaces à bords. Nous exposerons d'abord rapidement la méthode de W. Blaschke [7] laquelle, de même que celle de Herglotz, ramène la démonstration de la R. I. d'une surface C^3, au fait que, sur son bord (supposé C^2), une certaine intégrale curviligne s'annule. Les surfaces qui ont fait l'objet des théorèmes IV à VIII, sont aussi I. R. comme l'ont prouvé ED. Rembs [16] et K. P. Grotemeyer [17].

1. Définition de la rigidité infinitésimale. — On considère une famille continue de surfaces $S_t (t > 0)$, et l'on désigne par S celle qui correspond à $t = 0$. Supposons que, quelle que soit la valeur du paramètre t, S et S_t soient homéomorphes. Soit M un point de S, ayant pour image M_t sur S_t.

Représentons S par

$$r(u, v)$$

[r continûment différentiable jusqu'au troisième ordre et $(r_u r_v) \neq 0$].

Soit $r^*(u, v, t)$ le rayon vecteur de M_t :

$$r^*(u, v, 0) = r(u, v).$$

Nous définissons la fonction $z(u, v, t)$ par la relation suivante :

$$r^*(u, v, t) = r(u, v) + tz(u, v, t). \tag{9}$$

z admet des dérivées partielles :

$$z_u(u, v, t) \quad \text{et} \quad z_v(u, v, t)$$

continues pour $t = 0$. On suppose l'existence d'une limite pour $t \to 0$ de $z(u, v, t)$ et l'on pose

$$z(u, v, 0) = \lim_{t \to 0} \text{de } z(u, v, t),$$

On peut considérer $z(u, v, 0)$ comme le champ des « vitesses de déformation » de S.

Chaque courbe L de S a pour image une courbe L_t de S_t. Si, lorsque $t \to 0$, la longueur de L_t diffère de celle de L d'une quantité infiniment petite d'ordre supérieur à t, on dit qu'il y a *déformation infinitésimale*.

La déformation est dite « *triviale* » si le champ des vecteurs $z(u, v, 0)$ est un champ de vitesse d'un solide, la surface subit alors un déplacement global infiniment petit.

Si S ne peut subir que des déformations triviales, on dit qu'elle est *infinitésimalement rigide* (I. R.).

2. Formule de Blaschke. — Nous traduirons la condition de déformation infinitésimale de S en formant les éléments linéaires de F et F_t. Pour simplifier les notations nous remplaçons (9) par

$$r^* = r(u, v) + tz(u, v).$$

Nous supposons que $z(u, v)$ a des dérivées partielles des trois premiers ordres définies et continues.

L'élément linéaire de L_t a pour expression

$$ds^{*2} = ds^2 + 2t\, dr\, dz + t^2 dz^2.$$

La condition nécessaire et suffisante de déformation infinitésimale est donc

$$dr\, dz = 0. \tag{10}$$

Remarque. — La condition précédente est une condition de déformation de premier ordre. On définit de même des déformations d'ordre 2, 3, ... ou

même infini, suivant que les éléments linéaires de S et S_t diffèrent d'une quantité infiniment petite d'ordre supérieur à t^2, t^3, ... ou t^n avec n infini. Dans ce dernier cas on dit qu'il y a déformation analytique.

Revenons aux déformations du premier ordre; l'équation (10) est équivalente aux trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} r_u z_u &= 0, \\ r_u z_v + r_v z_u &= 0, \\ r_v z_v &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe un vecteur y tel que

$$\begin{aligned} z_u &= y \wedge r_u, \\ z_v &= y \wedge r_v, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$dz = y \wedge dr. \tag{11}$$

Si y est un vecteur constant, on a

$$z = a \wedge r + b,$$

où a et b sont des vecteurs fixés : la déformation dans ce cas est triviale.

Pour prouver la R. I. d'une surface il suffit donc de montrer que y est un vecteur constant.

3. Nous résumons maintenant la méthode de Blaschke, qui démontre la rigidité des surfaces closes convexes, à courbure de Gauss positive.

De (11) on tire

$$r \wedge dy = dz + d(r \wedge y)$$

et de

$$z_{uv} = z_{vu},$$

on tire

$$y_v \wedge r_u = y_u \wedge r_v, \tag{12}$$

les quatre vecteurs r_u, r_v, y_u, y_v, sont donc coplanaires et l'on peut poser

$$\begin{cases} y_u = \alpha r_u - \beta r_v, \\ y_v = \gamma r_u - \delta r_v, \end{cases} \tag{13}$$

α, β, γ, δ étant des scalaires, avec de plus, d'après (12) :

$$\delta = \alpha.$$

Si nous développons

$$y_{uv} = y_{vu}$$

en tenant compte des relations (13), il vient

$$B_{11}\gamma - 2B_{12}\alpha + B_{22}\beta = 0. \tag{14}$$

Les B_{ij} étant toujours les coefficients de la seconde forme fondamentale.

La courbure de Gauss étant positive, on a

$$B_{11}B_{22} - (B_{12})^2 > 0, \tag{15}$$

de (14) et (15) on tire

$$\beta\gamma - \alpha^2 < 0. \tag{16}$$

En effet, si l'on pose

$$\begin{aligned} B_{11} &= X; & \beta &= X', \\ B_{12} &= Y, & \alpha &= Y', \\ B_{22} &= Z, & \gamma &= Z', \end{aligned}$$

la relation (14) exprime que les points A(X, Y, Z) et A'(X', Y', Z') sont conjugués par rapport au cône du second degré

$$XZ - Y^2 = 0,$$

(15) signifie que A est intérieur au cône, il en résulte bien que A' est extérieur, c'est-à-dire (16).

Si, maintenant, (15) étant posée, on a

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 0$$

c'est que, nécessairement, A' est au sommet du cône, d'où

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

On transforme ensuite l'intégrale du « volume mixte » de Minkowski :

$$\iint (r, y_u, y_v)\, du\, dv.$$

On trouve, d'une part, qu'elle est égale à

$$\frac{1}{2}\oint (r, y, dy)$$

et d'autre part, d'après les relations (13), qu'elle peut s'écrire

$$\iint (\beta\gamma - \alpha^2)(r, r_u, r_v)\, du\, dv,$$

d'où la relation

$$\oint (r, y, dy) = 2\iint_S (\beta\gamma - \alpha^2)(r, r_u, r_v)\, du\, dv$$

$\oint (r, y, dy)$ est l'intégrale de Blaschke.

On peut choisir l'origine à l'intérieur de la surface, de façon que le produit mixte

$$(r, r_u, r_v)$$

conserve un signe constant, et les lignes coordonnées de sorte que, par exemple, cette expression soit toujours positive.

Si l'intégrale de bord du premier membre s'annule, c'est que, nécessairement

$$(\beta\gamma - \alpha^2) = 0$$

et, d'après ce que nous avons vu plus haut, ceci entraîne l'annulation des scalaires α, β, γ, δ.

Les équations (13) montrent alors que y est un vecteur fixe, la déformation infinitésimale est triviale.

Nous aurons par conséquent démontré qu'une surface est I. R., si nous prouvons que pour toute déformation infinitésimale l'intégrale de Blaschke :

$$\oint (r, y, dy)$$

est nulle.

4. R. I. DES SURFACES A BORDS R. — A. Outre les surfaces convexes closes pour lesquelles l'intégrale de Blaschke disparaît, on a prouvé que les surfaces convexes à bords tangentes le long de leurs bords à un plan, à un cône ou à un cylindre sont I, R. (si elles sont C^3 et à $K > 0$) ([16] et [17]).

Nous allons prouver la R. I. d'une surface de classe R définie comme suit :

a. la surface est C^3 et son bord est C^2;

b. la courbure de Gauss est positive sauf en des poins isolés, où elle peut être nulle;

c. la surface est convexe, c'est-à-dire qu'elle est un domaine connexe à la frontière d'un corps convexe;

d. l'image sphérique de la surface recouvre toute la sphère unité, une seule fois (la courbure intégrale de la surface est 4π);

e. tout le long de son bord elle est tangente à une surface cylindrique; l'image sphérique du bord est un arc de grand cercle de la sphère unité (parcouru deux fois); chaque génératrice du cylindre rencontre le bord de la surface en deux points, distincts ou confondus.

B. Montrons d'abord l'existence de surfaces R, en construisant une de ces surfaces, à partir d'élements géométriques simples, qui peuvent aisément se remplacer par d'autres moins particuliers.

Donnons-nous dans un plan P deux droites parallèles G et G′, et un demi-cylindre de révolution, ayant son axe dans P, et limité aux deux génératrices G et G′. Sur ce demi-cylindre traçons une courbe B, qui soit C^2, tangente en A et A′ à G et G′ respectivement, et convexe. B se projette sur P suivant une courbe B′, jouissant des mêmes propriétés.

Soit M un point de B qui se projette orthogonalement en M′ sur B′. Nous construisons tous les quarts de cercle ayant pour centres les points M′, de rayons M′M, situés dans des plans parallèles à G et perpendiculaires à P.

On limite ces quadrants par les rayons M'M d'une part, et M'M'' d'autre part (M'' étant dans P opposé à AA' par rapport à M'). Le point M'' décrit dans P une courbe convexe B'' qui est aussi C^3 et tangente en A et A' à G et G'. La surface engendrée par ces quarts de cercle constitue une partie de la surface R, celle qui contient le bord B, tangente le long de B au demi-cylindre. Il reste à compléter cette partie par une surface convexe C^3 située de l'autre côté de B par rapport à P, admettant le long de B'' des plans tangents perpendiculaires à P, et se raccordant avec l'autre partie de façon à former une surface C^3 partout. Ce qui est possible d'une infinité de manières.

C. Nous supposons que R a sur son bord une courbure de Gauss partout positive, sauf aux points où les génératrices lui sont tangentes : en effet, ces points A et A' ont pour images sphériques les extrémités de l'arc-image du bord ; le plan tangent à R est donc stationnaire en ces points (plan osculateur à B) : la direction de la génératrice tangente est donc asymptotique double et la courbure de Gauss est nulle en A et A'.

Développons sur un plan la surface cylindrique tangente à R, comprise entre les deux génératrices limites G et G'. On obtient ainsi une courbe plane, qui est une figure invariable dans la déformation, puisque sa longueur est invariable de même que sa courbure en chaque point (courbure géodésique de la surface).

D'autre part, les points A et A' demeurent les seuls points où $K = 0$, puisque K est conservée. Les génératrices G et G' sont donc également conservées, de même que toutes les génératrices coupant B. Celles-ci occupent des positions invariables par rapport à la courbe plane, donc aussi par rapport à B elle-même.

Sans diminuer la généralité, on peut supposer fixe la direction des génératrices, et soit u le vecteur unitaire porté par ces droites. On pose

$$r^* = r + tz,$$

ξ, le vecteur unitaire de la normale à la surface, devient après la déformation

$$\xi + t\omega.$$

En exprimant que ce vecteur est normal à

$$dr^* = dr + t\,dz$$

et en utilisant la relation (11) :

$$dz = y \wedge dr$$

on trouve aisément

$$\omega = y \wedge \xi.$$

Exprimons en outre que le nouveau vecteur normal est perpendiculaire à u, il vient

$$(y, \xi, u) = 0. \tag{17}$$

D'autre part, puisqu'il ne peut y avoir de déplacement des points de B le long

des génératrices tangentes, écrivons que leur déplacement est perpendiculaire à u :

$$(z, u) = 0,$$

d'où en différentiant

$$(dz, u) = 0$$

et en tenant compte de (11) :

$$(18) \qquad (y, dr, u) = 0.$$

De (17) et de (18) résulte que y doit se trouver à la fois :

— dans le plan déterminé par u et dr;

— dans le plan déterminé par u et ξ;

or, u et ξ sont toujours distincts, puisque u appartient au plan tangent; u et dr sont distincts excepté en A et en A'. Sauf en ces derniers points où y est indéterminé dans le plan $(u\xi)$, y est nécessairement parallèle à u, et l'on a

$$y = \mu u,$$

où μ est un scalaire, et

$$dy = d\mu u,$$

y et dy sont donc partout, sauf en deux points isolés, deux vecteurs colinéaires. Par conséquent l'intégrale de Blaschke est nulle :

$$\oint (r, y, dy) = 0,$$

on peut énoncer le théorème :

THÉORÈME IX. — *Une surface* R *est I. R.*

Dans le chapitre VI, nous montrerons que les surfaces R font partie d'une classe plus large de surfaces convexes à bords, qui sont toutes G. R.

CHAPITRE III.

Au cours de la discussion du signe de la forme f (chap. I, § 2) nous avons constaté que la méthode de Herglotz ne peut s'appliquer aux surfaces à courbure de Gauss négative. D'autre part, même pour les surfaces à courbure de Gauss positive, nous n'avons obtenu que des résultats partiels; par exemple, le théorème VI n'affirme la R. G. d'une surface C^3 à $K > 0$, tangente à une sphère le long de son bord, que si le centre de la sphère n'est traversé par aucun plan tangent à la surface (à la rigueur il peut se trouver sur la surface elle-même). Cependant d'après le théorème V la R. G. existe si la sphère a un rayon infiniment grand (bord plan parabolique) donc un centre non intérieur à la surface considérée. Il est à prévoir que la R. G. existe quelle que soit la position du centre de la sphère tangente.

Si la méthode de Herglotz est à elle seule impuissante à nous conduire à ce résultat, elle ne nous interdit pas non plus de l'imaginer, sa faiblesse provenant justement de ce que, contrairement à la méthode de Blaschke pour la R. I., on ne peut pas conclure à la non-rigidité dans les cas où l'on ne conclut pas à la R. G.

Nous démontrerons dans tous les cas la R. G. d'une surface tangente le long de son bord à une sphère si elle est convexe et C^2 (dans le voisinage du bord).

Nous utiliserons pour cela le théorème de Pogorelov :

Toute surface convexe est G. R.

1. R. G. d'une surface convexe tangente a une sphère le long de son bord. — Soient deux surfaces convexes, isométriques, F et F*, à bords connexes C^2, B et B*, tangentes tout le long de ces bords respectivement à deux sphères σ et σ^*, de rayons ρ et ρ^*. B et B* sont donc homothétiques de leurs images sphériques respectives b et b^*, dans les rapports $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho^*}$. Soient L et L* les longueurs de B et B*; l et l^* celles de b et b^*: R et R* les rayons de courbure géodésique de B et B*; r et r^* ceux de b et b^*.

On a

$$= \mathrm{L}\,\frac{1}{\rho},$$

$$l^* = \mathrm{L}^*\,\frac{1}{\rho^*},$$

$$r = \mathrm{R}\,\frac{1}{\rho},$$

$$r^* = \mathrm{R}^*\,\frac{1}{\rho^*}.$$

Or

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}^*, \qquad \mathrm{R} = \mathrm{R}^*$$

D'où

$$\frac{l}{l^*} = \frac{\rho^*}{\rho}, \qquad \frac{r}{r^*} = \frac{\rho^*}{\rho}.$$

De ces deux dernières égalités, il résulterait, si

$$\rho \neq \rho^*$$

que les deux courbes b et b' sur la sphère unité sont semblables, ce qui est impossible. Il faut donc poser

$$\rho = \rho^*.$$

Les courbes b et b^* sont égales, il en est évidemment de même de B et B*, portées par des sphères égales.

2. Il reste à prouver la R. G. dans le cas où les sphères tangentes sont égales.

Considérons les surfaces S et S^* obtenues en collant à F et F^*, respectivement, les domaines sphériques intérieurs à B et B^*, qui prolongent F et F^*.

Ce sont des surfaces closes convexes, C^1 le long de B et B^*. D'après le théorème de Pogorelov, les surfaces closes convexes isométriques S et S^* sont égales (ou symétriques), il en est évidemment de même de F et F^*. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème X. — *Une surface convexe,* C^2, *tangente tout le long de son bord à une sphère est G. R.*

CHAPITRE IV.

Ce chapitre est tout entier consacré aux surfaces à bords, convexes, de courbure intégrale 4π.

Nous prouverons d'abord l'existence de telles surfaces, que nous appellerons surfaces Σ.

Nous montrerons ensuite, si ces surfaces sont ou moins C^2, que leur image sphérique recouvre toute la sphère unité, une fois et une fois seulement.

Nous en déduirons une propriété caractéristique de leurs bords qui permet de montrer que les surfaces Σ sont G. R. Comme autre conséquence importante, nous retrouverons un théorème de A. D. Alexandrov [18] sur les surfaces T définies de la façon suivante :

Ce sont des surfaces homéomorphes au tore, constituées de deux domaines à courbures de Gauss opposées, séparés par deux lignes connexes différentiables par morceaux (avec un nombre fini de discontinuités) sur lesquelles la courbure de Gauss est nulle.

Alexandrov a prouvé, que si la partie convexe ($K > 0$), a une courbure intégrale égale à 4π, c'est que les deux lignes sont planes, et situées dans des plans tangents à T.

Nous donnerons de ce théorème une démonstration très simple, et nous montrerons que les surfaces T constituent un cas limite d'une classe plus générale de surfaces.

Indiquons que A. D. Alexandrov a démontré, dans le même Ouvrage cité, que toute surface T analytique est G. R.

H. Liebmann [19] avait prouvé en 1901 la R. I du tore qui est une surface T. Ces deux résultats, quoique de portée restreinte, méritent d'être signalés, car ce sont à peu près les seuls qui aient été obtenus sur la rigidité de surfaces à courbure de Gauss non positive.

1. Existence des surfaces Σ. — Nous montrons d'abord que des surfaces Σ existent. Nous en avons déjà rencontré : les surfaces à bord plan-parabolique du chapitre I, les surfaces R définies au chapitre II en font partie.

Par la suite (§ 7) nous considérerons des surfaces homéomorphes au tore, que nous appellerons surfaces U, dont un morceau connexe répond à la définition des surfaces Σ. Il nous suffira donc de montrer l'existence des surfaces U et de définir sur elles le domaine qui constitue une surface Σ, pour prouver l'existence de celles-ci.

Nous donnerons une construction à partir de figures élémentaires, mais on peut sans peine trouver d'autres surfaces moins particulières.

Soit une courbe plane convexe, un cercle L par exemple, et son axe Z; de part et d'autre du plan du cercle donnons-nous deux surfaces cylindriques D et D′, symétriques, à projection biunivoque sur le plan du cercle, convexes et tournant leur concavité vers le plan. Le cercle est entièrement intérieur au corps convexe limité par les développables D et D′. Chaque plan passant par Z coupe L en deux points C et C′, et D et D′ soit suivant des arcs de courbes convexes, soit suivant des droites. Dans chacun de ces plans il existe deux cercles γ et γ' de centres respectifs C et C′, tangents intérieurement à D et D′ tous les deux. On montre qu'on peut choisir d'une infinité de façons la position de D et D′ et le rayon de L, pour que, d'une part, γ et γ' ne se coupent jamais, et que, d'autre part, la surface Γ engendrée par les arcs de γ limités à leurs points de contact avec les développables, les plus éloignés de Z, soit convexe et au moins de classe C^1.

Les cercles γ en entier engendrent une surface homéomorphe à un tore, U, qui touche les développables suivant deux courbes connexes fermées B et B′.

Considérons la surface close formée en collant à Γ le long de ses bords B et B′ les domaines de D et D′ intérieurs à B et B′ : c'est une surface convexe, $\overline{U}$ (U est situé à l'intérieur du corps convexe limité par cette surface). Sa courbure intégrale est donc 4π; or, celle des parties de D et D′ est nulle, il faut en conclure que la partie de U située sur cette surface close a une courbure intégrale égale à 4π, l'image sphérique recouvrant toute la sphère unité une fois et une fois seulement; c'est donc bien une surface Σ définie plus haut.

2. Quelques définitions. — Dans la suite de ce chapitre nous utiliserons différentes notions que nous allons définir :

A. On appelle *plan d'appui* d'une surface, tout plan ayant au moins un point commun avec la surface, celle-ci étant entièrement située d'un même côté du plan.

W. Blaschke [20] a montré que :

Par tout point d'une surface convexe passe au moins un plan d'appui.

Si une surface convexe est C^1, par chacun de ses points passe un plan d'appui et un seul : le plan tangent.

B. On appelle *enveloppe convexe* d'un corps C, un corps E qui, parmi tous les

corps convexes contenant C, est le plus petit, c'est-à-dire est contenu dans tous les autres. L'enveloppe convexe d'un corps convexe est ce corps lui-même.

Tout plan d'appui d'un corps est plan d'appui de son enveloppe convexe.

3. Lemmes I et II, Théorème XI. — Nous démontrerons maintenant que si une surface à bords est convexe, et possède une courbure intégrale égale à 4π, son image sphérique recouvre la sphère unité une fois, en son entier. Supposons qu'il existe une telle surface dont l'image sphérique ne recouvre pas toute la sphère unité : il y aura donc une partie ω' de la sphère recouverte deux fois et une partie ω'' non recouverte.

Lemme I. — *Si, sur une surface convexe* C^1 *il existe deux ou plusieurs points admettant le même point image, ou bien ces points sont confondus, ou bien les plans tangents en ces points sont confondus.*

Nous éliminerons tout de suite la première conclusion, évidente; et nous supposerons que les deux points M et M′ distincts, admettent deux plans tangents distincts P et P′, et la même image m. En un point d'une surface et en son point image, les plans tangents sont parallèles : il en résulte que P et P′ sont parallèles. L'un d'eux recoupe alors la surface, soit P. Or d'après le paragraphe 2(A), tout plan tangent à une surface convexe est plan d'appui, et ne peut par conséquent couper la surface : P est nécessairement confondu avec P′ (M et M′ ne sont pas nécessairement confondus),

Lemme II. — *Si deux domaines connexes d'une même surface* C^1 *convexe sont distincts, et ont pour image le même domaine de la sphère unité, l'aire de ce domaine est nulle.*

D'après un théorème de Hadamard [21], il y a correspondance biunivoque entre une surface close convexe et sa représentation sphérique; un voisinage entourant m, suffisamment petit mais d'aire non nulle, serait l'image de deux voisinages distincts, d'aire non nulle, entourant M et M′. D'après le lemme I les plans tangents aux points de même image seraient confondus. Or, il est impossible que deux surfaces distinctes convexes aient en commun tous leurs plans tangents sans qu'elles soient confondues. Les domaines d'images sphériques confondues ne peuvent être que des lignes ou des points dont l'image est, par conséquent, réduite elle aussi à une ligne ou un point : ω' a une aire nulle, ainsi que ω''; on peut donc énoncer le théorème :

Théorème XI. — *Si une surface à bords est convexe et* C^2, *et de courbure intégrale égale à* 4π (*surface* Σ), *son image sphérique recouvre toute la sphère unité, une seule fois.*

L'image sphérique b du bord B, ne peut être une courbe enfermant une aire

non nulle, toujours à cause de l'application biunivoque sur la sphère unité : c'est un arc de courbe, parcouru un nombre pair de fois, qui peut même se réduire à un point (cas du bord plan-parabolique).

Puisque les plans tangents aux points de même image sont confondus, la développable de bord D est tangente à Σ en un ou plusieurs points du bord B, lequel est une courbe fermée décrite sur cette développable. Le domaine enfermé sur D par B est une surface convexe (mais pas nécessairement un domaine convexe, c'est-à-dire limité par une courbe close convexe, si on l'applique sur un plan); collé à Σ le long de B, il détermine avec Σ une surface close convexe et le corps limité par cette surface est l'enveloppe convexe de Σ.

Remarque. — Les génératrices de D rencontrent B un nombre pair de fois, ou lui sont tangentes. Dans l'hypothèse où la courbure de Gauss est définie en tout point de Σ qui est alors C^2, aux points ou une génératrice est tangente à B, comme nous l'avons déjà remarqué à propos des surfaces R (chap. II, § 4, C), la courbure de Gauss est nécessairement nulle puisque le plan tangent est osculateur à B.

Remarquons aussi que, si nous supposons que Σ possède une courbure de Gauss positive sur un ensemble dense, les génératrices de D ne peuvent rencontrer B en plus de deux points : en effet, si l'une de ces droites G coupait B en quatre points P, Q, R, S, le segment QR serait soit extérieur à Σ, ce qui contredit l'hypothèse de convexité, soit sur Σ qui renfermerait alors des ensembles denses de points à courbure nulle. Cette éventualité n'est cependant pas exclue dans le théorème de rigidité qui va suivre.

4. Rigidité des surfaces Σ. — Ici nous supposerons les surfaces Σ bordées par des courbes C^2.

Soient deux surfaces Σ et Σ^* isométriques; nous supposerons pour simplifier, qu'elles possèdent chacune un seul bord, B et B^* respectivement (la démonstration est rigoureusement la même si elles en ont plusieurs). Soient D et D^* les portions de développables tangentes à Σ et Σ^* le long de B et B^*. Si nous appliquons ces domaines sur un plan nous obtenons deux courbes planes B_1 et B_1^* possédant en chaque point même courbure géodésique, et de même longueur : ces deux courbes planes sont donc égales (ou symétriques). Si nous collons les domaines intérieurs à B et B^* respectivement à Σ et Σ^* nous obtenons des surfaces closes convexes $\overline{\Sigma}$ et $\overline{\Sigma^*}$. Si nous leur appliquons le théorème de Pogorelov sur la R. G. des surfaces closes convexes quelconques, $\overline{\Sigma}$ et $\overline{\Sigma}^*$, isométriques d'après leur construction, sont égales ou symétriques; il en est évidemment de même de Σ et Σ^*. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème XII. — *Une surface Σ à bord C^2 est G. R.*

Nous venons de démontrer que ces surfaces sont G. R. à l'intérieur de la

classe des surfaces Σ. La remarque suivante nous permettra d'énoncer un théorème de rigidité avec un peu moins de conditions.

Si nous appliquons la formule de Gauss-Bonnet à une surface Σ :

$$\oint \frac{ds}{R_g} = 2\pi - \iint d\omega,$$

ds étant l'élément linéaire du bord;
R_g le rayon de courbure géodésique;
$\iint d\omega$ l'aire de l'image sphérique de toute la surface;
on trouve

$$\oint \frac{ds}{R_g} = -2\pi.$$

Considérons une surface Σ, et déformons-là (le bord est toujours C^2) : ds et R_g étant des invariants de déformation isométrique, l'intégrale de bord est toujours égale à 2π, d'où l'on déduit pour la surface déformée

$$\iint d\omega = 4\pi.$$

Il n'est donc pas nécessaire d'imposer à l'isométrique de Σ d'être aussi une surface Σ. Pour plus de précision, on doit énoncer le théorème de rigidité sous la forme suivante :

Théorème XIII. — *Une surface* Σ *de bord* C^2, *est l'égale* (*ou la symétrique*) *de toute surface isométrique, pourvu que cette dernière soit convexe.*

En particulier, le théorème de Rembs (théorème V), sur la R. G. des surfaces à bords plans paraboliques, est contenu dans le théorème précédent, avec des conditions beaucoup plus larges.

5. Théorème d'A. D. Alexandrov. — Considérons maintenant une surface homéomorphe au tore, dont une partie à courbure de Gauss positive une courbure intégrale égale à 4π et est séparée du reste de la surface (à courbure de Gauss négative) par deux courbes fermées connexes, C^2 par morceaux (avec un nombre fini de discontinuités), sur lesquelles la courbure de Gauss est nulle.

Nous appellerons T une telle surface et nous désignerons respectivement par T^+ et T^- suivant le signe de la courbure, ses deux parties séparées par les deux courbes B et B'.

Montrons d'abord que T^+ est une surface Σ, c'est-à-dire :

1° que son image sphérique recouvre toute la sphère unité. En effet, soit ω^+ la courbure intégrale de T^+, et ω^- celle de T^-; on a

$$\omega^+ + \omega^- = 2\pi\chi,$$

où χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré, qui vaut ici zéro. Or, une surface close, partout C^2, doit admettre un plan d'appui, au moins, perpendiculaire à toute direction donnée arbitrairement. Par suite, ω^+ doit recouvrir au moins une fois la sphère unité; si ω^+ égale 4π, elle la recouvre une fois et une seule (cas du tore);

2° qu'elle est convexe. Pour cela nous montrerons que chacun de ses plans tangents est un plan d'appui pour T^+ et pour la surface T tout entière.

Supposons qu'un plan tangent P en un point M de T^+, recoupe T, découpant ainsi deux surfaces finies à bords plans; soit E l'une de ces surfaces, nous savons que :

a. tous les points de E ne peuvent avoir une courbure négative;

b. il existe au moins un point M′ de E où le plan tangent est parallèle à P et la courbure en ce point est soit positive, soit nulle.

Dans le cas où elle est positive, il existerait alors deux points de T^+ distincts ayant même image sphérique, et ceci se produirait pour tous les points d'un petit voisinage de M, ce qui est impossible d'après le 1°.

Dans le cas où elle est nulle, il existe encore un petit voisinage φ de M pour tout point duquel le plan tangent n'est pas plan d'appui. Les points tels que M′, occupent un petit voisinage de M′ : φ'. Or parmi tous les points de φ' il en existe certainement où la courbure est positive, puisque les points à courbure nulle sont sur un petit arc de B (ou de B′) intérieur à φ' : nous sommes donc ramenés au cas précédent.

On démontre de même que P ne peut toucher T en un autre point que M.

Nous pouvons conclure que T^+ (*muni des deux bords* B *et* B′) *est une surface* Σ, *et en outre que l'enveloppe convexe de* T^+ *est l'enveloppe convexe de* T *tout entière*.

6. Nous allons maintenant prouver que B et B′ sont des courbes planes.

Considérons T^+ muni de ses deux bords B et B′; soit D et D′ les développables tangentes à T^+ le long de B et B′. En chaque point de B (le même raisonnement étant valable pour B′) la tangente à B et la génératrice G de B sont deux directions conjuguées sur T. Or, la courbure de Gauss est nulle sur B, donc l'une de ces directions est direction asymptotique double : ce ne peut être G car aucune des courbes de T qui lui sont tangentes ne traverse le plan tangent, puisque ce dernier est plan d'appui de T; ce ne peut être que la direction de la tangente à B, or B appartient aussi à D, et, si en tout point de B, la direction tangente est parabolique, distincte des génératrices de D, c'est que D est plane (1).

(1) On peut aussi raisonner de la façon suivante : on sait que si deux surfaces sont tangentes tout le long d'une ligne B, les indicatrices de Dupin aux différents points de B sont bitangentes. Les paraboles de Dupin de D et T ont en général des axes distincts, il faut donc que cet axe soit indéterminé sur D, c'est-à-dire que D soit plane.

On peut donc énoncer le théorème suivant qui complète légèrement le théorème d'Alexandrov en présentant la valeur 4π comme un minimum :

Théorème XIV. — *Dans une surface homéomorphe à un tore, constituée de deux parties connexes, à courbures de Gauss opposées, séparées par deux lignes fermées distinctes, différentiables par morceaux, la partie ayant une courbure positive a une courbure intégrale au moins égale à 4π, et dans ce cas les deux lignes frontières sont planes, situées dans des plans tangents à la surface.*

A. D. Alexandrov, dans l'article cité [18] a donné une construction d'une surface T quelconque.

7. Remarque sur la courbure intégrale d'une surface U. — Les surfaces T se présentent donc comme un cas limite des surfaces U définies au paragraphe 1 de ce chapitre. Supposons la courbure de Gauss définie partout sur U et désignons par U^+ et U^- les parties de U de courbure respectivement positive et négative, et par w^+ et w^- leurs courbures intégrales. Nous avons toujours

$$w^- + w^+ = 0,$$
$$w^+ \geq 4\pi.$$

Quand w^+ est supérieur à 4π, les courbes bords de la surface Σ portée par U, ne sont plus les lignes frontières entre U^+ et U^-; U^+, bien qu'ayant partout une courbure positive n'est pas convexe car ses plans tangents ne sont pas tous plans d'appui.

Remarque. — On peut se demander dans ce dernier cas quelle est l'aire maximum de la sphère unité recouverte par l'image sphérique de la surface U^+ moins Σ. L'exemple suivant montre que cette image sphérique peut recouvrir encore une fois la sphère unité :

Soit un cercle de diamètre AB, considérons toutes les cordes CD perpendiculaires à AB et coupées par AB en M; décrivons les cercles de diamètres CM et MD, situés dans des plans perpendiculaires à AB. Ces cercles engendrent une surface à courbure de Gauss partout positive, sauf sur AB où elle est nulle. Fendons cette surface le long de AB en maintenant toutefois les deux moitiés aux points A et B. Nous avons une surface évidemment non différentiable en A et B, de courbure intégrale égale à 8π. Nous pouvons, en coupant cette surface aussi près qu'on veut de A et de B de part et d'autre de AB, et en raccordant les deux parties ainsi détachées par des surfaces C^1 où les domaines de courbures opposées soient connexes, obtenir une surface U. Sur celle-ci

$$w^+ = 8\pi - \varepsilon,$$

ε étant aussi petit qu'on veut.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] EISENHART, *Riemannian Geometrie*, Princeton University Press, 1949.
[2] CAUCHY, *Sur les polygones et les polyèdres* (second Mémoire).
[3] H. WEYL, *Sur la rigidité des surfaces et polyèdres convexes* (*Sitzungberichte der Phys. Math.*, 1917, p. 250).
[4] HERGLOTZ, *Sur la rigidité des surfaces convexes closes* (*Abhang. Math. Sem. Hans.*, t. 15, 1943, p. 127-129).
[5] POGORELOV, *Rigidité globale des surfaces convexes quelconques* (*Publications de l'Académie des Sciences d'Ukraine*, Kiev, 1952).
[6] G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, Gauthier-Villars, 2e éd., 1915.
[7] W. BLASCHKE, *Rigidité des surfaces closes convexes* (*Math. Z.*, 1921, p. 141).
[8] A. D. ALEXANDROV, *Géométrie intrinsèque des surfaces convexes*, Akademie Verlag, Berlin, 1955.
[9] J. HADAMARD, *Sur les surfaces à courbure positive* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 31, 1903, p. 300-301).
[10] Ed. REMBS, *Sitz. Preuss Ak. Phys. Math.*, 1931, p. 125.
[11] K. P. GROTEMEYER, *Math. Z.*, Bd 55, 1952, p. 253-268.
[12] K. P. GROTEMEYER, *Math. Z.*, Bd 58, 1953, p. 41-45.
[13] Ed. REMBS, *Math. Z.*, Bd 56, 1952, p. 271.
[14] S. GOHIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1859.
[15] S. GOHIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 241, 1954, p. 154.
[16] Ed. REMBS, *Bayerische Ak. der Wissenschaften*, 1954, p. 315.
[17] GROTEMEYER, *Math. Z.*, Bd 59, 1953, p. 278.
[18] ALEXANDROV, *Sur une classe de surfaces fermées* [*Math. Sbornik*, t. 4 (46), n° 1, 1938, p. 69].
[19] H. LIEBMANN, *Gottingen nacht.*, 1901, p. 39-53.
[20] W. BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, Leipzig, Verlag von Veit & Comp., 1916.
[21] J. HADAMARD, *Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique* [*J. Math. pures et appl.*, (5), t. 3, 1897].

PROBLÈME GÉNÉRALISÉ DE HILBERT

POUR LES ARCS NON FERMÉS

PAR M. W. POGORZELSKI.

1. INTRODUCTION ET LES FORMULES PRINCIPALES. — Soit, dans le plan de la variable complexe, un ensemble de p arcs dirigés $\widehat{a_1b_1}$, $\widehat{a_2b_2}$, ..., $\widehat{a_pb_p}$ non fermés et sans points communs. Le problème de Hilbert pour les arcs non fermés, proposé et résolu par M. N. Mouskhelichvili [1], consiste en la détermination d'une fonction $\Phi(z)$ holomorphe dans le plan de la variable complexe ayant les coupures $\widehat{a_1b_1}$, $\widehat{a_2b_2}$, ..., $\widehat{a_pb_p}$, dont les valeurs limites

$$\Phi^+(t), \quad \Phi^-(t)$$

des deux côtés (1) de chaque coupure vérifiaient la relation linéaire donnée

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \tag{1}$$

en tout point t de l'ensemble

$$L = \sum_{\nu=1}^{p} \widehat{a_\nu b_\nu}$$

non coïncidant avec les extrémités a_ν et b_ν ($a_\nu \neq b_\nu$).

Les fonctions complexes $G(t)$ et $g(t)$ sont définies sur l'ensemble fermé L et vérifient une condition de Hölder. On admet que la fonction $G(t)$ est partout *différente de zéro* et que les arcs $\widehat{a_\nu b_\nu}$ admettent des tangentes continues. En outre, on demande que la fonction holomorphe cherchée $\Phi(z)$ ait en toute

(1) On admet que les deux côtés, positif et négatif, de toute coupure sont en telle relation avec la direction positive de la coupure comme les demi-plans $\operatorname{Im}(z) > 0$ et $\operatorname{Im}(z) < 0$ avec la direction positive de l'axe réel.

extrémité $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$ (a_ν ou b_ν) des arcs L une limitation de la forme

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{Cte}}{|z - c_j|^\theta} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p), \tag{2}$$

θ étant une constante réelle positive, non fixée, inférieure à l'unité; on pose

$$c_{2\nu} = b_\nu, \qquad c_{2\nu-1} = a_\nu, \qquad \text{où} \quad \nu = 1, 2, \ldots, p.$$

D'après N. Mouskhelichvili, les extrémités c_ν sont dites *singulières*, si les valeurs correspondantes de la fonction $G(c_\nu)$ sont réelles et positives.

La solution $\Phi(z)$ du problème de Hilbert est dite de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$, si cette solution est bornée aux voisinages des extrémités non singulières distinguées $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q}$ $(q \leq 2p)$.

Soit la fonction

$$X(z) = \prod_{j=1}^{j=2p} (z - c_j)^{\lambda_j} e^{\Gamma(z)}, \tag{3}$$

où la fonction $\Gamma(z)$ est donnée par l'intégrale du type de Cauchy

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log G(t)\, dt}{t - z}, \tag{4}$$

les branches continues du logarithme étant fixées arbitrairement sur tout arc $\widehat{a_j b_j}$.

On choisit les constantes entières λ_ν de façon que les conditions

$$-1 < \alpha_j + \lambda_j < 1 \tag{5}$$

soient vérifiées, les constantes α_j étant définies par les égalités

$$\alpha_j + i\beta_j = \mp \frac{1}{2\pi i} \log G(c_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p), \tag{6}$$

le signe supérieur concerne l'origine $c_{2\nu-1} = a_\nu$ de l'arc et le signe inférieur, le cas $c_{2\nu} = b_\nu$. Aux extrémités non singulières distinguées $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q}$ on choisit les entiers λ_j tels que $0 < \alpha_j + \lambda_j < 1$. Aux extrémités singulières, les conditions (5) donnent les valeurs uniques $\lambda_j = -\alpha_j$. Pour les autres extrémités non singulières, on choisit les λ_j tels que $-1 < \alpha_j + \lambda_j < 0$.

D'après N. Mouskhelichvili [1], la fonction (3) est dite solution *canonique* de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ du problème homogène de Hilbert :

$$X^+(t) = G(t) X^-(t). \tag{7}$$

Cette fonction $X(z)$ est holomorphe à l'extérieur des coupures $\widehat{a_j b_j}$.

Nous signalons que les valeurs limites $X^\pm(t)$ correspondent aux deux côtés de tout arc $\widehat{a_\nu b_\nu}$ qui sont disposés par rapport à la direction de l'arc comme les demi-

plans supérieur et inférieur du plan de la variable complexe par rapport à l'axe réel.

On peut montrer que la solution canonique $X(z)$, dans un voisinage suffisamment petit de tout point c_j, s'exprime par le produit

$$X(z) = \Omega_j(z)(z - c_j)^{\alpha_j + \lambda_j + i\beta_j}. \tag{7'}$$

Les fonctions $\Omega_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$ sont holomorphes aux voisinages des points c_j coupés par les arcs $\widehat{a_\nu b_\nu}$ et elles sont bornées au voisinage de toute extrémité c_j.

On voit que la fonction $(7')$ est nulle en toute extrémité distinguée $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ et vérifie la condition (2) au voisinage des autres extrémités.

La somme réelle

$$\varkappa = -\sum_{j=1}^{2p} \lambda_j \tag{8}$$

est dite *indice* de la solution de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$.

Si l'ensemble des extrémités non singulières distinguées $(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ est *vide*, nous désignons par h_0 la classe, par $X_0(z)$ la solution canonique de cette classe. L'indice $\varkappa_0$ de cette classe est plus grand que les indices de l'autre classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$, nous avons notamment

$$\varkappa = \varkappa_0 - q. \tag{9}$$

En outre, il est facile de voir que la solution canonique $X(z)$ de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ est liée à la solution canonique $X_0(z)$ par la formule

$$X(z) = (z - c_{k_1})(z - c_{k_2}) \ldots (z - c_{k_q}) X_0(z). \tag{10}$$

En appliquant aux fonctions (3) et (4) les formules de Plemelj, on obtient, pour les valeurs limites au point $t \in L$ de la solution canonique de classe $h(c_1, \ldots, c_q)$, les formules suivantes :

$$X^+(t) = \sqrt{G(t)}\, X(t), \qquad X^-(t) = \frac{X(t)}{\sqrt{G(t)}}, \tag{11}$$

où

$$X(t) = \prod_{j=1}^{2p} (t - c_j)^{\gamma_j} e^{\Gamma(t)}, \tag{12}$$

les branches des fonctions $(t - c_j)^{\gamma_j}$ étant fixées pour tous les arcs $\widehat{a_j b_j}$ et $\Gamma(t)$ étant l'intégrale singulière de la forme (4), au sens de la valeur principale de Cauchy, au point intérieur $t \in L$. On peut montrer que la fonction (12) s'exprime de la façon suivante :

$$X(t) = \omega(t) \prod_{j=1}^{2p} (t - c_j)^{\gamma_j}, \tag{13}$$

où

$$\gamma_j = \alpha_j + i\beta_j + \lambda_j, \qquad \beta_j = \mp \operatorname{Im}\left[\frac{1}{2\pi i}\log G(c_j)\right] \tag{14}$$

(le signe supérieur pour $c_\nu = a_\nu$, inférieur pour $c_\nu = b_\nu$), $\omega(t)$ est une fonction bornée, *différente de zéro* sur L et vérifiant la condition de Hölder avec le même exposant que la fonction donnée $G(t)$. N. Mouskhelichvili [1] a démontré que toute solution de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ du problème non homogène (1) de Hilbert est donnée par la formule

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z)\,P(z), \tag{15}$$

où $P(z)$ désigne une fonction entière arbitraire.

D'après la propriété

$$\lim_{z\to\infty} z^\varkappa X(z) = 1 \tag{16}$$

de la solution canonique, nous concluons que, si l'indice (8) de la solution est positif, alors la solution (15) s'annule à l'infini dans le cas où l'on choisit pour la fonction $P(z)$ un polynome arbitraire de degré $\varkappa - 1$ au plus. Dans le cas $\varkappa = 0$, cette propriété sera vérifiée, si l'on pose $P(z) = 0$. Si l'indice $\varkappa$ est négatif, la solution (15) s'annule à l'infini sous certaines conditions à vérifier pour la fonction donnée $g(t)$.

2. Énoncé du problème. — Nous posons le problème de la recherche d'une suite de fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)$, holomorphes dans le domaine du plan de la variable complexe extérieur aux coupures disjointes aux tangentes continues

$$\widehat{a_1 b_1}, \quad \widehat{a_2 b_2}, \quad \ldots, \quad \widehat{a_p b_p} \qquad (a_\nu \neq b_\nu)$$

dont les valeurs limites $\Phi_\nu^+(t)$ et $\Phi_\nu^-(t)$ des deux côtés de chaque coupure vérifient le système de n relations non linéaires données

$$\begin{cases} \Phi_\nu^+(t) = G_\nu(t)\,\Phi_\nu^-(t) + \lambda F_\nu[t, \Phi_1^+(t), \ldots, \Phi_n^+(t), \Phi_1^-(t), \ldots, \Phi_n^-(t)] \\ (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{17}$$

en tout point $t \in L$, excepté aux extrémités a_ν, b_ν des arcs.

On demande que toutes les fonctions $\Phi_\nu(z)$ soient *bornées* aux voisinages des extrémités distinguées non singulières

$$c_{k_1}, \quad c_{k_2}, \quad \ldots \quad c_{k_q} \tag{18}$$

et que, pour les autres extrémités c_μ, elles vérifient des inégalités de la forme

$$|\Phi_\nu(z)| < \frac{\text{Cte}}{|z - c_\mu|^\theta}, \tag{19}$$

θ étant une constante, non fixée, inférieure à l'unité.

On admet les hypothèses suivantes :

1° Les fonctions complexes $G_\nu(t)$ sont définies sur l'ensemble *fermé* L et vérifient une condition de Hölder

$$|G_\nu(t) - G_\nu(t_1)| \leq k_G |t - t_1|^{h_G}, \tag{20}$$

k_G étant une constante positive et l'exposant h_G, une constante positive non supérieure à l'unité. On admet, en outre, que toutes les fonctions G_ν sont différentes de zéro.

2° Les fonctions complexes $F_\nu(t, u_1, u_2, \ldots, u_{2n})$ sont définies dans la région

$$t \in L, \qquad u_j \in \Pi \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{21}$$

Π désignant le plan entier de la variable complexe, où elles vérifient une condition de Hölder-Lipschitz de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} |F_\nu(t, u_1, \ldots, u_{2n}) - F_\nu(t', u'_1, \ldots, u'_{2n})| \\ < k_F \left[|t - t'|^{h_F} + \sum_{j=1}^{2n} |u_j - u'_j| \right] \end{array} \right. \qquad (k_F > 0,\ 0 < h_F \leq 1) \tag{22}$$

et, en outre, l'inégalité

$$|F_\nu(t, u_1, \ldots, u_{2n})| < m_F \sum_{j=1}^{2n} |u_j|^r + m'_F, \tag{23}$$

où m_F, m'_F, r sont des constantes positives données, on a

$$0 \leq r < 1.$$

3. Mise du problème en un système d'équations intégrales. — D'après la formule (15) de Mouskhelichvili, nous pouvons affirmer que la solution $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)$ du problème proposé, si elle existe, vérifie le système d'équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_\nu(z) = \dfrac{\lambda}{2\pi i} X_\nu(z) \displaystyle\int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - z)} d\tau + X_\nu(z) P_\nu(z) \\ (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right. \tag{24}$$

où $\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)$ désignent les valeurs limites des fonctions (24) au point $\tau \in L$ des deux côtés des arcs $\widehat{a_1 b_1}, \ldots, \widehat{a_p b_p}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_\nu(\tau) = \Phi_\nu^+(\tau) \\ \varphi_{n+\nu}(\tau) = \Phi_\nu^-(\tau) \end{array} \right. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{25}$$

$X_\nu(z)$ est la solution canonique de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ correspondant à la fonction $G_\nu(t)$; les $P_\nu(z)$ sont certaines fonctions entières.

En faisant tendre, dans les formules (24), le point z vers un point intérieur $t \in L$ et en appliquant les formules connues de Plemelj [dans l'hypothèse que les fonctions (25) sont de classe $\mathfrak{H}^{\mu}_{\alpha}(c_{k_1}, \ldots, c_{k_\eta})$, (voir le paragraphe 4)], nous constatons que les fonctions limites (25) vérifient le système d'équations intégrales singulières

$$(26)\quad \begin{cases} \varphi_\nu(t) = \dfrac{\lambda}{2} F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] \\ \qquad + \dfrac{\lambda}{2\pi i} X^+_\nu(t) \displaystyle\int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X^+_\nu(\tau)(\tau - t)} d\tau + X^+_\nu(t) P_\nu(t), \\ \varphi_{n+\nu}(t) = -\dfrac{\lambda}{2} \dfrac{X^-_\nu(t)}{X^+_\nu(t)} F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] \\ \qquad + \dfrac{\lambda}{2\pi i} X^-_\nu(t) \displaystyle\int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X^+_\nu(\tau)(\tau - t)} d\tau + X^-_\nu(t) P_\nu(t) \\ \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n); \end{cases}$$

les intégrales ont le sens de la valeur principale de Cauchy. Nous étudierons le système d'équations (26), en y traitant les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$ comme des inconnues et en y substituant, à la place de $P_\nu(t)$, des fonctions entières arbitraires.

4. Propriétés d'une classe de fonctions définies sur des arcs non fermés. — Pour étudier le système (26), nous introduirons une classe de fonctions complexes, définies sur l'ensemble $L = \sum_\nu \widehat{a_\nu b_\nu}$, remarquable par ses propriétés importantes.

Définition 1. — Nous appelons classe $\mathfrak{H}^{\mu}_{\alpha}$ un ensemble de toutes les fonctions complexes $\varphi(t)$, définies et continues en tout point intérieur $t \in L$, qui vérifient l'inégalité

$$(27)\quad |\varphi(t)| < \frac{\text{Cte}}{\left[\displaystyle\prod_{\nu=1}^{p} |t - a_\nu| . |t - b_\nu|\right]^{\alpha}}$$

et l'inégalité généralisée de Hölder suivante :

$$(28)\quad |\varphi(t) - \varphi(t_1)| < \frac{\text{Cte}\,|t - t_1|^{\mu}}{\left[\displaystyle\prod_{\nu=1}^{p} |t - a_\nu| . |t_1 - b_\nu|\right]^{\alpha+\mu}},$$

où α et μ sont des constantes réelles fixées pour la classe considérée, vérifiant les conditions

$$(29)\quad 0 < \mu < 1, \qquad 0 \leq \alpha < 1, \qquad \alpha + \mu < 1.$$

Les constantes figurant aux numérateurs des expressions (27) et (28) sont posi-

tives mais non fixées, les points t et t_1 sont situés à l'intérieur du même arc arbitraire $\widehat{a_\nu b_\nu}$, mais on a toujours $t_1 \in \widehat{tb_\nu}$.

THÉORÈME 1. — *Si la fonction $\varphi(t)$ est de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$, où $\alpha > 0$, alors la fonction $\psi(t)$, définie sur* L *par une transformation singulière de Cauchy*

$$\psi(t) = \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - t} \tag{30}$$

est aussi de classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$.

Nous avons donné la démonstration de cette propriété importante dans notre travail [2] (1). Nous signalons la conservation des paramètres de la classe dans la transformation (30).

THÉORÈME 2. — *La classe $\mathfrak{H}_\alpha^\mu$ est un sous-ensemble de la classe $\mathfrak{H}_{\alpha_1}^{\mu_1}$*

$$\mathfrak{H}_\alpha^\mu \subset \mathfrak{H}_{\alpha_1}^{\mu_1} \qquad (\alpha + \mu < 1,\ \alpha_1 + \mu_1 < 1)$$

si les paramètres de classes vérifient les inégalités

$$0 < \mu_1 \leq \mu, \qquad 0 \leq \alpha \leq \alpha_1.$$

Démonstration. — La propriété est évidente si $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ et si le paramètre μ reste fixe. Pour étudier l'influence du changement de la valeur du paramètre μ, considérons sur tout arc $\widehat{a_\nu b_\nu}$ un couple d'arcs $\widehat{a_\nu T'_\nu}$ et $\widehat{T''_\nu b_\nu}$ n'ayant pas de points communs. Nous distinguerons les deux cas suivants : 1° $t \in \widehat{a_\gamma T'_\gamma}$, $t_1 \in \widehat{T''_\gamma b_\gamma}$, alors la distance $|t - t_1|$ admet une borne inférieure positive et, de la limitation (27) de la fonction $\varphi(t)$ elle-même, résulte qu'on peut choisir la constante positive K suffisamment grande, pour qu'on ait

$$|\varphi(t) - \varphi(t_1)| < K \frac{|t - t_1|^{\mu_1}}{\left[\prod_{\nu=1}^{\rho} |t - a_\nu| \cdot |t_1 - b_\nu|\right]^{\alpha + \mu_1}} \tag{31}$$

si $\mu_1 < \mu$, les distances $|t - a_\gamma|$ et $|t_1 - b_\gamma|$ étant arbitrairement petites; 2° les points t et t_1 sont situés simultanément sur l'arc $\widehat{a_\gamma T''_\gamma}$ ou bien sur l'arc $\widehat{T'_\gamma b_\gamma}$; supposons par exemple,

$$t \in \widehat{a_\gamma T''_\gamma}, \qquad t_1 \in \widehat{t T''_\gamma};$$

dans ce cas si $|t - t_1| \leq |t - a_\gamma|$, alors on a évidemment

$$\frac{|t - t_1|^\mu}{|t - a_\gamma|^\mu} \leq \frac{|t - t_1|^{\mu_1}}{|t - a_\gamma|^{\mu_1}} \qquad \text{si} \quad \mu_1 < \mu$$

(1) La démonstration donnée dans le travail cité est aussi vraie dans le cas actuel, où les tangentes ne sont que continues.

et la distance $|t_1 - b_\gamma|$ a une borne inférieure positive, donc l'inégalité (31) restera vraie, la constante K étant choisie suffisamment grande; il ne reste que le cas $|t - t_1| > |t - a_\gamma|$, mais alors l'inégalité (31) résulte directement de la limitation (27), K étant suffisamment grand. Le théorème 2 est donc démontré.

Définition 2. — Nous appelons classe $\mathfrak{H}^{\mu}_{\alpha}(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ l'ensemble de toutes les fonctions de classe $\mathfrak{H}^{\mu}_{\alpha}$ qui sont bornées aux voisinages des extrémités distinguées

$$c_{k_1} \quad c_{k_2}, \quad \ldots, \quad c_{k_q} \qquad (q \leq 2p)$$

des arcs $(c_{2\nu} = b_\nu, c_{2\nu-1} = a_\nu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$, et qui vérifient les deux inégalités suivantes :

$$|\varphi(t)| < \frac{\text{Cte}}{\prod_{\nu=1}^{p} |t - a_\nu|^{\theta_\nu \alpha} |t - b_\nu|^{\theta'_\nu \alpha}}, \tag{32}$$

$$|\varphi(t) - \varphi(t_1)| < \frac{\text{Cte}\,|t - t_1|^{\mu}}{\prod_{\nu=1}^{p} |t - a_\nu|^{\theta_\nu \alpha + \mu} |t_1 - b_\nu|^{\theta'_\nu \alpha + \mu}} \qquad (t_1 \in \widehat{tb_\gamma}) \tag{33}$$

$(\alpha + \mu < 1)$, où $\theta_\nu = 0$, si a_ν coïncide avec l'une des extrémités $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ et $\theta_\nu = 1$ dans le cas contraire; θ'_ν admet des valeurs analogues relativement au point b_ν. Signalons que la fonction $\varphi(t)$, quoique bornée aux voisinages des extrémités $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$, n'a pas nécessairement des limites en ces points.

Théorème 3. — *Si la fonction $\varphi(\tau)$ est de classe $\mathfrak{H}^{\mu}_{\alpha}(c_{k_1}, \ldots c_{k_q})$, la fonction $\psi(t)$ transformée par la formule*

$$\psi(t) = \prod_{j=1}^{2p} (t - c_j)^{\gamma_j} \int_{L} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\prod_{j=1}^{2p} (\tau - c_j)^{\gamma_j} (\tau - t)} \qquad (t \in L) \tag{34}$$

est de classe $\mathfrak{H}^{\mu}_{\rho}(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$; on admet que les constantes $\gamma_j = \gamma'_j + i\gamma''_j$ vérifient les inégalités

$$\begin{cases} 0 < \gamma'_j < 1 & \text{si } j = k_1, \ldots, k_q, \\ -1 < \gamma'_j \leq 0 & \text{si } j \neq k_1, \ldots, k_q, \\ \mu + \max |\gamma'_j| < 1 & \text{si } j = 1, 2, \ldots, 2p, \end{cases} \tag{35}$$

enfin la constante ρ a les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \rho = \alpha & \text{si } \alpha > \beta = \max |\gamma'_j| \quad \text{pour } j \neq k_1, \ldots, k_q, \\ \rho = \beta & \text{si } \alpha < \beta. \end{cases} \tag{35'}$$

Démonstration. — Pour démontrer le théorème, il suffit d'étudier l'intégrale

$$F_j(t) = \int_{c_j c_{j+1}} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(\tau - c_j)^{\gamma_j} (\tau - t)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p) \tag{36}$$

dans un voisinage suffisamment petit et fermé de l'extrémité c_j ne contenant pas des autres extrémités. Une branche continue de la fonction $(\tau - c_j)^{\gamma_j}$ étant choisie, nous appliquerons le théorème sur le module de l'intégrale et nous aurons l'inégalité (2)

$$|(\tau - c_j)^{-\gamma_j} - (\tau_1 - c_j)^{-\gamma_j}| < \text{Cte sup}\,|\tau' - c_j|^{-\gamma'_j - 1}\,|\tau - \tau_1|,$$

où la borne supérieure concerne les points τ' sur l'arc $\widehat{\tau\tau_1}$. Nous en déduirons les inégalités

$$(37)\qquad \left|\frac{1}{(\tau - c_j)^{\gamma_j}} - \frac{1}{(\tau_1 - c_j)^{\gamma_j}}\right| < \begin{cases} \dfrac{\text{Cte}\,|\tau - \tau_1|^{\mu}}{|\tau - c_j|^{\gamma'_j + \mu}} & \text{si} \quad \gamma'_j + \mu > 0, \\ \dfrac{\text{Cte}\,|\tau - \tau_1|^{\mu}}{|\tau_1 - c_j|^{\gamma'_j + \mu}} & \text{si} \quad \gamma'_j + \mu < 0 \end{cases}$$

sous la supposition que $\tau \in \widehat{c_j\tau_1}$. Il en résulte que la fonction

$$(38)\qquad \varphi^*(\tau) = \varphi(\tau)\,(\tau - c_j)^{-\gamma_j}$$

vérifie au voisinage du point c_j les inégalités

$$(38')\qquad \begin{cases} |\varphi^*(\tau)| < \dfrac{\text{Cte}}{|\tau - c_j|^{\theta^j\alpha + \gamma'_j}}, \\ |\varphi^*(\tau) - \varphi^*(\tau_1)| < \dfrac{\text{Cte}\,|\tau - \tau_1|^{\mu}}{|\tau - c_j|^{\theta^j\alpha + \gamma'_j + \mu}}, \end{cases}$$

si $\theta^j\alpha + \gamma'_j > 0$ ($\theta^j = 0$, si $j = k_1, \ldots, k_q$ et $\theta^j = 1$ dans le cas contraire). Nous en concluons, d'après le théorème 1, que la fonction (36) vérifie au voisinage de l'extrémité c_j les inégalités

$$(39)\qquad \begin{cases} |F_j(t)| < \dfrac{\text{Cte}}{|t - c_j|^{\theta^j\alpha + \gamma'_j}}, \\ |F_j(t) - F_j(t_1)| < \dfrac{\text{Cte}\,|t - t_1|^{\mu}}{|t - c_j|^{\theta^j\alpha + \gamma'_j + \mu}} \end{cases}$$

sous la même hypothèse que $\alpha + \gamma'_j > 0$.

Dans le cas $\alpha + \gamma'_j < 0$, mais $\alpha + \gamma'_j + \mu > 0$ (ce qui n'a lieu que si $j \neq k_1, \ldots, k_q$), on applique le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 1 et l'on conclut que la fonction $F_j(t)$ vérifie, au voisinage de l'extrémité c_j, les inégalités

$$(40)\qquad \begin{cases} |F_j(t)| < \text{Cte}, \\ |F_j(t) - F_j(t_1)| < \dfrac{\text{Cte}\,|t - t_1|^{\mu}}{|t - c_j|^{\theta^j\alpha + \gamma'_j + \mu}}. \end{cases}$$

---

(2) On s'appuie ici, et dans la preuve du théorème suivant, sur la propriété qu'il existe une constante positive χ, inférieure à l'unité, telle que le rapport $\dfrac{|t_1 - t_2|}{s_{12}}$ vérifie les inégalités $0 < \chi \leq \dfrac{|t_1 - t_2|}{s_{12}} \leq 1$, t_1 et t_2 étant deux points arbitraires de l'arc $\widehat{ab}$ et s_{12} la longueur de la partie de cet arc qui joint les points t_1 et t_2.

Enfin, si $\alpha+\gamma'_j+\mu<0$, la fonction (38) tendant vers zéro, si $\tau\to c_j$, admet un coefficient de Hölder tendant aussi vers zéro et la fonction (36) vérifie la condition de Hölder avec un coefficient borné au voisinage du point c_j.

Les propriétés démontrées de la fonction (36) confirment l'affirmation du théorème 3, c'est-à-dire que la fonction transformée (34) est de classe $\mathfrak{H}^{\mu}_{\rho}$. Nous signalons encore que, d'après la transformation du théorème 1 (*voir* [2]), les inégalités concernant la fonction transformée (34) ont la forme

$$|\psi(t)|<\frac{C_1M_\varphi+C_2k_\varphi}{\prod_{\nu=1}^{p}|t-a_\nu|^{\theta_\nu\rho}|t-b_\nu|^{\theta'_\nu\rho}}, \tag{41}$$

$$|\psi(t)-\psi(t_1)|<\frac{(C'_1M_\varphi+C'_2k_\varphi)|t-t_1|^{\mu}}{\prod_{\nu=1}^{p}|t-a_\nu|^{\theta_\nu\rho+\mu}|t_1-b_\nu|^{\theta'_\nu\rho+\mu}}, \tag{42}$$

où M_φ et k_φ sont des constantes positives, figurant aux numérateurs des expressions correspondantes (32) et (33) concernant la fonction donnée $\varphi(t)$; les constantes positives C_1, C_2, C'_1, C'_2 ne dépendent pas de la fonction $\varphi(t)$.

THÉORÈME 4. — *Si la fonction $\varphi(\tau)$ est de classe $\mathfrak{H}^{\mu}_{\alpha}(c_{k_1},\ldots,c_{k_q})$, alors toute branche de la fonction analytique*

$$\Phi(z)=\prod_{j=1}^{2p}(z-c_j)^{\gamma_j}\int_L\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\prod_{j=1}^{2p}(\tau-c_j)^{\gamma_j}(\tau-z)} \tag{43}$$

(*les hypothèses précédentes concernant les constantes γ_j étant conservées*) *holomorphe au voisinage suffisamment petit de toute l'extrémité c_j, coupé par un arc correspondant $\widehat{c_jc_{j\pm1}}$, est bornée aux voisinages des extrémités distinguées $c_{k_1},\ldots,c_{k_q}$ et vérifie l'inégalité à singularité faible*

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{Cte}}{|z-c_j|^{\rho}} \tag{44}$$

au voisinage de toute autre extrémité; le nombre $\rho<1$ est défini par les formules (35′).

Démonstration. — Pour démontrer le théorème, il suffit d'étudier la fonction

$$\Phi_c(z)=(z-c)^{\gamma}\int_{cc'}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^{\gamma}(\tau-z)} \tag{45}$$

dans un voisinage suffisamment petit de l'extrémité c choisie arbitrairement parmi les extrémités $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$; on a désigné par c' la seconde extrémité de l'arc choisi. Nous avons désigné, en outre, par $\gamma=\gamma'+i\gamma''$ un des exposants $\gamma_j=\gamma'_j+i\gamma''_j$ qui correspond à l'extrémité c. On a donc $0<\gamma'<1$, si c appar-

tient à l'ensemble des extrémités distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$, et $-1 < \gamma' \leq 0$, dans le cas contraire. Nous signalons que la fonction $\varphi(\tau)$, quoique bornée aux voisinages des extrémitées distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$, n'a pas nécessairement des limites en ces points. Cette généralisation de nos hypothèses exige d'autres méthodes pour l'étude de l'intégrale de la forme (45), considérée aussi par N. I. Mouskhelichvili dans son Ouvrage [1].

Soit une demi-tangente cT_0 issue du point c, sur laquelle sont situées les projections orthogonales des points de l'arc $\widehat{cc'}$ au voisinage de l'extrémité c. Soient ensuite les deux demi-droites cT_1 et cT_2 situées des deux côtés de la tangente cT_0 et faisant avec elle le même angle *aigu*. Considérons un voisinage fermé V_c du point c, ne contenant pas le point c', de diamètre suffisamment petit pour que la perpendiculaire à la droite cT_0 issue de tout point $z \in V_c$, situé à l'intérieur de l'angle convexe entre cT_1 et cT_2 contenant cT_0, coupait la portion $\widehat{cv}$ de l'arc $\widehat{cc'}$ située dans V_c en un seul point t. On suppose, de plus, que le domaine V_c est suffisamment petit pour que la tangente en tout point de l'arc $\widehat{cv}$ fasse avec la tangente cT_0 un angle aigu plus petit que celui des demi-droites cT_1 et cT_0. Désignons par $\mathcal{E}_c$ l'ensemble de tous les points $z \neq t$, situés simultanément dans le voisinage V_c et à l'intérieur de l'angle convexe T_1cT_2, pour lesquels la longueur de l'arc correspondant $\widehat{ct}$ est inférieure à la moitié de la longueur de l'arc $\widehat{cv}$.

Pour étudier la fonction (45) au voisinage de l'extrémité c, supposons d'abord $z \in \mathcal{E}_c$ et décomposons l'intégrale (45) en somme

$$\Phi_c(z) = \Phi_c^{cl_0}(z) + \Phi_c^{l_0c'}(z) \tag{46}$$

des intégrales étendues aux arcs $\widehat{ct_0}$ et $\widehat{t_0c'}$, où t_0 est un point de l'arc $\widehat{cv}$ tel que les longueurs des arcs $\widehat{ct}$ et $\widehat{tt_0}$ soient égales.

Écrivons maintenant la première des intégrales (46) de la façon suivante :

$$\Phi_c^{cl_0}(z) = (z-c)^{\gamma} \int_{cl_0} \frac{(\tau-c)^{-\gamma}\varphi(\tau) - (t-c)^{-\gamma}\varphi(t)}{\tau - z}\, d\tau + \frac{(z-c)^{\gamma}}{(t-c)^{\gamma}}\varphi(t) \int_{cl_0} \frac{d\tau}{\tau - z} \tag{47}$$

et remarquons que le produit $(\tau - c)^{-\gamma}\varphi(\tau)$ vérifie les inégalités (38′). Nous en déduirons pour la première composante, $I^{cl_0}(z)$, de la somme (47) les limitations suivantes :

1° Dans le cas $\theta\alpha + \gamma' + \mu \geq 0$,

$$|I^{cl_0}(z)| < \text{Cte}\,|z-c|^{\gamma'} \int_{ct} \frac{dl_\tau}{|\tau - c|^{\theta\alpha+\gamma'+\mu}\,|\tau - t|^{1-\mu}} + \text{Cte}\,|z-c|^{\gamma'} \int_{tl_0} \frac{dl_\tau}{|t-c|^{\theta\alpha-\gamma'+\mu}\,|\tau - t|^{1-\mu}};$$

2° Dans le cas $\theta\alpha + \gamma' + \mu < 0$,

$$|I^{cl_0}(z)| < \text{Cte}\,|z-c|^{\gamma'} \int_{ct} \frac{dl_\tau}{|t-c|^{\theta\alpha+\gamma'+\mu}\,|\tau - t|^{1-\mu}} + \text{Cte}\,|z-c|^{\gamma'} \int_{tl_0} \frac{dl_\tau}{|\tau - c|^{\theta\alpha+\gamma'+\mu}\,|\tau - t|^{1-\mu}};$$

signalons que $\theta = 0$, si c appartient à l'ensemble $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ (alors $0 < \gamma' < 1$) et $\theta = 1$ dans le cas contraire ($-1 < \gamma' \leq 0$). En remarquant maintenant que le rapport $\frac{|t - c_1|}{|z - c|}$ est borné, si $z \in \mathcal{E}_c$, nous déduirons dans les deux cas antérieurs l'inégalité

$$|I^{c'_0}(z)| < \frac{\text{Cte}}{|z - c|^{\theta\rho_c}}; \tag{48}$$

où $\rho_c = |\gamma'|$ si $\alpha < |\gamma'|$ et $\rho_c = \alpha$ si $\alpha > |\gamma'|$.

La limitation de la seconde composante de la somme (47) est évidente, puisque l'intégrale qui y figure est bornée pour $z \in \mathcal{E}_c$ et nous obtenons pour l'intégrale (47) la limitation suivante :

$$|\Phi_c^{c'_0}(z)| < \frac{\text{Cte}}{|z - c|^{\theta\rho_c}}. \tag{49}$$

La limitation de la seconde composante de la somme (46) est plus aisée puisqu'elle n'exige pas de la décomposition (47). En désignant par s et σ les longueurs des arcs $\overset{\frown}{ct}$ et $\overset{\frown}{c\tau}$ et en tenant compte de l'inégalité $\frac{\sigma - s}{\sigma} \geq \frac{1}{2}$, si $\sigma \geq 2s$, nous aurons

$$\begin{aligned} |\Phi_c^{t_0 c'}(z)| &< \text{Cte}\,|z - c|^{\gamma'} \int_{t_0 c'} \frac{dl_\tau}{|\tau - c|^{\theta\alpha + \gamma'} |\tau - t|} \\ &< \text{Cte}\,|z - c|^{\gamma'} \int_{2s}^{|cc'|} \frac{d\sigma}{\sigma^{\theta\alpha + \gamma' + 1}} < \frac{\text{Cte}}{|z - c|^{\theta\rho_c}}. \end{aligned} \tag{50}$$

En réunissant les résultats (49) et (50), nous voyons que l'intégrale (45) vérifie l'inégalité

$$|\Phi_0(z)| < \frac{\text{Cte}}{|z - c|^{\theta\rho_c}} \qquad \text{si} \quad z \in \mathcal{E}_c, \tag{51}$$

elle est donc bornée, si c appartient à l'ensemble $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$. Il reste à étudier le cas, où le point z est situé dans le domaine $\mathcal{E}'_c$ commun au voisinage V_c et à l'angle concave limité par les demi-droites cT_1 et cT_2 (ne contenant pas la demi-tangente cT_0). On peut montrer par un calcul élémentaire que si le point $z \neq c$ est situé dans le domaine $\mathcal{E}'_c$ et le point τ à l'intérieur de l'arc $\overset{\frown}{cv}$, alors les trois distances $|z - c|$, $|z - \tau|$, $|\tau - c|$ vérifient l'inégalité

$$\frac{|\tau - z|}{|z - c| + |\tau - c|} \geq \sin\frac{\Im}{2}, \tag{52}$$

où $\Im$ est la borne inférieure *positive* de la mesure de l'angle aigu que fait le vecteur $\tau - c$, pour $\tau \in \overset{\frown}{cv}$, avec les demi-droites cT_1 et cT_2. Il en résulte, pour la partie de l'intégrale (45) étendue à l'arc $\overset{\frown}{cv}$, dans le cas $z \in \mathcal{E}'_c$, l'inégalité

$$\begin{aligned} &\left|(z - c)^\gamma \int_{cv} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - c)^\gamma (\tau - z)}\right| \\ &\quad < |z - c|^{\gamma'} \left(\sin\frac{\Im}{2}\right)^{-1} \int_{cv} \frac{\text{Cte}\,dl_\tau}{|\tau - c|^{\theta\alpha + \gamma'} [\,|z - c| + |\tau - c|\,]} < \frac{\text{Cte}}{|z - c|^{\theta\rho_c}} \end{aligned} \tag{53}$$

si petit que soit $|z-c|$. En somme l'intégrale (45) vérifie l'inégalité

$$|\Phi_c(z)| < \frac{\text{Cte}}{|z-c|^{\theta\rho_c}}$$

dans un voisinage suffisamment petit de l'extrémité c choisi arbitrairement. En conséquence, nous en déduirons l'affirmation du théorème 4.

5. Existence de la solution du problème. — Le système d'équations intégrales singulières (26) étant non résoluble par les méthodes de l'Analyse classique, nous donnerons la preuve d'existence de la solution de ce système par l'application du théorème topologique de J. Schauder [3] sur le point invariant d'une transformation (3) :

« Si, dans un espace linéaire, normé et complet (c'est-à-dire un espace de Banach), une transformation continue fait correspondre à un ensemble E de points, convexe et fermé, son sous-ensemble compact, alors il existe dans l'ensemble E au moins un point invariant de la transformation. »

Soit donc un espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes

$$[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)]$$

de $2n$ fonctions complexes, définies dans l'ensemble des points intérieurs des arcs $L = \widehat{a_1 b_1} + \widehat{a_2 b_2} + \ldots + \widehat{a_p b_p}$, *continues* en tout point $t \in L$, distinct des extrémités a_ν, b_ν et vérifiant les inégalités

$$|\varphi_\nu(t)| \leq \frac{\text{Cte}}{\left[\prod_{c_j \in Z} |t-c_j|\right]^A} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{54}$$

les produits étant étendus à l'ensemble Z de toutes les extrémités c_j *différentes* des extrémités distinguées pour la classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$. Les fonctions $\varphi_\nu(t)$ sont donc bornées au voisinage des extrémités $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$. La constante qui figure dans le numérateur du membre droit de l'inégalité (54) prend, pour l'espace Λ, toutes les valeurs positives possibles, mais l'exposant constant positif A, fixé au dénominateur, a une valeur unique pour tout l'espace Λ choisie arbitrairement parmi les nombres inférieurs à l'unité, mais supérieurs à la plus grande des valeurs absolues

$$\max_{j,\nu} |\alpha_j^\nu + \lambda_j^\nu| < A < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{55}$$

liés à la solution $X_\nu(z)$ de classe $h(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$, l'indice variable j prenant

(3) C'est Gousseïnov dans le travail [4] qui, le premier, a appliqué la méthode topologique pour l'étude de l'équation intégrale singulière dans le cas particulier d'un segment de l'axe réel.

toutes les valeurs pour lesquelles les sommes $\alpha_j^\nu + \lambda_j^\nu$ sont *négatives* [*voir* (5), (7) et (7')], ou nulles.

On définit la somme des deux points de l'espace Λ par la formule

$$[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}] + [\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_{2n}] = [\varphi_1 + \varphi'_1, \ldots, \varphi_{2n} + \varphi'_{2n}] \tag{56}$$

et le produit du point $[\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ par un nombre réel λ par la formule

$$\lambda[\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}] = [\lambda\varphi_1, \ldots, \lambda\varphi_{2n}]. \tag{56'}$$

Ensuite, on définit la norme du point $U = [\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ par la plus grande des bornes supérieures des produits

$$\| U \| = \max_{1 \leq \nu \leq 2n} \sup_{t \in L} \left[\prod_{j=1}^{2\rho} | t - c_j |^{0'_j A + \mu} | \varphi_\nu(t) | \right], \tag{57}$$

où $0^j = 0$, si c_j appartient à l'ensemble des extrémités distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ et $\theta^j = 1$, si $c_j \in Z$.

La constante positive μ dans la définition (57) est fixée arbitrairement de façon qu'on ait

$$0 < \mu + \tilde{A} < 1, \qquad \mu \leq \min(h_G, h_F), \qquad (A + \mu) r \leq A, \tag{58}$$

où les constantes r, h_G et h_F caractérisent les fonctions G_ν et F_ν dans les inégalités admises (20), (22) et (23), $\tilde{A}$ est le plus grand de tous les nombres $| \alpha_j^\nu + \lambda_j^\nu |$.

On définit la distance des deux points U et V de l'espace Λ, comme d'habitude, par la norme de la différence de ces points ;

$$\delta(U, V) = \| U - V \|. \tag{59}$$

L'espace Λ est donc *linéaire* et *normé*: en outre, on voit qu'il est *complet*, puisque la condition de Cauchy est à la fois nécessaire et suffisante pour la convergence d'une suite de points de l'espace Λ, au sens de la norme (57).

L'espace Λ est, par conséquent, un espace de Banach.

Considérons maintenant dans l'espace Λ un ensemble E de tous les points $U = [\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \| U \| \leq \rho, \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{p} | t - a_j |^{0_j A + \mu} | t_1 - b_j |^{0'_j A + \mu} | \varphi_\nu(t) - \varphi_\nu(t_1) | \leq \varkappa | t - t_1 |^\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n), \end{cases} \tag{60}$$

où ρ et $\varkappa$ sont des nombres positifs fixés arbitrairement; $\theta_j = 0$ si le point a_j appartient à l'ensemble des extrémités distinguées $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$ et $\theta_j = 1$ dans le cas contraire, θ'_j a des valeurs analogues relativement au point b_j. On suppose, comme d'habitude, que le point t_1 est situé sur l'arc $\widehat{ib}$.

En accord avec la définition donnée précédemment, les fonctions $\varphi_\nu(t)$ liées avec l'ensemble E sont de classe $\mathfrak{H}_\Lambda^\mu(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$.

L'ensemble E est évidemment *fermé*, puisque le point limite d'une suite arbitraire de points, vérifiant les conditions (60), vérifie aussi ces conditions.

En outre, l'ensemble E est *convexe*; en effet, si les deux points U_1 et U_2 vérifient les conditions (60), alors leur combinaison linéaire $[\gamma U_1 + (1-\gamma)U_2]$ vérifie aussi ces conditions, lorsque γ varie de 0 à 1.

D'après la forme du système d'équations proposé (26), transformons l'ensemble E par les relations

$$(61)\quad \begin{cases} \psi_\nu(t) = \frac{1}{2}\lambda F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)] \\ \qquad + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^+(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} d\tau + X_\nu^+(t) P_\nu(t), \\ \psi_{n+\nu}(t) = -\frac{1}{2}\lambda F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots \varphi_{2n}(t)] \frac{X_\nu^-(t)}{X_\nu^+(t)} \\ \qquad + \frac{\lambda}{2\pi i} X_\nu^-(t) \int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)(\tau - t)} d\tau + X_\nu^-(t) P_\nu(t) \\ \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

D'après les propriétés admises (22) et (23) des fonctions F_ν et les inégalités (60), les fonctions dans les intégrales (61) vérifient l'inégalité

$$(62)\quad |F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]| < \frac{2nm_F \rho^r + m_F C}{\prod_{j=1}^{2p} |\tau - c_j|^{(\theta' A + \mu)r}},$$

où la constante C est une borne supérieure suivante :

$$(62')\quad C = \sup_{\tau \in L} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{(\theta' A + \mu)r} \right\}$$

et vérifient les inégalités de Hölder suivantes :

$$(63)\quad \begin{aligned} &|F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)] - F_\nu[\tau_1, \varphi_1(\tau_1), \ldots, \varphi_{2n}(\tau_1)]| \\ &< k_F \left[|\tau - \tau_1|^{h_F} + \frac{2n\varkappa |\tau - \tau_1|^\mu}{\prod_{j=1}^{p} |\tau - a_j|^{\theta_j A + \mu} |\tau_1 - b_j|^{\theta'_j A + \mu}} \right] \\ &< \frac{k_F (C' + 2n\varkappa) |\tau - \tau_1|^\mu}{\prod_{j=1}^{p} |\tau - a_j|^{\theta_j A + \mu} |\tau_1 - b_j|^{\theta'_j A + \mu}}, \end{aligned}$$

où la constante positive C', ne dépendant que des arcs L, est la borne supérieure suivante :

$$(63')\quad C' = \sup_{\tau, \tau_1 \in L} \left\{ |\tau - \tau_1|^{h_F - \mu} \prod_{j=1}^{p} |\tau - a_j|^{\theta_j A + \mu} |\tau_1 - b_j|^{\theta'_j A + \mu} \right\}.$$

Nous en concluons, en tenant compte des formules (11), (13) et du théorème 3, que les fonctions (61) sont définies et continues à l'intérieur des arcs L et qu'elles vérifient les inégalités de la forme

$$(64)\qquad |\psi_\nu(t)| \leq \frac{|\lambda|\,C_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + |\lambda|\,C_2 k_F(C' + 2n\varkappa) + C_3 M_P}{\prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{\Lambda\theta'}},$$

$$(65)\qquad |\psi_\nu(t) - \psi_\nu(t_1)| \leq \frac{|\lambda|\,C'_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + |\lambda|\,C'_2 k_F(C' + 2n\varkappa) + C'_3 M_P + C'_4 k_P}{\prod_{j=1}^{p} |t - a_j|^{\theta_j\Lambda+\mu} |t_1 - b_j|^{\theta'_j\Lambda+\mu}} |t - t_1|^\mu,$$

où les constantes C_1, C_2, C_3, C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 sont positives et indépendantes des fonctions F_ν; M_P désigne une borne supérieure des fonctions $P_\nu(t)$ sur L et k_P est un coefficient de Hölder concernant les fonctions $P_\nu(t)$ sur L. La transformation (61) fait donc correspondre, à tout point $[\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ de l'ensemble E, un point $[\psi_1, \ldots, \psi_{2n}]$ de l'espace Λ et toutes ses composantes $\psi_\nu(t)$ sont aussi des fonctions de classe $\mathfrak{H}^\mu_\Lambda(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, comme les fonctions $\varphi_\nu(t)$ pour l'ensemble E. En tenant compte des propriétés (64) et (65) de l'ensemble transformé E', nous pouvons affirmer que cet ensemble fera partie de l'ensemble E, si les constantes du problème vérifient les conditions suivantes :

$$(66)\qquad \begin{cases} |\lambda|\,C_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + |\lambda|\,C_2 k_F(C' + 2n\varkappa) + C_3 M_P \leq \rho C_1^{-1}, \\ |\lambda|\,C'_1(2nm_F\rho^r + m'_F C) + |\lambda|\,C'_2 k_F(C' + 2n\varkappa) + C'_3 M_P + C'_4 k_P \leq \varkappa, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(67)\qquad C_4 = \sup_{t\in L}\left[\prod_{j=1}^{p} |t - a_j|\,.\,|t - b_j|\right]^\mu.$$

Les constantes $\varkappa$ et ρ étant arbitraires, nous voyons que les inégalités (66) seront toujours vérifiées, si le module du paramètre λ est suffisamment petit.

Avant d'appliquer le théorème de Schauder, nous démontrerons encore les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 5. — *La transformation de l'ensemble* E *par les relations* (61) *est continue dans l'espace* Λ.

Démonstration. — Soit une suite arbitraire $\{U_m\}$ de points $U_m = [\varphi_1^{(m)}, \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}]$ de l'ensemble E, convergente vers un point $U = [\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]$ de cet ensemble au sens de la norme (57), c'est-à-dire qu'on a

$$(68)\qquad \delta(U_m, U) = \max_\nu \sup_L \left[\prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{\theta_j\Lambda+\mu} |\varphi_\nu^{(m)}(t) - \varphi_\nu(t)|\right] \to 0.$$

Pour démontrer le théorème, il est nécessaire et suffisant de démontrer que

la suite $\{U'_m\}$ de points $U'_m=[\psi_1^{(m)}, \ldots, \psi_{2n}^{(m)}]$, transformés par les relations (61), converge vers un point $U'=[\psi_1, \ldots, \psi_{2n}]$ qui correspond au point limite U par les relations (61). Étudions dans ce but la différence

$$(69)\qquad \psi_\nu^{(m)}(t)-\psi_\nu(t)=\frac{\lambda}{2}Y_\nu(t)\,F_\nu[t, \varphi_1^{(m)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(t)] - \frac{\lambda}{2}Y_\nu(t)\,F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)]+I_\nu^{(m)}(t)-I_\nu(t),$$

où l'on a posé

$$(69')\qquad \begin{cases} I_\nu^{(m)}(t)=\dfrac{\lambda}{2\pi i}X_\nu^+(t)\,Y_\nu(t)\displaystyle\int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1^{(m)}(\tau), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)\,(\tau-t)}\,d\tau, \\ I_\nu(t)=\dfrac{\lambda}{2\pi i}X_\nu^+(t)\,Y_\nu(t)\displaystyle\int_L \frac{F_\nu[\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{2n}(\tau)]}{X_\nu^+(\tau)\,(\tau-t)}\,d\tau; \end{cases}$$

en outre, on a

$$(69'')\qquad \begin{cases} X_\nu^+(t)=X_{\nu-n}^+(t), \qquad F_\nu=F_{\nu-n}, \qquad \text{si} \quad \nu=n+1, \quad n+2, \quad \ldots, \quad 2n, \\ Y_\nu(t)=\begin{cases} 1, & \text{si} \quad \nu=1, 2, \ldots, n, \\ X_{\nu-n}^-(t)/X_{\nu-n}^+(t), & \text{si} \quad \nu=n+1, \quad n+2, \quad \ldots, \quad 2n. \end{cases} \end{cases}$$

L'étude de la première différence du membre droit de l'égalité (69) est immédiate. Nous aurons notamment, d'après l'hypothèse (22),

$$|F_\nu[t, \varphi_1^{(m)}(t), \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}(t)]-F_\nu[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)]|<k_F\sum_{\nu=1}^{m}|\varphi_\nu^{(m)}(t)-\varphi_\nu(t)|,$$

donc, d'après la convergence admise (68), nous constatons que

$$(70)\qquad \max_\nu \sup_{t\in L}\left\{\prod_{j=1}^{2p}|t-c_j|^{\theta_j A+\mu}\,|F_\nu[t, \varphi_1^{(m)}, \ldots, \varphi_{2n}^{(m)}]-F_\nu[t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}]|\right\}\to 0 \qquad \text{si} \quad m\to\infty.$$

Pour étudier la différence des intégrales (69'), considérons un arc l, portion d'un arc arbitraire $\widehat{a_\nu b_\nu}$ contenant le point t, dont l'une des extrémités l', l'' peut coïncider avec les extrémités a_ν ou b_ν. Sans restreindre la généralité, nous supposons que le point t soit situé au milieu de l'arc l, si cet arc avec ses extrémités l', l'' est situé à l'intérieur de l'arc $\widehat{a_\nu b_\nu}$, ou bien que la longueur de l'arc $\widehat{l't}$ est au plus égale à la longueur de l'arc $\widehat{tl''}$, si l'une des extrémités, par exemple l', coïncide avec l'extrémité a_ν ou b_ν. Décomposons maintenant les intégrales (69') en sommes d'intégrales

$$(71)\qquad \begin{cases} I_\nu'' (t)=I_\nu^{(m)l}(t)+I_\nu^{(m)(L-l)}(t), \\ I_\nu(t)=I_\nu^{l}(t)+I_\nu^{L-l}(t) \end{cases}$$

étendues à l'arc l et à la partie extérieure $L-l$. Décomposons ensuite les inté-

grales $I_\nu^{(m)l}(t)$ de la façon suivante :

$$(72)\quad I_\nu^{(m)l}(t)=\frac{\lambda}{2\pi i}X_\nu^+(t)\,Y_\nu(t)\int_l\Big\{F_\nu[\tau,\varphi_1^{(m)}(\tau),\ldots,\varphi_{2n}^{(m)}(\tau)][X_\nu^+(\tau)]^{-1}$$
$$-F_\nu[t,\varphi_1^{(m)}(t),\ldots,\varphi_{2n}^{(m)}(t)][X_\nu^+(t)]^{-1}\Big\}\frac{d\tau}{\tau-t}$$
$$+\frac{\lambda}{2\pi i}Y_\nu(t)\,F_\nu[t,\varphi_1^{(m)}(t),\ldots,\varphi_{2n}^{(m)}(t)]\int_l\frac{d\tau}{\tau-t}.$$

Le premier membre de cette somme, que nous désignons par $J_\nu^{(m)}(t)$, d'après les inégalités (62) et (63), admet les limitations suivantes :

$$(73)\quad |J_\nu^{(m)}(t)|<\mathrm{Cte}\,|X_\nu^+(t)|\left[\int_{l'l}\frac{|\tau-t|^{\mu-1}\,dl\tau}{\prod_{j=1}^{p}|\tau-a_j|^{\theta_jA+\mu}|t-b_j|^{\theta'_jA+\mu}}\right.$$
$$\left.+\int_{ll''}\frac{|\tau-t|^{\mu-1}\,dl\tau}{\prod_{j=1}^{p}|t-a_j|^{\theta_jA+\mu}|\tau-b_j|^{\theta'_jA+\mu}}\right].$$

Nous en concluons que, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre η_ε tel que, pour tout arc l sur L de longueur η_ε, l'inégalité

$$(74)\quad \max_\nu \sup_{t\in L}\left\{\prod_{j=1}^{2p}|t-c_j|^{\theta_jA+\mu}\,|J_\nu^{(m)}(t)|\right\}<\frac{\varepsilon}{5}$$

soit vérifiée quel que soit m.

Le second membre de la somme (72), d'après l'inégalité (62), vérifie l'inégalité suivante :

$$(75)\quad \left|\frac{\lambda}{2\pi i}Y_\nu(t)\,F_\nu[t,\varphi_1^{(m)}(t),\ldots,\varphi_{2n}^{(m)}(t)]\int_l\frac{d\tau}{\tau-t}\right|<\frac{\mathrm{Cte}}{\prod_{i=1}^{2p}|t-c_j|^{\theta_jA}}\left|\log\frac{t-l'}{l''-t}\right|.$$

Donc, tenant compte de la position du point t à l'intérieur de l'arc l, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif η'_ε, tel que, pour tout arc l sur L de longueur η'_ε, l'inégalité

$$(76)\quad \max_\nu \sup_{t\in L}\left\{\prod_{j=1}^{2p}|t-c_j|^{\theta_jA+\mu}\left|\frac{\lambda}{2\pi i}Y_\nu(t)\,F_\nu(t,\varphi_1^{(m)},\ldots,\varphi_{2n}^{(m)})\int_l\frac{d\tau}{\tau-t}\right|\right\}<\frac{\varepsilon}{5},$$

m étant arbitraire, sera vérifiée. Les inégalités analogues aux (74) et (76) sont vraies pour les fonctions $\varphi_\nu(t)$ concernant le point limite U. Si donc l'arc l contenant le point t a une longueur égale à la plus petite des valeurs η_ε et η'_ε,

alors, pour toute position du point t à l'intérieur des arcs L, les inégalités

$$\max_{\nu} \sup_{t \in L} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} | t - c_j |^{\theta_j \lambda + \mu} | I_\nu^{(m)l}(t) | \right\} < \frac{2\varepsilon}{5}, \tag{77}$$

$$\max_{\nu} \sup_{t \in L} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} | t - c_j |^{\theta_j \lambda + \mu} | I_\nu^{l}(t) | \right\} < \frac{2\varepsilon}{5}, \tag{77'}$$

m étant arbitraire, sont vérifiées. Il reste à étudier la différence des seconds membres des sommes (71). Ces intégrales, étendues à la partie extérieure $L - l$, sont régulières et leur différence, d'après la supposition (22), vérifie l'inégalité

$$| I_\nu^{(m)L-l}(t) - I_\nu^{L-l}(t) | < \frac{|\lambda|}{2\pi} | X_\nu^+(t) Y_\nu(t) | \int_{L-l} \frac{k_F \sum_{j=1}^{2n} | \varphi_j^{(m)}(\tau) - \varphi_j(\tau) | \, dl_\tau}{| X_\nu(\tau) | \cdot | \tau - t |}. \tag{78}$$

Remarquons maintenant que, d'après l'hypothèse sur la position du point t à l'intérieur de l'arc l, la distance $|\tau - t|$ pour $\tau \in L - l$ admet une borne inférieure positive. Donc, la longueur de l'arc l étant fixée comme le plus petit des deux nombres $\gamma_{1\varepsilon}$ et $\gamma'_{1\varepsilon}$, nous pouvons maintenant faire correspondre au nombre arbitraire $\varepsilon > 0$ un indice N_ε suffisamment grand, pour que la différence des intégrales étendues à l'ensemble $L - l$ vérifie l'inégalité

$$\max_{\nu} \sup_{t \in L} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} | t - c_j |^{\theta_j \lambda + \mu} | I_\nu^{(m)L-l}(t) - I_\nu^{L-l}(t) | \right\} < \frac{\varepsilon}{5} \qquad \text{si} \quad m > N_\varepsilon. \tag{79}$$

En réunissant les inégalités (77) et (79), nous aurons

$$\max_{\nu} \sup_{t \in L} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} | t - c_j |^{\theta_j \lambda + \mu} | I_\nu^{(m)}(t) - I_\nu(t) | \right\} < \varepsilon \qquad \text{si} \quad m > N_\varepsilon, \tag{80}$$

d'où, en tenant compte de la propriété (70), on aura

$$\lim_{m \to \infty} \| U'_m - U' \| = 0,$$

ce qui établit le théorème 5.

THÉORÈME 6. — *L'ensemble* E' *transformé de l'ensemble* E *par les relations* (61), *est compact.*

Démonstration. — Conformément à la définition, l'ensemble E' est compact, si, de toute suite $\{V_m\}$ de ses points,

$$V_m = [\psi_1^{(m)}, \ldots, \psi_{2n}^{(m)}]$$

on peut extraire une suite partielle $\{V_{k_m}\}$ convergente.

Considérons donc sur tout arc $\widehat{a_\gamma b_\gamma}$ deux arcs $\widehat{a_\gamma t_\gamma}$ et $\widehat{t_\gamma b_\gamma}$ de longueur suffisamment petite pour que l'inégalité suivante soit vérifiée ;

$$\max_{(\nu)} \sup_{t \in L_0} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} | t - c_j |^{\theta_j \Lambda + \mu} | \psi_\nu^{(m)}(t) | \right\} < \varepsilon \tag{82}$$

pour tous les termes d'une suite $\{V_m\}$ de points de l'ensemble E', arbitrairement choisie; on a désigné par L_0 l'ensemble de points de tous les arcs $\widehat{a_\gamma t_\gamma}$ et $\widehat{t_\gamma b_\gamma}$.

Nous signalons qu'il est possible d'établir l'inégalité (82), grâce à la limitation (64), vérifiée par tous les points de l'ensemble E'.

Remarquons maintenant, que sur l'ensemble de points des arcs $\widehat{t_\gamma t_\gamma}$, les fonctions $\psi_\nu^{(m)}(t)$ sont bornées et, d'après (65), vérifient la condition de Hölder

$$| \psi_\nu^{(m)}(t) - \psi_\nu^{(m)}(t_1) | < k_\psi | t - t_1 |^\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n),$$

avec le même coefficient de Hölder k_ψ, quel que soit m. Donc les fonctions composantes des points de la suite $\{V_m\}$ sont *également continues* et *également bornées* sur l'ensemble des arcs $\widehat{t_\gamma t_\gamma}$, par conséquent, d'après le théorème d'Arzelà, de toute suite fonctionnelle $\{\psi_\nu^{(m)}(t)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 2n)$, on peut extraire une suite partielle $\{\psi_{k_m}(t)\}$ uniformément convergente dans l'ensemble des arcs $\widehat{t_\gamma t_\gamma}$. Il en résulte que, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un indice N_ε, tel qu'on ait

$$\max_{(\nu)} \sup_{t \in L - L_0} \left\{ \prod_{j=1}^{2p} | t - c_j |^{\theta_j \Lambda + \mu} | \psi_\nu^{k_m}(t) - \psi_\nu^{k_s}(t) | \right\} < \varepsilon \qquad \text{si} \quad m > N_\varepsilon, \qquad s < N_\varepsilon. \tag{83}$$

L'inégalité (82) étant vérifiée par tous les éléments de la suite $\{V_m\}$, nous en concluons que la suite $\{V_{k_m}\}$ de points

$$V_{k_m} = | \psi_1^{k_m}, \ldots, \psi_{2n}^{k_m} |$$

vérifie la condition de Cauchy

$$\| V_{k_m} - V_{k_s} \| = \max_{(\nu)} \sup_{t \in L} \prod_{j=1}^{2p} | t - c_j |^{\theta_j \Lambda + \mu} | \psi_\nu^{k_m}(t) - \psi_\nu^{k_s}(t) | < \varepsilon \qquad (m, s > N_\varepsilon) \tag{84}$$

conformément à la définition de la norme (57).

Or, l'espace Λ est complet, donc la condition (84) de Cauchy est suffisante, pour que la suite des points $\{V_\nu^{k_m}\}$ soit convergente dans l'espace Λ, par conséquent l'ensemble transformé E' est *compact*.

Toutes les conditions du théorème cité de Schauder étant vérifiées, nous en concluons l'existence d'un point au moins $[\varphi_1^*(t), \ldots, \varphi_{2n}^*(t)]$ dans l'ensemble E invariant relativement à la transformation (61). Ce système de fonctions

$[\varphi_1^*(t), \ldots, \varphi_{2n}^*(t)]$, est une solution du système d'équations intégrales singulières (26). Les fonctions trouvées $\varphi_\nu^*(t)$ de classe $\mathfrak{H}_\lambda^*(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ vérifient la condition de Hölder (65), donc, en substituant ces fonctions dans les membres de droite des formules (24), on obtient un système de fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)$, holomorphes dans le domaine extérieur aux coupures $\widehat{a_\nu b_\nu}$, dont les valeurs limites Φ_ν^+ et Φ_ν^-, d'après les formules de Plemelj et le système d'équations donné (26), vérifient le système d'équations donné (17) en tout point intérieur t des arcs L.

En outre, d'après le théorème 4, ces fonctions vérifient la condition de rester bornées au voisinage des extrémités distinguées $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q}$ et la condition (19) pour les autres extrémités des arcs L. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — *Si les fonctions données* G_ν *et* F_ν *vérifient les conditions* (20), (22) *et* (23), *si en outre le module du paramètre* λ *est suffisamment petit pour que les conditions* (66) *soient satisfaites,* P_ν *étant des fonctions entières arbitrairement choisies, alors il existe des systèmes de fonctions*

$$\Phi_1(z), \quad \Phi_2(z), \quad \ldots, \quad \Phi_n(z)$$

holomorphes à l'extérieur des coupures L *dont les valeurs limites* Φ_ν^+ *et* Φ_ν^- *vérifient le système d'équations proposées* (17) *en tout point intérieur* $t \in L$ *et qui restent bornées au voisinage des extrémités distinguées* $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q}$, *en vérifiant la condition* (19) *aux autres extrémités. Tous ces systèmes sont déterminés par les formules* (24), *où* $P(z)$ *sont les fonctions entières arbitraires et* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)$ *forment les solutions du système d'équations intégrales* (26).

En terminant, nous ferons encore l'analyse des conditions (66) d'existence de la solution du problème.

Nous avons déjà dit que ces conditions seront toujours satisfaites si $|\lambda|$ est suffisamment petit. Le choix des constantes positives ρ et $\varkappa$ étant arbitraire, il est naturel de profiter de cette circonstance et de choisir leurs valeurs, pour que l'intervalle permis pour la variation du paramètre λ soit le plus grand possible.

Écrivons donc les inégalités (66) sous la forme équivalente

$$(85) \qquad \begin{cases} |\lambda| \leq \dfrac{\rho C_4^{-1} - C_3 M_P}{C_1(2nm_F\rho^r + m_F' C) + C_2 k_F (C' + 2n\varkappa)} \\ |\lambda| \leq \dfrac{\varkappa - C_3' M_P - C_4' k_P}{C_1'(2nm_F\rho^r + m_F' C) + C_2' k_F (C' + 2n\varkappa)} \end{cases}$$

sous la supposition que ρ et $\varkappa$ sont suffisamment grands pour qu'on ait

$$(85') \qquad \begin{cases} \rho C_4^{-1} - C_3 M_P > 0, \\ \varkappa - C_3' M_P - C_4' k_P > 0. \end{cases}$$

Si $\varkappa$ varie de la valeur $C_3' M_P + C_4' k_P$ à l'infini, ρ restant fixe, alors le premier

membre droit (51) diminue vers zéro et le second membre augmente de zéro vers la valeur limite $[2nC_2'k_F]^{-1}$. Donc la borne supérieure de $|\lambda|$ aura la plus grande valeur si nous choisissons pour $\varkappa$ une valeur $\varkappa_0$ vérifiant l'égalité

$$(86)\qquad \frac{\rho C_4^{-1} - C_3 M_P}{C_1(2nm_F\rho^r + m_F' C) + C_2 k_F(C' + 2n\varkappa_0)} = \frac{\varkappa_0 - C_3' M_P - C_4' k_P}{C_1'(2nm_F\rho^r + m_F' C) + C_2' k_F(C' + 2n\varkappa_0)}.$$

Nous en calculons $\varkappa_0(\rho)$ et la valeur correspondante $\lambda_0(\rho)$ en fonction de ρ et nous prouverons, par un calcul élémentaire, que $\lambda_0(\rho)$ tend, en augmentant, vers la limite

$$(87)\qquad \lim_{\rho\to\infty}\lambda_0(\rho) = \frac{1}{2nC_2'k_F}$$

si ρ tend vers l'infini. Par conséquent, si le paramètre λ vérifie la condition

$$(88)\qquad |\lambda| < \frac{1}{2nC_2'k_F}$$

(qui est la limitation la plus avantageuse), alors, il existe des valeurs ρ, $\varkappa$ telles que les inégalités (66) soient satisfaites et notre problème admet les solutions, quelles que soient les fonctions entières $P_\nu(z)$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, P. Noordhoff, N. V., Groningen-Holland, 1953.

[2] W. Pogorzelski, *Propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés et leur application* (*Bulletin Acad. Pol. Sc.*, t. 6, n° 2, 1958, ou *J. Math. Mech.*, Bloomington, 1958, p. 7).

[3] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen* (*Studia Mathematica*, 1930).

[4] A. I. Gousseïnov, *Sur une équation intégrale* (en russe) (*Izviestia A. N. S.S.S.R.*, t. 12, 1948, p. 193.

DÉFINITIONS DE LA SOMME

ET DU

PRODUIT PAR SCALAIRE EN TERMES DE DISTANCE

PAR M. MAURICE FRÉCHET

(Paris).

RÉSUMÉ.

L'auteur montre que pour déterminer un espace de Banach et, plus généralement, un espace vectoriel distancié, il n'est pas nécessaire de poser *a priori* les définitions de 0, $\|x\|$, $x+y$, $\lambda.x$. Au moins quand il s'agit d'un espace vectoriel distancié « *tendu* » (défini plus loin, p. 227), on peut formuler ces définitions uniquement en termes de distances. D'ailleurs, ces définitions gardent un sens pour un espace distancié quelconque, mais elles peuvent conduire à 0, 1 ou plusieurs déterminations de $x+y$ et de $\lambda.x$. Pourtant, elles donnent une détermination unique de $x+y$ et aussi de $\lambda.x$ pour des catégories d'espaces distanciés très générales, comprenant des espaces vectoriels distanciés non tendus et même d'autres espaces distanciés pour lesquels aucune structure vectorielle n'est donnée d'avance. On pourra, alors, en appliquant nos définitions à ces espaces, les considérer comme de « quasi-espaces vectoriels distanciés ».

Ces extensions seront données par l'intermédiaire des « centres de gravité » et, s'il est nécessaire, des « moyennes T » de Shafik Doss.

Des exemples suivront.

Enfin un Complément montrera à ceux qui s'intéressent au Calcul des probabilités, l'origine de ce Mémoire dans cette science et plus particulièrement dans notre théorie des « éléments aléatoires, de nature quelconque ».

PREMIÈRE PARTIE.

MOYENNES EXTENSIVES ET CENTRES DE GRAVITÉ.

INTRODUCTION. — Le présent Mémoire trouve son origine dans notre étude des éléments aléatoires de nature quelconque. Cependant, il peut être *exposé indépendamment du Calcul des probabilités* et c'est *ce que nous ferons par la suite*. Nous renverrons à un Complément, qu'on pourra négliger (p. 255), l'explica-

tion du lien de ce Mémoire avec le Calcul des probabilités et de l'origine des définitions que nous allons poser ici *a priori*.

Moyennes et milieux. — Nous appellerons système Z, un système composé de deux éléments (ou points) x, y d'un espace distancié $\mathcal{D}$ [1] auxquels sont affectés deux coefficients numériques ou « poids », p et q ($p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $p+q=1$).

Nous appellerons système U tout système Z particulier pour lequel $p=q\left(=\frac{1}{2}\right)$.

Nous appellerons « moyenne extensive » de Z tout élément γ de $\mathcal{D}$ pour lequel la quantité numérique

$$\sigma^2(a)=p(x,a)^2+q(y,a)^2 \tag{1}$$

atteint sa borne inférieure, quand $a \equiv \gamma$.

Quand $q=0$, on a $\sigma^2(a)=(x,a)^2$ et il devient clair qu'alors, il y a une moyenne extensive et une seule de Z, à savoir $\gamma \equiv x$. De même pour $p=0$, on a $\gamma \equiv y$.

Quand p et q sont $\neq 0$, on voit que plus $\sigma^2(a)$ est petit, plus a sera voisin à la fois de x et de y. Une moyenne extensive de Z est donc plus représentative du système Z qu'un point z pris au hasard. Nous allons chercher dans quelles conditions on peut obtenir une moyenne la plus représentative possible. Un premier pas dans cette voie consiste à partir de l'égalité

$$\sigma^2(a)=pq[(x,a)+(y,a)]^2+[p(x,a)-q(y,a)]^2 \tag{2}$$

et de l'inégalité qui en résulte

$$\sigma^2(a) \geqq pq(x,y)^2. \tag{3}$$

Ainsi la borne inférieure de $\sigma^2(a)$ est au moins égale à la quantité $pq(x,y)^2$ (qui est indépendante de a). Il est clair qu'on aura une moyenne, γ, de Z d'autant plus représentative que $\sigma^2(\gamma)$ se rapprochera de $pq(x,y)^2$.

La plus représentative sera celle pour laquelle $\sigma^2(\gamma)=pq(x,y)^2$. D'ailleurs

$$\sigma^2(a)-pq(x,y)^2=pq\{[(x,a)+(y,a)]^2-(x,y)^2\}+\{p(x,a)-q(y,a)\}^2. \tag{4}$$

Les deux crochets sont $\geqq 0$. Donc, pour qu'il existe un élément δ de $\mathcal{D}$ tel que le premier membre soit nul, il faut et il suffit qu'il existe un élément δ tel que les deux accolades s'annulent pour $a \equiv \delta$.

---

[1] Nous rappellerons (pour pouvoir nous référer aux détails par la suite) qu'un espace distancié $\mathcal{D}$ (souvent appelé espace métrique) est un ensemble E d'éléments quelconques sur lequel on a défini pour tout couple a, b d'éléments de $\mathcal{D}$, une « distance », c'est-à-dire un nombre réel (a,b) tel que :

1° $(a,b)=(b,a) \geqq 0$;

2° $(a,b)=0$ équivaut à dire que a et b ne sont pas distincts;

3° on a l'« inégalité triangulaire »

$$(a,b) \leqq (a,c)+(c,b).$$

Si δ existe, ce sera une moyenne extensive d'un type particulier. Pour cette raison, nous lui donnerons une appellation particulière. A cet effet, observons que δ devra vérifier le système

$$(5) \qquad (x, y) = (x, \delta) + (y, \delta); \qquad p(x, \delta) = q(y, \delta).$$

Et réciproquement, si un élément δ vérifie ce système, on aura

$$\sigma^2(\delta) = pq(x, y)^2.$$

Dans un langage généralisant celui de la géométrie euclidienne, on pourra dire que la première relation (5) exprime que δ est situé sur le « segment » xy, « entre » x et y. D'ailleurs, (5) est équivalent à

$$(6) \qquad (x, \delta) = q(x, y), \qquad (y, \delta) = p(x, y).$$

On peut, de même, exprimer d'après (6), une autre propriété de δ, en disant que δ « partage le segment xy en segments proportionnels à q et p ».

L'ensemble de ces propriétés conduit naturellement à l'exprimer en disant que δ est un « centre de gravité » du système Z.

Dans le cas où $p = q$, nous dirons que δ est un « *milieu du segment* xy »

On observera que *si* Z *a plusieurs moyennes extensives*, dont, *au moins, un centre de gravité*, toutes *ces moyennes extensives sont des centres de gravité de* Z. Car, s'il y a au moins un centre de gravité de Z, c'est que la borne inférieure de $\sigma^2(a)$ est égale à $pq(x, y)^2$ et alors toute moyenne extensive γ de Z devant faire atteindre à $\sigma^2(a)$ cette borne inférieure, sera aussi un centre de gravité de Z.

Mais un système Z peut avoir une (ou plus d'une) moyenne extensive, sans avoir de « centre de gravité ».

Tel est le cas où $\mathcal{D}$ se réduirait à une droite $\xi'\xi$ dont on aurait supprimé l'intervalle $-1 < \xi < +1$. En prenant $p = q = \frac{1}{2}$, et $x = -1$, $y = +1$, on aura

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{2}(1 + a)^2 + \frac{1}{2}(1 - a)^2 = 1 + a^2, \qquad \text{avec} \quad |a| \geq 1.$$

Le minimum de $\sigma(a)$ est atteint pour $a = \pm 1$; il y a donc deux moyennes extensives de Z. Par contre, il n'y a pas de solution en δ, pour $|\delta| \geq 1$, des relations (6) qui sont ici

$$|1 + \delta| = |1 - \delta| = 1.$$

Il n'y a donc pas de « centre de gravité » de Z.

Un système Z peut avoir zéro centre de gravité comme dans cet exemple ou un tel centre, comme sur la droite complète, ou plus d'un tel centre comme dans l'exemple de la page 240.

Centres de gravité généralisés. — Revenons à un espace distancié $\mathcal{D}$ *quel-*

conque. Un « centre de gravité » δ de Z a été défini comme une solution en γ du système (6), qu'on peut écrire sous la forme

$$(x, \delta) = |1 - p|(x, y), \qquad (y, \delta) = |p|(x, y).$$

Nous généraliserons, *en vue de la suite*, la notion de centre de gravité en remplaçant, dans ces relations, p, qui était supposé compris entre 0 et 1, par un nombre réel quelconque λ.

Nous appellerons d'abord, Z′ un système composé de deux points x, y de $\mathcal{D}$, affectés respectivement des « poids » λ et $1 - \lambda$. Et nous dirons que g est un « centre de gravité généralisé » du système Z′, si c'est un élément de l'espace $\mathcal{D}$ tel que

$$(7) \qquad (x, g) = |1 - \lambda|(x, y), \qquad (y, g) = |\lambda|(x, y).$$

On peut d'ailleurs exprimer cette définition en la ramenant à la définition primitive du centre de gravité δ.

Quand $0 \leq \lambda \leq 1$, le centre de gravité généralisé devient un centre de gravité tout court.

Quand $\lambda > 1$, on peut écrire (7) ainsi

$$(x, g) = (\lambda - 1)(x, y), \qquad (y, g) = \lambda(x, y)$$

d'où

$$(x, g) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}(y, g), \qquad (x, y) = \frac{1}{\lambda}(y, g),$$

c'est-à-dire que x est sur le « segment » yg « entre » y et g et que x divise ce segment dans le rapport de $\frac{1}{\lambda}$ à $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$ ou de 1 à $\lambda - 1$; x est le centre de gravité tout court du système composé de g et y affectés des poids $\frac{1}{\lambda}$ et $1 - \frac{1}{\lambda}$.

Quand $\lambda < 0$, (7) devient, en posant $\lambda' = -\lambda$,

$$(x, g) = (1 + \lambda')(x, y), \qquad (y, g) = \lambda'(x, y)$$

ou

$$(x, y) = \frac{1}{1 + \lambda'}(x, g), \qquad (y, g) = \frac{\lambda'}{1 + \lambda'}(x, g)$$

et l'on voit que y est sur le « segment » xg « entre » x et g et divise ce segment dans le rapport de $\frac{-\lambda}{1 - \lambda}$ à $\frac{1}{1 - \lambda}$ ou encore de $-\lambda$ à 1. Autrement dit, y est un centre de gravité tout court du système des points x et g affectés des poids $\frac{-\lambda}{1 - \lambda}$ et $\frac{1}{1 - \lambda}\left[= 1 - \left(\frac{-\lambda}{1 - \lambda}\right)\right]$.

Remarque. — Si $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel distancié (2), *tout système Z′ y a au*

(2) A. Michal appelle un tel espace, espace *linéaire normé*.

moins un centre de gravité généralisé qui est

$$g_1 = \lambda x + (1 - \lambda) y.$$

En effet

$$(x, g_1) = \| (1-\lambda)(y-x) \| = |1-\lambda| (x, y)$$

et de même

$$(y, g_1) = |\lambda| (x, y).$$

Dès lors, les relations (7) sont bien vérifiées pour $g = g_1$.

Exemples d'un seul centre de gravité généralisé. — Il est bien connu qu'un système Z' a toujours un centre de gravité généralisé et *un seul* dans les espaces euclidiens à un nombre fini de dimensions et même dans l'espace de Hilbert. Sans avoir à en rappeler la démonstration, il nous suffira d'établir cette propriété pour les « espaces vectoriels distanciés *tendus* », dont les espaces en question sont des cas particuliers.

Espaces tendus. — Il y a déjà longtemps, nous avons appelé espace vectoriel distancié *tendu*, tout espace vectoriel distancié (3) (dont la définition est rappelée page 229) qui jouit de la propriété suivante (4) : pour tout système de trois de ses points x, y, z, la relation

$$\| x - y \| = \| x - z \| + \| z - y \|$$

équivaut à dire que z est sur le vecteur x, y, entre x et y, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres α, β ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$) tels que

$$z = \alpha x + \beta y.$$

Ceci étant, *si* l'espace distancié $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel distancié tendu :

1° ***Tout système Z a un centre de gravité et un seul.***

En effet, pour que δ soit un tel centre, il faut et il suffit qu'on ait, à la fois

$$\| x - \delta \| + \| y - \delta \| = \| x - y \|, \tag{8}$$

$$p \| x - \delta \| = q \| y - \delta \|. \tag{9}$$

Puisque $\mathcal{D}$ est tendu, l'égalité (8) implique que δ est de la forme $\alpha x + \beta y$ indiquée ci-dessus. Alors (9) devient

$$p\beta \| y - x \| = q\alpha \| y - x \|. \tag{10}$$

Pour $x = y$, nous voyons d'après (8) qu'il y a un centre de gravité et un seul : $\delta = x = y$.

---

(3) Nous aurons à nous référer plusieurs fois par la suite aux numéros des axiomes à la base de la définition des espaces vectoriels distanciés. Ceux-ci sont rappelés à la fin de cet article, p. 229.

(4) *Voir* p. 142 de notre Ouvrage : *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris.

Pour $x \neq y$, on doit avoir

$$p\beta = q\alpha \qquad \text{ou} \qquad p(1-\alpha) = q\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = p,$$

et de même $\beta = q$. Il y a bien un centre de gravité de Z et un seul

$$\delta = px + qy.$$

2° Mais de même, *il y a un centre de gravité généralisé de Z' et un seul.*

Le cas où $0 \leq \lambda \leq 1$ vient d'être examiné, en prenant $p = \lambda$, d'où $\delta = \lambda . x + (1-\lambda) y$.

Pour $\lambda > 1$, on a vu que x doit être le centre de gravité tout court de y et g, de sorte que si g existe, on doit pouvoir écrire

$$x = \alpha y + \beta g; \tag{11}$$

alors en posant $p = \frac{1}{\lambda}$, on doit avoir, d'après (11)

$$\beta \| g - y \| = p \| g - y \|,$$

d'où, pour $g \neq y$,

$$\beta = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \alpha = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

et par suite

$$x = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) y + \frac{1}{\lambda} g,$$

d'où, encore

$$g = \lambda . x + (1-\lambda) y. \tag{11 bis}$$

Pour $g = y$, on aurait d'après (11), $x = y = g$.

Si g existe, il est donc unique. D'ailleurs, en portant cette expression (11) de g dans (7), on vérifie que ces équations sont satisfaites. Ainsi pour $\lambda > 1$, il y a un centre de gravité généralisé de Z' et un seul.

On verrait, de même que ce résultat subsiste pour $\lambda < 0$.

Inversement, si dans un espace vectoriel distancié, tout système Z' a un centre de gravité et un seul, *un tel espace est un espace tendu.* En effet, supposons qu'on ait

$$(x, z) + (z, y) = (x, y). \tag{12}$$

Alors, on peut trouver λ tel que

$$\lambda (x, z) = (1-\lambda)(z, y); \tag{13}$$

il suffit de prendre

$$\lambda = \frac{(z, y)}{(x, z) + (z, y)} = \frac{(z, y)}{(x, y)}. \tag{14}$$

[Si (x, y) était nul, on aurait d'après (12), $(x, z) = (y, z) = 0$ et toute valeur de λ vérifierait (13)].

Et, d'après (12) et (14), on aurait $0 \leq \lambda \leq 1$. Mais d'après (12) et (13) z serait le centre de gravité, g de Z' et l'on aurait d'après la remarque de la page 227 :

$$g = \lambda . x + (1 - \lambda) . y ;$$

l'espace considéré est bien tendu.

En résumé, *pour un espace vectoriel distancié, il est équivalent d'ajouter qu'il est tendu ou que dans cet espace, tout système Z' a un centre de gravité généralisé et un seul.*

Cas des espaces distanciés. — La seconde forme de la condition précédente a un sens (et nous sera utile) pour tout espace distancié; nous la répéterons donc à part pour ce cas général.

Condition H. — *Un espace distancié quelconque,* $\mathfrak{D}$, *réalise cette condition* H, *si, dans cet espace, tout système Z' admet un centre de gravité généralisé* (*défini* p. 226) *et un seul.*

Nous dirons qu'un tel espace est un espace $\mathfrak{D}'$. Nous donnerons plus loin, dans la troisième partie, plusieurs exemples et, entre autres, deux exemples d'espaces distanciés formés des mêmes éléments mais où les définitions de la distance sont différentes, l'une vérifiant la condition H, l'autre, non.

Les espaces vectoriels distanciés. — Nous allons avoir à nous référer aux numéros des axiomes qui servent à définir les espaces vectoriels distanciés (appelés aussi espaces linéaires normés). Nous aurions pu renvoyer à ces numéros tels qu'ils figurent dans notre Ouvrage, *Les espaces abstraits*, aux pages 125, 126 et 140. Il sera plus commode pour le lecteur de les retrouver ici. Nous en avons supprimé les n^{os} 4, 7 et 8, qui d'après Flamant, sont des conséquences des autres.

Soient x, y, z trois éléments quelconques de l'espace considéré, a, b deux nombres réels quelconques :

1° $x + y$ est un élément bien déterminé de cet espace;
2° $x + y \equiv y + x$;
3° $(x + y) + z \equiv x + (y + z)$;
5° Il existe un élément 0 de cet espace tel que $x + 0 \equiv x$;
6° $a . x$ existe et est un élément de l'espace considéré;
9° $a . (x + y) \equiv a . x + a . y$;
10° $(a + b) . x = a . x + b . x$;
11° $1 . x = x$;
12° $(ab) . x = a . (b . x)$;
13° $\| x \| \geq 0$;
14° $\| x \| = 0$ équivaut à $x \equiv 0$;

15° $\|a.x\| = |a|.\|x\|$;
16° $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

DEUXIÈME PARTIE.

Définitions, pour un espace distancié $\mathcal{D}'$, d'un élément neutre, d'une norme, d'une somme et d'un produit par scalaire.

Élément neutre. — Dans un espace distancié $\mathcal{D}'$ défini p. 229, on peut prendre pour élément neutre n'importe quel élément de $\mathcal{D}'$, sans avoir à modifier les définitions annoncées qui vont suivre.

Cependant, dans l'application de ces définitions à un espace distancié déterminé, il peut arriver qu'on simplifie cette application en choisissant convenablement l'élément neutre, (comme on le voit dans l'exemple de la page 247).

Nous représenterons par 0 l'élément neutre choisi.

Norme. — On définit nécessairement comme norme d'un élément a de $\mathcal{D}'$, la distance de a à l'élément neutre 0 :

$$\|a\| = (0, a).$$

Somme. — Nous définirons d'abord le « milieu », z de deux éléments x, y, de $\mathcal{D}'$, comme leur centre de gravité quand on les affecte de poids égaux $p = q = \frac{1}{2}$. On a alors

$$(15) \qquad (x, z) = (y, z) = \frac{1}{2}(x, y).$$

Ceci étant, la somme $x+y$ de x et de y, sera un élément s de $\mathcal{D}$ tel que la demi-somme de 0 et s soit précisément z. On aura alors

$$(16) \qquad (0, z) = (s, z) = \frac{1}{2}(0, s).$$

On peut aussi définir s comme un centre de gravité généralisé du système $0, z$ affecté des poids respectifs 1 et 2, puisque (16) peut s'écrire sous une forme analogue à (7).

$$(z, s) = |1 - \lambda|(0, z),$$
$$(0, s) = |\lambda|(0, z), \qquad \text{avec ici} \quad \lambda = 2.$$

Dès lors, en vertu de la condition H de la page 229, quels que soient x, y de $\mathcal{D}'$, z puis s, qui sont des centres de gravité généralisés, existent et sont chacun uniques une fois donnés y et x; *chaque couple* x, y de points de $\mathcal{D}'$ a ainsi « *une somme* » *et une seule*.

Produit par scalaire. — Nous définirons le « produit par scalaire », $y = \lambda.x$, de chaque élément x de $\mathcal{D}'$ par un nombre réel λ, comme le centre de gravité

généralisé du système composé des points 0, x affectés des coefficients $1-\lambda$, λ. Autrement dit, d'après (7) et par définition, ce produit scalaire y devra être un élément de $\mathcal{D}'$ vérifiant les relations

$$(17)\qquad \begin{cases} (x, y) = |1-\lambda|\,(0, x); \\ (0, y) = |\lambda|\,(0, x). \end{cases}$$

En vertu de la condition H, nous savons qu'étant donnés 0, x et λ, il existe un élément y et un seul vérifiant ces relations. Ce sera $y = \lambda . x$.

Remarque. — Il est clair, que, comme il le fallait, ces définitions sont équivalentes aux définitions classiques dans les cas les plus simples comme ceux où $\mathcal{D}'$ est un espace euclidien à un nombre fini de dimensions.

On le voit aussi, indirectement, en considérant ces espaces comme des cas particuliers des espaces vectoriels distanciés tendus, pour lesquels la démonstration suit.

Si l'on a soin, en effet, d'appliquer nos définitions des pages 230 à 231, en prenant pour élément neutre, l'élément neutre choisi *a priori* pour un espace vectoriel distancié tendu déterminé G, on a vu que tout produit par scalaire, w, de l'élément x par un nombre réel λ, est, par notre définition de la page 231, un centre de gravité du système Z'' constitué de 0 et x, affectés des coefficients $1-\lambda$ et λ. Or, d'autre part, on a vu, (page 228) que, pour un espace tel que G, tout système Z' a un centre de gravité généralisé et un seul, soit l'élément

$$(18)\qquad \lambda . x + (1-\lambda) . y.$$

On aura donc, dans le cas actuel,

$$w = \lambda . x + (1-\lambda) . 0, \qquad \text{d'où} \qquad w = \lambda . x.$$

Quant à la somme s de x et y, on sait que, par notre définition de la page 230, c'est le centre de gravité généralisé du système 0, m affecté des coefficients 1 et 2, m étant le centre de gravité du système x, y affecté des coefficients $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. D'après (18), on aura d'abord

$$m = \frac{1}{2}(x + y),$$

puis

$$s = |2|\,m + |1-2|\,0 = 2m, \qquad \text{d'où} \qquad s = x + y.$$

Enfin, on a défini la norme, n (p. 230), de x, comme

$$n = (x, 0) = ||x - 0|| = ||x||.$$

Ainsi se trouve établi *dans le cas des espaces vectoriels distanciés tendus*, que *si l'on ignore* volontairement, d'abord, la structure d'un tel espace G *pour n'en*

retenir que la définition de la distance

$$(x, y) = ||x - y||,$$

nos définitions des pages 230 à 231 *permettent* si l'on garde le même élément neutre, *de retrouver la structure initiale caractérisée par* $||x||, x+y$ *et* $\lambda . x$.

Remarque. — En appliquant les quatre définitions précédentes à un espace distancié simple, il arrivera fréquemment qu'on aboutisse ainsi par un long détour à une ou plusieurs définitions connues d'avance ou auxquelles l'intuition aurait pu nous conduire directement. Mais, il est évidemment intéressant et utile de savoir qu'on a pu retrouver des définitions relatives à des espaces particuliers connus en partant de définitions beaucoup plus générales.

En outre, au lieu de chercher à tâtons à imposer à un espace distancié $\mathcal{D}'$ particulier une structure d'espace vectoriel distancié, nos définitions permettent d'y arriver directement.

En revenant à des espaces distanciés quelconques, nous avons vu, p. 230, que, quand ils vérifient la condition H, *on peut déduire de la seule notion de distance les définitions d'un élément neutre* 0, *d'une norme* $||x||$, *d'une somme* $x+y$ et *d'un produit scalaire* $\lambda . x$.

Nous vérifierons ci-après que ces définitions satisfont à plusieurs des propriétés qui sont attribuées à ces notions, dans la définition d'un espace vectoriel distancié. De sorte que les espaces $\mathcal{D}'$ apparaîtront comme de « quasi-espaces vectoriels distanciés ».

Propriétés. — Abandonnons maintenant les espaces vectoriels distanciés tendus pour considérer les espaces distanciés $\mathcal{D}'$ vérifiant H et comparons les propriétés de la nouvelle structure qui vient d'être définie page 230 pour $\mathcal{D}'$ avec celle d'un espace vectoriel distancié.

Recourons pour cela à la liste de ces dernières propriétés, telle qu'elle figure à la page 229.

Les conditions 2°, 10°, 13°, 14° résultent des définitions mêmes de la somme, du produit par scalaire et de la norme.

Les conditions 1° et 6° résultent de ces définitions et de la condition H.

La condition 5° résulte de l'hypothèse H. Car si l'on appelle m le milieu de 0 x, s la somme $x+0$, on aura

$$(0, m) = (x, m) = \frac{(0, x)}{2},$$

$$(0, m) = (s, m) = \frac{(0, s)}{2}.$$

Or, d'après (17), ceci entraîne

$$x = 2m, \qquad s = 2m$$

et d'après H,

$$s = x \qquad \text{ou} \qquad 5° \quad x + 0 = x.$$

De même, en posant $y = \lambda . x$, on a d'après (17)

$$(0, y) = |\lambda| (0, x) \qquad \text{ou} \qquad ||\lambda . x' - \lambda . x|| = |\lambda| \, |x' - x|,$$

c'est-à-dire 15°.

Nous laisserons ouverte la question de savoir si, parmi les conditions restantes : 3°, 9°, 10°, 12°, 16°, il en est encore qui sont satisfaites (et lesquelles), pour un espace $\mathcal{D}'$ quelconque ?

Extension aux moyennes (T).

Une objection. — Les définitions précédentes ont été données dans le cas où l'espace considéré est un espace $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire un espace distancié où tout système Z a un centre de gravité et un seul.

Mais les exemples des pages 238 et 248 montrent qu'il existe des espaces distanciés très simples où il y a plus d'un centre de gravité. Dans un tel cas, il peut y avoir plusieurs déterminations de $x + y$ et de $\lambda . x$, ce qui est gênant.

Un remède. — Il peut donc y avoir intérêt à essayer de choisir parmi les centres de gravité de Z, l'un d'eux qui soit le plus représentatif (en un certain sens à définir) du système Z.

Si l'on y réussit, on remplacera dans la définition de la structure cherchée, en particulier dans les définitions données plus haut de $x + y$ et de $\lambda . x$, le centre de gravité par cet élément plus représentatif.

Le choix devra, en particulier, être tel qu'il coïncide avec la moyenne classique dans le cas des espaces vectoriels distanciés où cette moyenne est l'élément $px + qy$ (même dans le cas où l'espace n'est pas tendu) et où il peut y avoir plusieurs centres de gravité (exemples des pages 240 et 251).

Premier choix d'élément plus représentatif. — Nous avions d'abord pensé à fixer notre choix sur un centre de gravité de Z, soit γ', jouissant, de la propriété suivante : appelons Σ_γ un sphéroïde (de l'espace distancié considéré), ayant pour centre, un centre de gravité, soit γ de Z et comprenant tous les centres de gravité γ_1 de Z. Si, quand on fait varier γ et le rayon de Σ_γ, la borne inférieure de ce rayon est atteinte pour $\gamma \equiv \gamma'$, γ' sera le centre choisi, qu'on appellera moyenne (C),

Un tel choix donne de bons résultats quand il s'agit du cas où $p = q \left(= \frac{1}{2}\right)$ et, par suite, permettrait de définir la somme $x + y$ de façon satisfaisante. Mais il n'en est plus de même pour $p \neq q$ comme le lecteur pourra s'en assurer sur les exemples des pages 240 et 251 (Note [1]).

Deuxième choix d'élément plus représentatif. — Nous avons ensuite pensé à la « moyenne (T) » définie par Shafik Doss ([5]). Nous avons constaté, en effet, que,

([5]) Voir la Note, p. 255.

comme on va le voir, *la moyenne* (T) *du système* Z *est toujours* en même temps, *un « centre de gravité » de* Z (mais non réciproquement) :

Par définition, un élément δ de l'espace distancie $\mathcal{D}$ considéré, sera une moyenne (T) de Z, si l'on a

$$(\delta, a) \leqq p(x, a) + q(y, a) \tag{18}$$

quel que soit l'élément a de $\mathcal{D}$. On devra donc avoir, en particulier, en prenant pour a, soit x, soit y :

$$(\delta, x) \leqq q(x, y), \qquad (\delta, y) \leqq p(x, y). \tag{19}$$

D'où

$$(x, y) \leqq (\delta, x) + (\delta, y) \leqq (x, y)$$

et par suite

$$(x, y) = (\delta, x) + (\delta, y).$$

Donc

$$[q(x, y) - (\delta, x)] + [p(x, y) - (\delta, y)] = 0$$

et comme les deux crochets sont $\geqq 0$, d'après (19), chacun d'eux est nul, c'est-à-dire que

$$(\delta, x) = q(x, y), \qquad (\delta, y) = p(x, y). \tag{20}$$

Autrement dit, d'après la définition par (6), δ est bien un centre de gravité de Z.

Nous verrons sur les exemples des pages 243, 251 et 253 qu'on peut citer un espace distancié et un système Z, pour lesquels il y a une infinité de centres de gravité et seulement un moyenne (T), Ainsi, un centre de gravité n'est pas nécessairement une moyenne (T) et, d'autre part, il peut arriver que l'objection de la page 235 se trouve levée quand on remplace comme élément représentatif de Z, le centre de gravité par la moyenne (T).

Remarque. — Dans un espace vectoriel distancé, qu'il soit « tendu » ou non, *tout système* Z *a au moins une moyenne* (T) qui se confond avec la moyenne classique. En effet, si dans l'inégalité de définition (18) de la moyenne (T) de Z, nous prenons $\delta \equiv px + qy$, l'inégalité prend la forme

$$\| p(x - a) + q(y - a) \| \leqq \| p(x - a) \| + \| q(y - a) \|$$

vérifiée quel que soit a en vertu de l'inégalité triangulaire. Z a donc au moins une moyenne (T) : $\delta = px + qy$.

La moyenne (T) étant définie à partir d'une inégalité sera en général plus difficile et plus longue à calculer que le centre de gravité. On aura donc intérêt à chercher d'abord s'il y a un centre de gravité unique. Même dans le cas contraire, ce calcul n'aura pas été inutile pour chercher s'il y a une moyenne (T) puisque celle-ci doit se trouver parmi les centres de gravité.

Remarque. — Nous venons de voir (p. 236) que dans un espace distancié vectoriel tendu, tout système Z (p. 224) a, au moins, une moyenne (T) — qui est nécessairement un centre de gravité — et, $p =$ qu'il n'a qu'un centre de gravité. Donc, dans un tel espace a une moyenne (T) et une seule — qui coïncide avec la moyenne classique. Nous ajouterons maintenant que : si l'on néglige l'unicité, ce résultat reste valide quand on ne suppose pas que l'espace est tendu. Car il devient évident quand on écrit cette inégalité sous la forme

$$\| p(x-a) + q(y-a) \| \leqq \| p(x-a) \| + \| q(y-a) \|.$$

En particulier : daus un espace vectoriel distancié, tout système Z a au moins un centre de gravité. Ce dernier résultat a été démontré, il y a longtemps, par Karl Menger (1) dans le cas beaucoup plus général où l'on suppose seulement sur l'espace considéré, qu'il est *distancié*, *convexe* (2) et *compact*, ou qu'il est *distancié, convexe et complet*.

Ce double résultat est important, particulièrement ici, où il suffit, pour vérifier si les hypothèses en italiques sont satisfaites, de connaître les éléments de l'espace et leurs distances mutuelles.

Cas d'un système à n éléments pondérés Bien que le cas d'un système à *deux* éléments pondérés soit le seul qui nous soit utile pour la deuxième et la troisième partie, il est loisible et intéressant de considérer en passant, comme nous allons le faire, le cas d'un système à un nombre fini, n, d'éléments pondérés.

Notre définition du centre de gravité d'un système Z d'éléments pondérés ne s'appliquait qu'au cas d'un système de deux éléments. Il y aurait intérêt à voir ce qui peut être généralisé dans les considérations [basées sur l'étude de $\sigma^2(a)$] qui ont conduit à cette définition.

Toutefois, on peut être conduit à une définition assez naturelle pour le cas général, en passant par l'intermédiaire de la moyenne (T).

Moyenne (T). — En effet, la définition de Shafik Doss (s'appliquant quel que soit le nombre fini ou infini de positions possibles), prend la forme suivante dans le cas d'un nombre fini de positions possibles.

Soit X un élément aléatoire qui ne peut prendre que n positions $x_1, \ldots, x_n$ dans un espace distancié $\mathcal{D}$, avec les probabilités $p_1, \ldots, p_n$. On dira que l'élément $\hat{o}$ de $\mathcal{D}$ est une moyenne (T) de X (ou du système U défini par $x_1, \ldots, x_n ; p_1, \ldots, p_n$), si l'on a

$$(\hat{o}, a) \leqq p_1(x_1, a) + \ldots + p_n(x_n, a)$$

quel que soit l'élément certain, a, de $\mathcal{D}$.

(Il n'est pas sûr *a priori* qu'il existe un tel élément.)

---

(1) *Untersuchungen ueber allgemeine Metrik* (*Math. Ann.*, Bd 100, 1928, p. 85-87).

(2) Dans un espace distancié $\mathcal{D}$ un ensemble est *convexe* selon Karl Menger, si, pour tout couple de points x, y de $\mathcal{D}$, il existe au moins un point z de $\mathcal{D}$, distinct de x et de y et tel que

$$(x, z) + (z, y) = (x, y).$$

Considérons, alors, un espace distancié $\mathcal{D}''$, satisfaisant à la condition suivante :

Condition H''. — Tout système $Z(x, y; p, q)$ a au moins une moyenne (T). On peut alors montrer : 1° que dans un tel espace $\mathcal{D}''$, tout système $U(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n)$ a au moins une moyenne (T); 2° comment obtenir cette dernière par une application répétée de la condition (H'').

On a $\sum p_k = 1$, donc l'un au moins des p_k est $\neq 0$. Supposons, par exemple, $p_1 > 0$. On détermine d'abord une moyenne (T) du système

$$U_2\left(x_1, x_2; \frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right), \quad \text{soit } \delta_2.$$

On détermine ensuite une moyenne (T), soit δ_3, du système

$$U_3\left(\delta_2, x_3; \frac{p_1+p_2}{p_1+p_2+p_3}, \frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}\right), \quad \ldots$$

On arrivera enfin à une moyenne (T), soit δ du système

$$U_n(\delta_{n-1}, x_n; p_1+\ldots+p_{n-1}, p_n).$$

Et δ *sera* (comme on le voit immédiatement) *une moyenne* (T) *du système* U.

Centre de gravité. — D'ailleurs, nous savons que $\delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, \delta$ sont des centres de gravité des systèmes à deux éléments correspondants. Nous sommes donc amené à la définition suivante.

Soit un espace distancié $\mathcal{D}_1$ vérifiant la condition H_1 suivante (plus faible que les conditions H et H'').

Condition H_1. — Dans $\mathcal{D}_1$, tout système $Z(x, y; p, q)$ a, *au moins*, un centre de gravité.

Alors dans un tel espace $\mathcal{D}_1$, un centre de gravité d'un système $U(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n)$ (ordonné comme dans ces parenthèses) est, par définition, un élément de $\mathcal{D}_1$, obtenu comme ci-dessus, mais en remplaçant dans $U_3, \ldots, U_n$ les éléments $\delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ par $\gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$: on détermine un centre de gravité γ_2 du système U_2, un centre de gravité γ_3 du système $U_3, \ldots$, enfin un centre de gravité γ du système U_n; par définition, γ sera un centre de gravité de U.

On voit en résumé que :

1° Dans tout espace distancié $\mathcal{D}_1$ vérifiant la condition H_1, tout système $U(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n)$ a au moins un centre de gravité;

2° Dans tout espace distancié H'' vérifiant la condition $\mathcal{D}''$, chaque système $U(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n)$ a au moins une moyenne (T) qui est en même temps un centre de gravité de U.

MOYENNE (T) GÉNÉRALISÉE. — Pour la définition du produit scalaire $y \equiv \lambda . x$, on doit pouvoir prendre pour λ un nombre réel quelconque. Si λ était entre 0 et 1, y serait un centre de gravité de x, 0 avec les coefficients λ et $1 - \lambda$, et ce pourrait être une moyenne (T). Mais quand $\lambda \leq 0$ ou $\lambda > 1$, il faut qu'on choisisse parmi les centres de gravité généralisés. Par exemple, si $\lambda > 1$, un centre de gravité généralisé, γ, de Z′ est tel que x soit le centre de gravité tout court du système des éléments y et γ affectés des coefficients $1 - \frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda}$. Alors, on prendra pour moyenne (T) généralisée de Z′, un élément δ de l'espace $\mathcal{D}$ tel que x soit la moyenne (T) du système formé de y et δ affectés de coefficients $1 - \frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda}$. Autrement dit, δ doit être tel que

$$(x, a) \leq \frac{1}{\lambda}(\delta, a) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)(y, a),$$

ou

(18 *bis*) $$(\delta, a) \geq \lambda(x, a) + (1 - \lambda)(y, a)$$

quel que soit l'élément a de $\mathcal{D}$.

De même, quand $\lambda < 0$, δ sera moyenne (T) généralisée de Z′ quand y sera moyenne (T) de x et δ affectés des coefficients $\frac{-\lambda}{1-\lambda}$ et $\frac{1}{1-\lambda}$. Autrement dit quand on aura encore l'inégalité (18 *bis*).

PRODUIT PAR SCALAIRE ET SOMME. — Dans les cas où l'espace distancié considéré ne vérifie pas la condition H de la page 23, on pourra encore définir $\lambda . x$ et $x + y$ sous une forme généralisée, quand cet espace vérifie la condition suivante :

CONDITION L. — Elle est réalisée quand, dans cet espace, tout système Z′ a une moyenne (T) généralisée. On désignera alors par $\lambda . x$ un élément δ de cet espace qui soit moyenne (T) généralisée du système formé par les éléments x et 0 affectés des coefficients λ et $1 - \lambda$. Pour définir $x + y$, on prendra la moyenne (T), soit m, de x et y affectés des coefficients $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, puis la moyenne (T) généralisée, $x + y$, de 0 et m affectés des coefficients -1 et 2.

MÉTHODE PRATIQUE. — Quand on voudra appliquer à un espace distancié nos définitions de $x + y$ et $\lambda . x$, on commencera par chercher s'il existe un centre de gravité généralisé de Z′. S'il y en a un, mais un seul, quel que soit Z′, c'est qu'on aura affaire à un espace $\mathcal{D}'$ et l'on appliquera nos définitions des pages 232 et 233. S'il y en a plusieurs, on cherchera si Z′ a une moyenne (T) généralisée. Si, quel que soit Z′, il y en a une, mais une seule, on appliquera nos définitions des pages 235 et 236.

Il n'aura pas été inutile de chercher d'abord les centres de gravité, puisque toute moyenne (T) est un centre de gravité. Et de plus, la solution générale de

l'inégalité qui définit une moyenne (T) se trouve simplifiée si l'on y limite le choix de l'élément inconnu en y supposant dès le début que c'est un des centres de gravité *déjà trouvés*.

C'est ce que nous ferons dans les exemples qui vont suivre.

TROISIÈME PARTIE,

Exemples d'application de nos définitions générales de $x+y$ et de $\lambda.x$ a quelques espaces distanciés.

Espaces des points d'un plan. — Nous examinerons successivement deux espaces distanciés R_2 et $\mathfrak{X}$ dont les éléments sont les points d'un plan P, mais où ont été adoptées respectivement deux définitions de la distance. L'un, R_2, réalise la condition (H) de la page 231, l'autre non.

Espace R_2. — C'est l'espace plan de la Géométrie élémentaire. On peut voir directement que dans R_2, tout système Z' (défini p. 226) a un centre de gravité généralisé et un seul et que nos définitions de $x+y$ et $\lambda.x$ données page 232, y conduisent aux définitions classiques.

Espace $\mathfrak{X}$ des points d'un plan. — *Définition.* — Appelons $\mathfrak{X}$ l'espace distancié dont les éléments sont les points d'un plan P, rapporté à deux axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, mais où la « distance » de deux points x, y de coordonnées (ξ, η) (ν, ρ) est, par définition,

$$(37) \qquad \boxed{(x, y) = |\xi - \nu| + |\eta - \rho|.} \quad (^1)$$

Un « segment ». — Soit R le rectangle parallèle aux axes dont les points x, y sont deux sommets opposés. On voit facilement que le « segment » x, y, c'est-à-dire le lieu des points z tels que

$$(38) \qquad (x, z) + (z, y) = (x, y),$$

non seulement existe, mais est constitué par tous les points de l'aire rectangulaire R,

On a, par exemple, sur la figure 1 :

$$(x, z) = xc + cz, \qquad (z, y) = zd + dy, \qquad (x, y) = x\beta + \beta y,$$

d'où (38). Et l'égalité (38) cesse quand z est en dehors de R.

Moyennes extensives. Centres de gravité. — Toute moyenne extensive de Z

(1) C'est pour ne pas compliquer une modification de texte à la dernière heure que les numéros des équations passent brusquement de (20) à (37).

doit rendre minimum pour $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, la quantité

$$\sigma^2 = p[|\xi - \alpha| + |\eta - \beta|]^2 + q[|\nu - \alpha| + |\rho - \beta|]^2.$$

On a vu (p. 224) qu'on a

$$\sigma^2 \geqq pq(x, y)^2.$$

Or considérons le point de coordonnées

$$\alpha_1 = \xi + q(\nu - \xi), \qquad \beta_1 = \eta + q(\rho - \eta).$$

Pour ce point, σ^2 prend la valeur

$$\sigma_0^2 = pq\{|\nu - \xi| + |\rho - \eta|\}^2 = pq(x, y)^2.$$

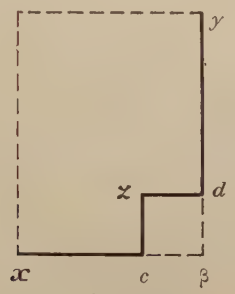


Fig. 1.

Ainsi, il y a au moins, une position du point (α, β) où σ^2 atteint la borne inférieure $pq(x, y)^2$. Donc d'après la page 225 : 1° il y a au moins un centre de gravité de Z et, 2° toute *moyenne extensive* γ de Z *sera un centre de gravité* de Z, donc, sera, d'abord, situé sur le « segment » xy, c'est-à-dire, ici, appartiendra au rectangle R, et en outre vérifiera la relation (5), ici

$$p(x, \gamma) = q(y, \gamma) \tag{5 bis}$$

ou en appelant (α_0, β_0) les coordonnées de γ :

$$p\{|\xi - \alpha_0| + |\eta - \beta_0|\} = q(|\nu - \alpha_0| + |\rho - \beta_0|). \tag{39}$$

D'ailleurs, γ appartenant à R, α_0 sera entre ξ et ν et β_0 entre η et ρ.
Prenons, par exemple, le cas où

$$\xi \leqq \nu, \qquad \eta \leqq \rho.$$

Alors (5 *bis*) deviendra

$$p\{(\alpha_0 - \xi) + (\beta_0 - \eta)\} = q\{(\nu - \alpha_0) + (\rho - \beta_0)\}$$

ou

$$[\alpha_0 - (p\xi + q\nu)] + [\beta_0 - (p\eta + q\rho)] = 0.$$

Donc, toutes les moyennes extensives, tous les « centres de gravité » de Z

seront sur une parallèle à la seconde bissectrice passant par le point δ, de coordonnées

$$\alpha_1 = p\xi + q\nu, \qquad \beta_1 = p\eta + q\rho.$$

L'ensemble de ces moyennes sera le segment uv intercepté sur cette droite

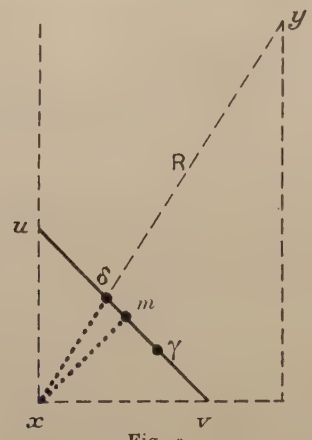


Fig. 2

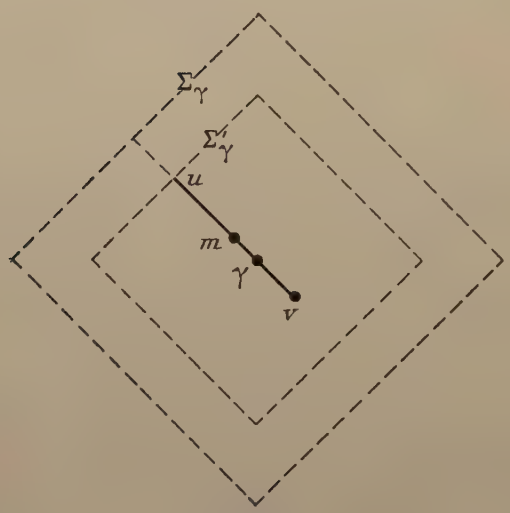


Fig. 3.

par le rectangle R (*fig.* 2). Il ne sera réduit à un point que si R se réduit à un segment, c'est-à-dire si x et y sont sur une même parallèle à l'un des axes, ou sont confondus.

Ainsi, sauf ces cas exceptionnels, *les centres de gravité de* Z sont *en nombre infini*.

Moyenne (C). — Cherchons alors s'il y a une moyenne (C) de Z (définie p. 233).

Dans l'espace $\mathfrak{X}$, un sphéroïde Σ_γ de rayon A, de centre γ, est un carré de centre γ dont les diagonales, de longueur 2A sont parallèles aux axes (*fig.* 3).

Si Σ_γ comprend tous les centres de gravité de Z, il comprend le segment uv; si, en outre, son centre, γ, est un des centres de gravité de Z, γ est sur uv.

Nous voyons sur la figure 3 que Σ_γ comprend le « sphéroïde » Σ'_γ de même centre γ mais qui est le plus petit des sphéroïdes de centre γ comprenant uv, Le contour de Σ'_γ passera par celui des points u, v qui est le plus loin de γ (par u dans la figure 3).

La « moyenne (C) » de Z sera la position de γ où le rayon de Σ'_γ est le plus petit : c'est évidemment le milieu de uv, soit m. Pour $p \neq q$, et si le vecteur $y - x$ n'est pas à 45° sur les axes, m sera différent de $\delta = px + qy$. Or, dans les définitions classiques de la moyenne dans un espace de Banach, la moyenne est précisément δ. Nous vérifions donc que, *pour* $p \neq q$, la définition de la moyenne (C) *n'est pas satisfaisante*.

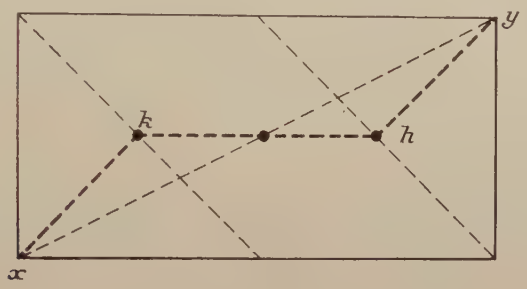


Fig. 4.

On peut s'en rendre encore mieux compte, en observant que si l'on substitue au lieu des centres de gravité de x, y quand p varie, le lieu des moyennes (C), on a bien substitué à l'aire rectangulaire R, une région plus étroite, ici une ligne. Mais au lieu que cette ligne soit le segment rectiligne joignant x, y, c'est la ligne brisée $xkhy$ (*fig.* 4).

On a bien simplifié le premier lieu, R, mais on a encore un résultat moins simple que celui de la théorie classique.

Mais, si $p = q$, alors uv passe par le centre de R avec lequel viennent se confondre δ et m. Alors la demi-somme (C) de x et y se confond avec la demi-somme classique des vecteurs x et y définie dans le plan euclidien P : c'est-à-dire le milieu de xy. La « somme » définie page 230 sera s tel que δ soit le milieu de Os. Ce sera donc la résultante de Ox et de Oy. C'est-à-dire que la « somme de x et y » définie page 230, coïncidera bien avec la somme géométrique des vecteurs Ox et Oy (*fig.* 5).

Ainsi, quand, dans la définition ordinaire du plan euclidien P comme un espace de Banach, on substitue à la définition ordinaire de la distance la définition de la page 238, on obtient encore la même définition de la somme.

Au contraire, si l'on voulait définir le produit par scalaire $\lambda . x$ comme à la page 233 [c'est-à-dire comme la moyenne (C) du système Z' des points O et x

affectés des coefficients $1-\lambda$ et λ], on aurait un produit par scalaire distinct du produit classique et qui se trouverait bien sur le « segment » joignant 0 et x, mais celui-ci est un rectangle et $\lambda.x$ ne serait pas sur lesegment rectiligne euclidien $0x$.

Il vaut donc mieux n'appliquer la définition de la page 233 du produit par scalaire que dans le cas de $\lambda = \frac{1}{2}$, qui conduit à la définition de la somme qu'on vient d'obtenir.

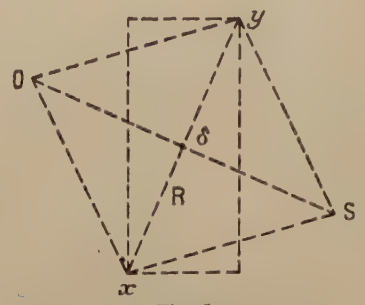


Fig. 5.

Moyenne (T). — On aura, au contraire un résultat satisfaisant, même pour $p \neq q$, si l'on applique la définition de S. Doss à l'espace $\mathfrak{X}$. On doit avoir, si la moyenne (T) existe, à savoir, γ

$$(40) \qquad \|a-\gamma\| \leq p\|a-x\| + q\|a-y\|.$$

Prenons pour coordonnées de x, y : ξ, η; ν, ρ; pour coordonnées de a, γ : α, β et δ, ε. D'où

$$(40\ bis) \qquad |\alpha-\delta|+|\beta-\varepsilon| \leq p[|\alpha-\xi|+|\beta-\eta|]+q[|\alpha-\nu|+|\beta-\rho|].$$

(40 *bis*) peut s'écrire

$$(41) \qquad \{p|\alpha-\xi|+q|\alpha-\nu|-|\alpha-\delta|\}+\{p|\beta-\eta|+q|\beta-\rho|-|\beta-\varepsilon|\} \geq 0.$$

Supposons, par exemple, $\xi \leq \nu$ et $\eta \leq \rho$. On sait déjà qu'alors γ est dans le rectangle

$$\xi \leq \delta \leq \nu, \qquad \eta \leq \varepsilon \leq \rho.$$

Prenons d'abord, pour a, les coordonnées

$$\alpha = 0A, \qquad \beta = 0'B.$$

avec

$$0 = \pm 1, \qquad 0' = \pm 1, \qquad A \geq 0, \qquad B \geq 0,$$

alors

$$\{p|0(A-0\xi)|+q|0(A-0\nu)|-|0(A-0\delta)|\}+\ldots \geq 0$$

ou

$$\{p|A-0\xi|+q|A-0\nu|-|A-0\delta|\}+\ldots \geq 0.$$

Et si A, B sont très grands :

$$\theta[\delta - p\xi - q\nu] + \theta'[\varepsilon - p\eta - q\rho] \geqq 0.$$

Prenons $\theta' = 1$, puis $= -1$ et ajoutons; on aura, puisque $\theta = \pm 1$:

$$\delta - p\xi - q\nu = 0 \qquad \text{et de même} \quad \varepsilon - p\eta - q\rho = 0,$$

c'est-à-dire en vecteurs :

(42) $$\gamma = px + qy.$$

Réciproquement, si dans (40), on prend $\gamma = px + qy$, (40) devient

$$|p(x-a) + q(y-b)| \leqq p\|x-a\| + q\|y-a\|$$

et est donc bien vérifié.

Ainsi, *il y a* dans l'espace $\mathfrak{X}$ et pour tout système Z *une moyenne au sens de S. Doss* et une seule et elle est identique à la moyenne classique, bien que l'espace $\mathfrak{X}$ ne soit pas tendu, et qu'il y ait en général une infinité de centres de gravité de Z.

Moyenne (T) généralisée. — Pour le système Z′ de la page 226, on a défini p. 237 la moyenne (T) généralisée correspondant à $\lambda > 1$ comme un point δ tel que x soit la moyenne (T) du couple y et δ affectés des coefficients $1 - \frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda}$. Si δ existe, on doit donc avoir, d'après (42)

$$x = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) y + \frac{1}{\lambda}\delta,$$

(43) $$\delta = \lambda . x + (1-\lambda) y$$

ce qui est possible. On obtiendrait la même formule pour $\lambda < 0$.

Non seulement, il y a une moyenne (T) généralisée et une seule dans l'espace $\mathfrak{X}$ mais elle coïncide avec le centre classique des moyennes proportionnelles.

Somme et produit par scalaire. — Il résulte de ce qui précède que si l'on appliquait à l'espace $\mathfrak{X}$ les définitions de la somme et du produit par scalaire exprimées, (p. 230) en termes de centres de gravité généralisés, il pourrait y avoir plusieurs déterminations de $x + y$ et de $\lambda . x$.

Au contraire, on retrouvera une détermination unique et coïncidant avec la détermination classique pour $x + y$, comme pour $\lambda . x$ si l'on emploie leurs définitions en termes de moyennes (T) généralisées données page 237.

L'espace E_ω a une infinité de dimensions. — Considérons l'espace distancié E_ω, défini dans ma Thèse, dont chaque élément x, est une suite infinie de nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ et où la distance de deux éléments x et y (la suite $y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$) est

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Cherchons à déterminer le « segment » xy, c'est-à-dire le lieu des points z de E_ω, tels que

$$(x, z) + (y, z) = (x, y)$$

ou

$$\sum_n \frac{1}{n!} C_n = 0, \tag{44}$$

avec

$$C_n = \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|} - \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}. \tag{44 bis}$$

On sait, et l'on voit plus loin, que si a, b, c sont ≥ 0 et tels que $c \leq a + b$, on a aussi

$$\frac{c}{1+c} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Or

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n|, \qquad \text{donc} \quad C_n \geq 0.$$

Alors (44) ne peut avoir lieu que si chaque C_n est nul. Or, avec les notations précédentes, la quantité

$$Q = (1+a)(1+b)(1+c)\left[\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c}\right]$$
$$= (a + b + 2ab)(1 + c) - c(1 + a + b + ab) = c(ab - 1) + a + b + 2ab.$$

Si $ab - 1 > 0$, le crochet est ≥ 0.
Si $ab - 1 \leq 0$:

$$Q \geq (a + b)(ab - 1) + a + b + 2ab = ab(a + b + 2) \geq 0.$$

On a donc bien $C_n \geq 0$. Pour que Q soit nul, il faut, ou bien que

$$ab > 1 \qquad \text{et alors} \quad c = a = b = 0$$

ou

$$ab \leq 1 \qquad \text{et alors} \quad ab = 0.$$

Dans tous les cas, on doit avoir $ab = 0$. Et alors si $a = 0$ et $c \leq a + b = b$:

$$Q = b - c,$$

il faut que $c = b$. Si $b = 0$, $c = a$.

En se reportant à (44 *bis*), on voit que, pour que C_n soit nul, il faut que

$$z_n = x_n \quad \text{ou} \quad y_n$$

et alors, si $z_n = x_n$,

$$b = |y_n - z_n| = |x_n - y_n| = c.$$

En résumé *pour que z soit sur le « segment » xy, il faut et il suffit, quel que soit n, que*

$$z_n = x_n \quad \text{ou} \quad y_n.$$

Cherchons maintenant s'il y a un centre de gravité, γ, du système Z. Celui-ci doit d'abord, être un « segment » x, y. En outre, il doit vérifier la condition

$$(y, \gamma) = p(x, y). \tag{45}$$

Or γ doit être tel que ses coordonnées soient

$$\gamma_n = x_n \quad \text{ou} \quad y_n. \tag{46}$$

Il n'est pas évident que, pour p donné, il existe de tels γ_n pour lesquels (45) soit vérifié. Mais puisque nous cherchons seulement un exemple, nous pouvons procéder à l'inverse. Prenant des γ_n quelconques vérifiant (46); (y, γ) et (x, y) sont donnés et en nous plaçant dans le cas général où $(x, y) \neq 0$, cette relation (45) détermine p.

Ainsi, étant donnés x et y, $(x \neq y)$ de E_ω, il existe toujours un élément γ de $\mathfrak{D}$ et un nombre p $(0 \leq p \leq 1)$, tels que γ soit un centre de gravité du système Z constitué des éléments x et y affectées des coefficients p et $q = 1 - p$.

Pour simplifier les calculs ultérieurs et puisqu'il s'agit, ici, seulement, d'un exemple, nous pouvons supposer

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad y_1 = y_2 = 1, \qquad x_n = y_n = 0 \qquad \text{pour} \quad n > 2.$$

Pour toute suite z de E_ω située sur le « segment » xy, on aura, d'après (46)

$$z_1 = 0 \quad \text{ou} \quad 1, \qquad z_2 = 0 \quad \text{ou} \quad 1, \qquad z_n = 0 \qquad \text{pour} \quad n > 2.$$

Ainsi, dans cet exemple, le « segment » $x\,y$ est constitué de *quatre* points.

Pour $z_1 = z_2 = 0$, on aurait $z = x$; pour $z_1 \equiv z_2 \equiv 1$ on aurait $z \equiv y$. Prenons pour centre de gravité γ, la suite, du type (46)

$$\gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = 1, \qquad \gamma_n = 0 \qquad \text{pour} \quad n > 2.$$

Il faudra que

$$(y, \gamma) = p(x, y)$$

ou

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2} \times 0 + 0 = p\left(\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1} + 0\right)$$

ou

$$\frac{1}{2} = p\,\frac{3}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad p = \frac{2}{3}.$$

Peut-il y avoir d'autre centre de gravité de Z que γ, soit γ', pour $p = \frac{1}{3}$?

γ' doit vérifier

$$(y, \gamma') = p(x, y) = (y, \gamma) = \frac{1}{2}.$$

Or γ' doit aussi appartenir au « segment » x, y, c'est-à-dire que :

ou bien $\gamma' = x$ et alors $(y, \gamma') = (x, y) = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$;

ou bien $\gamma' \equiv y$ et alors $(y, \gamma') = 0 \neq \frac{1}{2}$;
ou bien $\gamma' \equiv \gamma$;
ou bien γ' a pour coordonnées 1, 0, 0, ..., 0, ..., d'où

$$(y, \gamma') = \frac{0}{1+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1} + 0 = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}.$$

Donc $\gamma' \equiv \gamma$, il y a, pour $p = \frac{2}{3}$, *un centre de gravité*, γ, de X et *un seul*,

Cherchons maintenant s'il y a une moyenne (T) de Z. S'il y en avait une, ce serait un centre de gravité de Z, ce serait donc γ :

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad \ldots.$$

Il s'agit donc de savoir si

$$(47) \qquad (\gamma, a) \leq p(x, a) + q(y, a)$$

quelle que soit la suite a :

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots.$$

On devrait avoir

$$(48) \qquad \frac{|a_1|}{1+|a_1|} + \frac{1}{2}\frac{|a_2-1|}{1+|a_2-1|} + \sum_{n>2} \frac{1}{n!}\frac{|a_n|}{1+|a_n|} \leq \frac{2}{3}\sum_{n} \frac{1}{n!}\frac{|a_n|}{1+|a_n|}$$
$$+ \frac{1}{3}\left\{\frac{|a_1-1|}{1+|a_1-1|} + \frac{1}{2}\frac{|a_2-1|}{1+|a_2-1|} + \sum_{n>2} \frac{1}{n!}\frac{|a_n|}{1+|a_n|}\right\}.$$

Les termes correspondant à $n > 2$ s'équilibrent et peuvent être supprimés. Si l'on prend alors $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, l'inégalité (48) devient

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+1} + 0\right) + \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1}\right)$$

ou

$$\frac{3}{4} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \qquad \text{ou} \qquad 9 \leq 5.$$

Ainsi (47) n'est pas vérifié ; on a bien un exemple où Z *a un centre de gravité* (*et un seul*) *sans avoir de moyenne* (T).

Espaces des segments orientés. — Dans les raisonnements qui précèdent, nous avons été aidé par la structure classique des espaces de Banach.

C'est pourquoi nous voulons donner un exemple d'un espace distancié où chaque système Z' a un centre de gravité généralisé et un seul, *sans connaître autre chose* sur cet espace que l'ensemble de ses éléments et leurs distances mutuelles.

C'est un espace dont les éléments sont les segments rectilignes orientés (ou vecteurs). On peut y définir les distances de plusieurs façons assez naturelles, dont nous retiendrons deux.

Pour l'une, tout système Z′ a un « centre de gravité généralisé » et un seul. Pour l'autre, il en a généralement une infinité. Nous étudierons plus loin (p. 248), cette seconde définition.

PREMIÈRE FORME DE LA DISTANCE : ESPACE $\mathfrak{W}$. — La première définition, que nous allons examiner, donne pour « distance » de deux segments orientés $x = \overline{AB}$, $y = \overline{A'B'}$,

$$(x, y) \equiv (\overline{AB}, \overline{A'B'}) = \sqrt{AA'^2 + BB'^2}. \tag{49}$$

Désignons par $\mathfrak{W}$ l'espace distancié correspondant à cette définition.

ISOMÉTRIE. — Soient ξ, η, φ les coordonnées de A, ..., μ', ν', ρ' celles de B′. On a

$$(x, y) = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\varphi - \varphi')^2 + (\mu - \mu')^2 + (\nu - \nu)^2 + (\rho - \rho')^2}.$$

Si l'on fait correspondre aux segments orientés $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, les deux points de l'espace cartésien R_6 à six dimensions, de coordonnées rectangulaires respectives ξ, η, φ, μ, ν, ρ et ξ', η', φ', μ', ν', ρ', on voit qu'on réalisera une correspondance isométrique (c'est-à-dire conservant les distances) entre les éléments de l'espace $\mathfrak{W}$ et les points de l'espace cartésien R_6.

CONSÉQUENCES. — Le centre de gravité généralisé, la norme, la somme, le produit par scalaire, dont les définitions dans R_6 sont bien connues, correspondront exactement aux éléments de même nom mais relevant de nos propres définitions dans l'espace $\mathfrak{W}$.

Il y aura donc un centre de gravité généralisé et un seul d'un système Z′ dans $\mathfrak{W}$.

Ce sera, pour R_6, le point de coordonnées

$$\lambda\xi + (1 - \lambda)\xi', \quad \ldots, \quad \lambda\rho + (1 - \lambda)\rho', \quad \ldots.$$

Ce sera, par suite, pour $\mathfrak{W}$, le segment orienté $\gamma \equiv \overline{A''B''}$ où A″ est sur AA′, B″ sur BB′, où x, y, γ sont parallèles à un même plan et où

$$|\lambda|\,AA'' = |\lambda - 1|\,A'A'', \qquad |\lambda|\,BB'' = |\lambda - 1|\,B'B''.$$

Appliquons nos définitions de la page 230. En utilisant l'isométrie entre $\mathfrak{W}$ et R_6, on a immédiatement les résultats suivants :

En prenant pour θ un vecteur orienté *réduit à l'origine* O, on aura pour la *norme*

$$|| AB || = \sqrt{OA^2 + OB^2}$$

Le *produit par scalaire* $\lambda . x \equiv \lambda . \overline{AB}$ sera l'homothétique de $\overline{AB}$ par rapport à O dans le rapport λ.

Enfin la somme de $x \equiv \overline{AB'}$ et $y \equiv \overline{A'B'}$ sera le vecteur $s \equiv \overline{A_1 B_1}$, où $\overline{OA_1}$ est la résultante de $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ et où $\overline{OB_1}$ est la résultante de $\overline{OB}$ et de $\overline{OB'}$.

L'espace R_6 est évidemment un espace vectoriel distancié (et même un espace de Banach). On en conclut facilement que l'espace $\mathfrak{W}$ est aussi un espace de Banach.

Grâce à l'isométrie mentionnée ci-dessus, ces résultats sont si évidents qu'il vaudrait à peine de les énoncer si ce n'est qu'ils mettront mieux en évidence l'altération apportée quand on modifie la définition de la distance (49) dans $\mathfrak{W}$ pour arriver à l'espace $\mathfrak{E}$ que nous allons étudier.

Deuxième forme de la distance : Espace $\mathfrak{E}$. — Considérons, comme à la page 246, un espace $\mathfrak{E}$ dont les éléments sont les segments orientés ($x \equiv \overline{AB}$, $y \equiv \overline{A'B'}$, ...) appartenant à l'espace euclidien R_3. Mais adoptons-y une définition de la distance différente de celle de la page 247.

Ce sera une définition qui sera l'application au cas particulier des segments orientés, de la définition générale de la distance de deux courbes de Jordan, que nous avions indiquée, il y a plus de cinquante ans (6).

On prend pour distance (x, y), *la plus grande des longueurs des segments* AA', BB'. Il est facile de s'assurer que cette définition vérifie bien les conditions 1°, 2°, 3° de la note de la page 224.

Bien qu'elle soit distincte, comme on va le voir, de la définition de la page 247 et qu'elle conduise à certains résultats différents, on notera qu'elle définit un espace distancié $\mathfrak{E}$, qui a évidemment *la même topologie* que celle de l'espace $\mathfrak{W}$ de la page 247. On obtiendra même (p. 253) un résultat plus précis.

Soit maintenant Z le système formé de ces deux segments orientés $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ affectés respectivement des « poids » p et q ($p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$).

Cherchons d'abord à déterminer le « segment » $x\,y$, c'est-à-dire le lieu des vecteurs $\gamma \equiv A_1 B''$ tels que

$$(x, \gamma) + (\gamma, y) = (x, y),$$

(x, y) est la plus grande des longueurs AA', BB'. Supposons, par exemple, $AA' \leq BB'$. On a

$$BB'' \leq (x, \gamma), \qquad B'B'' \leq (y, \gamma), \tag{50}$$

d'où

$$(x, y) = BB' \leq BB'' + B''B' \leq (x, \gamma) + (\gamma, y) = (x.\ y).$$

D'où

$$BB'' + B''B' = (x, y) = BB'.$$

Ainsi B'' est sur le segment BB', entre B et B'. D'autre part

$$0 = (x, y) - BB'' - B''B' = [(x, \gamma) - BB''] + [(y, \gamma) - B'B''].$$

(6) *Voir*, par exemple, notre Ouvrage, *Les espaces abstrais*, p. 154.

Les deux crochets, d'après (50) sont ≥ 0, ils sont donc nuls. Ainsi

$$BB'' = (x, \gamma), \qquad B'B'' = (y, \gamma), \tag{51}$$

avec

$$AA'' \leq (x, \gamma), \qquad A'A'' \leq (y, \gamma). \tag{51 bis}$$

Inversement, x, y étant donnés, choisissons deux nombres a, a' tels que

$$a \geq 0, \ a' \geq 0, \qquad a + a' = (x, y), \tag{52}$$

Il y aura sur BB′ un point B_1 et un seul, tel que

$$BB_1 = a, \qquad B'B_1 = a'.$$

Puisque $AA' \leq BB'$, il y aura au moins un point A_2 commun aux deux sphères de centres A, A′ et de rayons respectifs a, a'.

Ou bien $|a - a'| \leq AA' \leq a + a'$ et A_2 sera n'importe quel point de la lentille L, intersection de ces deux sphères.

Ou bien $a - a' > AA'$ et A_2 sera n'importe quel point de la sphère de centre A′, rayon a', ou bien $a' - a > AA'$ et le lieu de A_2 sera la sphère de centre A, rayon a.

Tous les vecteurs A_2B, appartiendront quels que soient a, a' vérifiant (52) au « segment » xy et réciproquement.

Cherchons maintenant s'il y a un centre de gravité γ de Z. γ sera d'abord un, A″B″, des éléments A_1B'' du « segment » xy. Il sera tel, ensuite, que

$$p(x, \gamma) = q(y, \gamma). \tag{52}$$

D'où, d'après (51)

$$p\,BB'' = q\,B'B''.$$

Ainsi B″ est alors déterminé. C'est le point du vecteur donné BB′ qui divise ce vecteur dans le rapport de q à p. On a ainsi

$$(x, \gamma) = BB'' = q(x, y), \qquad (y, \gamma) = B'B'' = p(x, y),$$

B″ étant ainsi fixé, A_1 sera l'un des points vérifiant (51 *bis*).

Il y aura donc, en général, une infinité de centres de gravité de Z. Les cas exceptionnels où Z n'a qu'un centre de gravité sont les suivants :

Quand $AA' \geq |BB'' - B'B''| = |q - p|(x, y)$, la lentille L devra se réduire à un point A″ (appartenant à AA′) tel que

$$AA'' = BB_1, \qquad A'A'' = B'B_1,$$

d'où

$$AA' = BB'.$$

Quand $AA' < (q - p)(x, y)$, les éléments A_1 sont ceux de la sphère de centre A′, rayon $p(x, y)$ avec $(x, y) \neq 0$. S'ils se réduisent à un seul point, on

a $p=0$ et alors d'après (45), $\overline{A''B''}\equiv\overline{A'B'}$. Reste enfin le cas où $AA<(p-q)(x,y)$ et où $q=0$ et alors $\overline{A''B''}\equiv\overline{AB}$.

Passons au cas des centres de gravité généralisés.

Pour $\lambda>1$, on a vu que x doit être centre de gravité tout court du système des points y, γ affectés des coefficients $1-\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda}$.

Si $BB''\geq AA''$, alors B' sera sur le segment BB'' entre B et B'. Et l'on aura (p. 249)

$$AA'\leq BB' \qquad \text{et} \qquad A''A'\leq B''B'.$$

Si l'on avait $BB''<AA''$, on aurait $AA'>BB'$.

Donc, si, comme précédemment, on suppose

$$AA'\leq BB',$$

on aura

$$BB''\geq AA'$$

et B'' sera sur la droite donnée BB'. B'' sera bien déterminé, car

$$BB''=(x,\gamma), \qquad B'B''=(y,\gamma), \qquad BB'=(x,y),$$

d'où

$$BB''=|\lambda-1|BB', \qquad B'B''=|\lambda|BB'.$$

Alors

$$B'B''=BB''+BB',$$

B'' sera en dehors de BB' du côté de B.

Quant à A'' il sera tel que

$$AA''\leq BB'', \qquad AA'\leq BB'.$$

On aurait des résultats correspondants pour $\lambda<0$: B'' serait encore sur la droite BB' en dehors du segment BB', mais cette fois du côté de B', avec

$$BB''=(1-\lambda)BB', \qquad B'B''=(-\lambda)BB'.$$

On voit alors que quel que soit λ, B'' sera sur la droite illimitée BB' en un point bien déterminé tel que

$$BB''=|\lambda-1|BB', \qquad B'B''=|\lambda|BB'.$$

Le point A'' sera un point arbitraire dans la région commune aux deux sphères de centres A et A' et de rayons BB'' et B'B''.

Il y aura en général une infinité de points A'', donc de segments $\overline{A''B''}$; les cas exceptionnels sont ceux où $\lambda=0$ ou 1 ou celui où $x\equiv y$.

Dans le cas particulier où $\lambda=\frac{1}{2}$, $\overline{A''B''}$ est un « milieu extensif » du couple $x=\overline{AB}$, $y=A'B'$. D'après ce qui précède, si $BB'\geq AA'$, B'' sera le milieu du

segment rectiligne BB′ et A″ sera un point quelconque de AA′ tel que

$$AA'' \leqq BB'' \left[= \frac{BB'}{2} = \frac{(x, y)}{2} \right],$$
$$A'A'' \leqq B'B'' \left[= \frac{BB'}{2} = \frac{(x, y)}{2} \right].$$

Il y aura, en général, une infinité de positions possibles de A″ et par conséquent une infinité de « milieux extensifs » du couple x, y. Il n'y a exception que si $AA' = BB'$, cas où A″ est le milieu de AA′, comme B″ est le milieu de BB′.

Milieux (C). — Appliquons maintenant la définition de la page 235 pour chercher s'il existe un (ou plusieurs) « milieux (C) » du couple x, y (7).

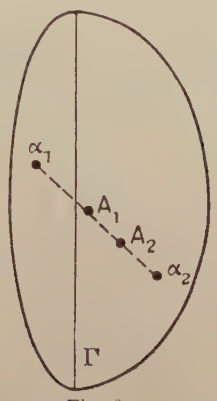


Fig. 6.

Pour cela, considérons deux des « milieux restreints » de x, y, savoir les segments orientés $\gamma_1 \equiv \overline{A_1 B''}$, $\gamma_2 \equiv \overline{A_2 B''}$, où B″ est le milieu de BB′ et où A_1 et A_2 sont seulement assujettis aux conditions

$$\left.\begin{matrix} AA_1 \\ A'A_1 \end{matrix}\right\} \leqq \frac{(x, y)}{2}, \qquad \left.\begin{matrix} AA_2 \\ A'A_2 \end{matrix}\right\} \leqq \frac{(x, y)}{2};$$

A_1, A_2 appartiennent à une lentille, L, formée de deux portions de surfaces sphériques égales, limitées à un cercle Γ ayant pour centre le milieu A″ de AA′ et pour axe AA′.

Soit maintenant, Σ_{γ_2}, le sphéroïde de l'espace $\mathfrak{E}$ ayant pour centre γ_2, pour rayon, ρ, et contenant tous les « milieux restreints » de x, y tels que γ_1. On devra avoir

$$(\gamma_1, \gamma_2) \leqq \rho$$

ou, puisque B″ est extrémité de γ_1 et γ_2 :

$$A_1 A_2 \leqq \rho.$$

(7) Nous laissons au lecteur le soin de voir que dans l'espace $\mathfrak{E}$ comme dans l'espace $\mathfrak{L}$ de la page 240, la définition de la moyenne (C) n'est pas satisfaisante pour $p \neq q$.

On peut prendre pour ρ, le maximum de A_1A_2 quand A_1 parcourt L. Soient α_1, α_2 les intersections de la droite A_1A_2 avec la surface de L (*fig.* 6). A_1A_2 est au plus égal au plus grand des segments α_1A_2, α_2A_2. On peut donc se borner au cas où A_1 est sur la surface de L. Quand A_1 se déplace sur cette surface, le maximum de A_1A_2 a lieu quand A_1 est sur le cercle Γ. Soient β_1, β_2 (*fig.* 7), les

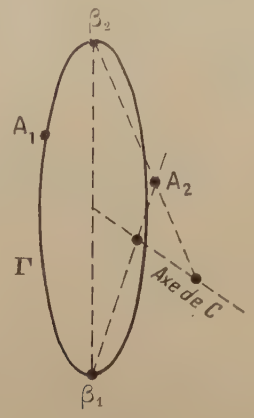


Fig. 7.

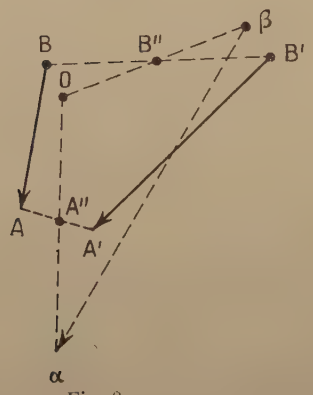


Fig. 8.

intersections de ce cercle avec le plan passant par l'axe de Γ et par A_2. Le maximum de A_1A_2, quand A_1 varie sur Γ, est au moins égal au plus grand des segments $A_2\beta_1$, $A_2\beta_2$. Soit R le rayon de Γ. On a

$$A_2\beta_1 + A_2\beta_2 \geqq 2R.$$

Donc $A_2\beta_1$ et $A_2\beta_2$ ne peuvent être tous deux $< R$. Dès lors le maximum de A_1A_2 est $\geqq R$. D'où $\rho \geqq R$. Or, quand A_2 est au centre A'' de Γ, le maximum de A_1A_2 est évidemment R. Et quand A_2 n'est pas en A'', le plus grand des segments $A_2\beta_1$, $A_2\beta_2$ est, d'après ce qui précède, supérieur et non égal à R. Donc le minimum de ρ n'est atteint que quand A_2 est en A'', milieu de AA'. Finalement, *il y a un milieu* (C) *de* x, y *et un seul*, à savoir le segment orienté $\overline{A''B''}$ *qui joint les milieux de* AA' *et de* BB'.

Appliquons maintenant les définitions de la page 232 à l'espace distancié $\mathfrak{E}$ mais en y remplaçant les centres de gravité par les milieux (C).

Au lieu de prendre pour élément neutre un élément quelconque de $\mathfrak{E}$, il sera plus commode de prendre comme élément neutre 0, un vecteur de $\mathfrak{E}$ réduit à un point O quelconque que nous appellerons l'origine.

Alors la norme $\| x \|$ de $x \equiv \overline{AB}$ sera

$$\| x \| = (0, \overline{AB}) = \text{Max} \begin{cases} OA \\ OB \end{cases}.$$

Si $A''B''$ est le milieu (C) de x et $y \equiv \overline{A'B'}$, la somme $s \equiv \alpha\beta$, si elle existe doit être telle que $\overline{A''B''}$ soit le milieu (C) de 0 et de s. Donc A'', milieu de AA', doit être aussi le milieu de $O\alpha$ (*fig.* 8), c'est-à-dire que $\overline{O\alpha}$ *doit être la résultante de* $\overline{OA}$ *et de* $\overline{OA'}$. De même $\overline{O\beta}$ doit être la résultante de $\overline{OB}$ et $\overline{OB'}$.

(Au moment de corriger les épreuves, nous venons de démontrer que, dans l'espace $\mathfrak{E}$, tout système Z, a une moyenne (T) et une seule, la même que dans l'espace $\mathfrak{W}$, p. 247).

COMPLÉMENT.

Différentes sortes de moyenne dans un espace distancié.

RÉSUMÉ.

Pour les probabilistes, nous allons répéter, en langage des probabilités, une partie de ce qui précède.

On rappelle notre définition de la moyenne d'un élément aléatoire dans un espace distancié quelconque. On opère ensuite deux sélections successives parmi les moyennes possibles (qu'on qualifie, dans la suite, de moyenne extensive). On définit ainsi d'abord les « centres de gravité » puis on rappelle et étudie ensuite les « moyennes (T) » de Shafik Doss.

Le tout est fait en se restreignant au seul cas utile pour ce qui précède où l'élément aléatoire n'a que deux positions possibles.

Rappel. — Nous avons précédemment défini (8) comme la moyenne $\beta \equiv \overline{X}$ d'un élément aléatoire X appartenant à un espace distancié, $\mathcal{D}$ (appelé souvent espace métrique) tout élément β de $\mathcal{D}$ — s'il en existe — tel que la moyenne $\mathfrak{M}(X, a)^2$ du carré de la distance de X à un élément certain a de $\mathcal{D}$, atteigne son minimum pour $a \equiv \beta$ (9).

---

(8) *Les éléments aléatoires de nature quelconque* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 14, 1948, p. 215-310).

(9) Nous avons dans le même Mémoire, donné une définition de $\overline{X}$ quand $\mathfrak{M}(X, a)^2$ est infini. Cette définition était un peu plus générale, dans le cas où $\mathcal{D}$ est la droite, que la définition classique. On trouvera une modification de cette définition (qui la rend un peu moins simple, mais qui se réduit à la définition classique dans le cas où $\mathcal{D}$ est une droite, dans la Note B, p. 18, de notre Mémoire : *Sur diverses définitions de la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque* (*Giorn. Istituo Ital. degli Attuari*, Ire partie, anno IX, 1956, p. 1-15; IIe et IIIe parties, anno X, 1957, p. 1-37).

Cas de deux positions de X. — Afin de pouvoir dans ce qui précède utiliser ce Complément pour définir la somme $x+y$ et le produit scalaire $\lambda . x$, en termes de distance, il nous suffira de *nous limiter au cas* où X n'a dans $\mathcal{D}$ *que deux positions* possibles x et y (avec les probalilités p et q). On a

$$\sigma^2(a) \equiv \mathfrak{M}(X, a)^2 = p(x, a)^2 + q(y, a)^2$$

ou

$$\sigma^2(a) = pq[(x, a) + (y, a)]^2 + [p(x, a) - q(y, a)]^2, \tag{1}$$

d'où

$$\sigma^2(a) \geqq pq(x, y)^2. \tag{2}$$

Centre de gravité. — S'il existe un élément γ de $\mathcal{D}$, tel que

$$\sigma^2(\gamma) = pq(x, y)^2 \tag{3}$$

il sera, d'après (2), le plus représentatif possible.

Si un tel élément existe, on aura comme on l'a vu, p. 225

$$\begin{cases} (x, y) = (x, \gamma) + (\gamma, y), \\ p(x, \gamma) = q(y, \gamma). \end{cases} \tag{4}$$

Réciproquement, s'il existe un élément γ vérifiant (4), il vérifiera (3). D'ailleurs, le système (4) est équivalent au système

$$\begin{cases} (x, \gamma) = q(x, y), \\ (y, \gamma) = p(x. y). \end{cases} \tag{5}$$

On voit que dans le cas où $\mathcal{D}$ est une droite, γ serait le centre de gravité du système Z constitué des éléments x, y affectés des poids p, q. Pour rappeler ce cas, nous continuerons *à dire, dans le cas où $\mathcal{D}$ est un espace distancié quelconque,* que *s'il existe un élément γ de $\mathcal{D}$ vérifiant* (3) [ou (4) ou (5) qui sont des systèmes équivalents à (3)], γ est un *centre de gravité* du système Z.

Une moyenne β de X peut exister *sans que* X *ait un centre de gravité*, (p. 225).

Pour cette raison, nous préciserons la dénomination de β que nous appelerons à partir de maintenant, *moyenne extensive* de X.

Tout centre de gravité de X, est une moyenne extensive de X, mais nous avons vu, p. 225 que *l'inverse n'a pas nécessairement lieu.*

Ajoutons que *si* X *a au moins un centre de gravité* γ, *toute moyenne extensive de* X *sera aussi un centre de gravité* (distinct ou non de γ). Bien entendu si X n'a qu'un centre de gravité, soit, γ, il n'a aussi qu'une moyenne extensive, qui sera γ.

Nouvelle restriction. — Il existe des espaces distanciés assez simples tels l'espace $\mathfrak{T}$ de la page 238 pour lesquels Z a une infinité de centres de gravité, ce qui est gênant.

Dans le même esprit que ci-dessus, on peut introduire une nouvelle restric-

tion en remplaçant le centre de gravité de X par la moyenne (T) de X définie par Shafik Doss ([10]). Dans le cas particulier actuel, où X n'a que deux positions possibles, x et y dans $\mathcal{D}$, sa définition s'exprime ainsi :

S'il existe un élément δ *de* $\mathcal{D}$ *tel que*

$$(\delta, a) \leq p(x, a) + q(y, a)$$

quel que soit l'élément certain a de $\mathcal{D}$, δ *sera une moyenne* (T) *de* X.

Or, on peut prouver (p. 225) *que s'il existe une telle moyenne* (T) *de* X, *c'est aussi un centre de gravité de* X.

Mais la réciproque n'est pas vraie, *un centre de gravité de* Z *n'est pas nécessairement une moyenne* (T) *de* Z, comme le montre l'exemple de l'espace E_0 de la page 243.

([10]) *Sur la moyenne d'un élément aléatoire « dans un espace distancié »* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 73, 1949, p. 1-26).

SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

DES

ESPACES FIBRÉS

PAR M. ANDRÉ ARAGNOL.

INTRODUCTION.

L'objet de ce travail est l'étude de certains espaces fibrés ou faisceaux associés à un espace fibré principal différentiable (1) $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de base $\mathcal{X}$ et de groupe G. Le premier de ces espaces est le quotient $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ de $G \times \mathcal{E}$ par la relation d'équivalence

$$(s, y) \equiv (\mathrm{Int}\,(g^{-1})\,s, y.s) \qquad (y \in \mathcal{E} \text{ et } s, g \in G).$$

C'est un espace fibré à fibre-groupe qui opère à gauche sur $\mathcal{E}$ et que nous appellerons *espace structural gauche* de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Le deuxième est l'espace fibré $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$ des formes tensorielles de type adjoint sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. C'est un espace gradué

$$\mathfrak{L}(\mathcal{E}) = \bigcup_p \mathfrak{L}^p(\mathcal{E})$$

et les fibres de $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$ s'identifient aux algèbres de Lie des fibres de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ qui opère donc sur $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$ par l'intermédiaire de la représentation adjointe. Pour abréger, $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$ sera appelé l'*espace de Lie* de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. L'étude de ces deux espaces est complétée par celle du *faisceau des connexions* C(E) de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, faisceau dont les sections globales sont les connexions infinitésimales sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ invariantes par les translations à droite. C(E) est étroitement lié à L(E) [faisceau des sections différentiables de $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$], d'abord parce que $L^1(E)$ opère sur C(E) de façon simplement transitive, ensuite parce qu'à toute

(1) Dans la suite, « différentiable » signifiera toujours « de classe C^∞ ».

connexion ω est associé un opérateur de différentiation covariante sur $L(E)$ et une section de $L^2(E)$ qui n'est autre que la courbure $\Omega(\omega)$ de ω.

Les problèmes que nous abordons dans cette thèse concernent, en gros, l'équivalence de l'espace fibré $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ d'une part, et de l'ensemble des espaces $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, $C(E)$, d'autre part, ou, ce qui revient à peu près au même, compte tenu des structures énoncées ci-dessus, l'équivalence de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ muni de l'opérateur de différentiation covariante Δ et de la courbure associés à une connexion ω, c'est-à-dire à une section de $C(E)$. Plus précisément, nous examinerons, parallèlement aux théorèmes de Lie, les questions suivantes :

A. L'espace structural gauche, l'espace de Lie, le faisceau des connexions d'un sous-espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ ($\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ et $G_1 \subset G$) de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ s'identifient à des sous-espaces (en un sens qui sera précisé) $\mathfrak{M}_1$, $\mathcal{L}_1$, C_1 de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, $C(E)$. Il en résulte que le faisceau L_1 des sections différentiables de $\mathcal{L}_1$ est stable pour la différentiation covariante associée à une section ω de C_1 et que $\Omega(\omega)$ est une section de L_1^2. Inversement, à partir d'une connexion ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et d'un sous-espace $\mathcal{L}_1$ de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ stable pour la différentiation covariante associée à ω et contenant la courbure $\Omega(\omega)$, peut-on remonter à un sous-espace de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$?

B. Étant donnés deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ de base commune $\mathcal{X}$, tout couple d'homomorphismes compatibles

$$\begin{array}{ll} h : & \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \\ \varphi : & G \to G' \end{array} \qquad [h(y.s) = h(y).\varphi(s),\ y \in \mathcal{E},\ s \in G],$$

détermine des homomorphismes

$$\begin{aligned} \varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} &: \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}'), \\ \varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} &: \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}'(\mathcal{E}'), \\ \varphi^h_{C(E)} &: C(E) \to C'(E') \end{aligned}$$

de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dans celui de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, de l'espace de Lie de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dans l'espace de Lie de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ et du faisceau des connexions de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dans le faisceau des connexions de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$. Si Δ est la différentiation covariante associée à une connexion ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et si Δ' est associée à $\omega' = \varphi^h_{C(E)}(\omega)$, on a

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta' \circ \varphi^h_{L(E)} = \varphi^h_{L(E)} \circ \Delta, \\ \Omega(\omega') = \varphi^h_{L(E)}(\Omega(\omega)). \end{cases}$$

Réciproquement, si les espaces structuraux gauches de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ sont liés par un homomorphisme

$$\psi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$$

auquel est associé l'homomorphisme

$$\psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

de leurs espaces de Lie, et si les différentiations covariantes et les courbures associées à deux connexions définies sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ respectivement, se correspondent par $\psi_{L(E)}$, est-il possible de trouver un couple d'homomorphismes compatibles (φ, h) tels que

$$(2) \qquad \varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \psi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}, \qquad \varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} = \psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}, \qquad \varphi^h_{\mathfrak{C}(E)}(\omega) = \omega' \quad ?$$

C. Soit $\tilde{\mathcal{E}}^0$ un espace fibré différentiable de base $\mathcal{X}$, à fibre-algèbre de Lie. Notons $\tilde{\mathcal{E}}$ l'espace fibré des formes différentielles sur $\mathcal{X}$ à valeurs dans $\tilde{\mathcal{E}}^0$. Si le faisceau $\tilde{L}$ des sections différentiables de $\tilde{\mathcal{E}}$ est muni d'un opérateur $\tilde{\Delta}$ satisfaisant aux principales règles de différentiations covariantes et si $\tilde{\Delta}$ est lié à une section $\tilde{\Omega}$ de $\tilde{L}^2$ par

$$\tilde{\Delta}\tilde{\Omega} = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Delta}^2 0 = [\tilde{\Omega}, 0] \qquad (0 \in \tilde{L}),$$

nous dirons qu'un espace fibré principal admet $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ si son espace de Lie s'identifie à $\tilde{\mathcal{E}}$ et s'il possède une connexion ω dont la différentiation covariante et la courbure coïncident avec $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Omega}$. Le problème qui se pose est donc un problème d'existence : existe-t-il un espace fibré principal de groupe donné admettant $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$?

Cette thèse se divise donc en deux parties : l'étude des techniques utilisées occupe les chapitres I à IV inclus, leur application aux problèmes A, B, C est l'objet des chapitres suivants.

Le premier chapitre est consacré à la notion très générale de « modelage » qui n'est que la généralisation de la relation d'équivalence utilisée pour définir l'espace structural gauche $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, et qui permet, dès qu'on dispose d'un espace fibré (en un sens très large) M à fibres-groupes opérant sur d'autres espaces fibrés E, L, L', etc., de définir lorsque M est simplement transitif sur E, des « modelés » L(E), L'(E), etc., associés à E. Moyennant certaines conditions générales, toutes les structures existant entre L, L', etc., se retrouvent entre L(E), L'(E) etc. Cette notion, appliquée à la géométrie différentielle des espaces fibrés permet de ramener l'étude des propriétés classiques des connexions infinitésimales, différentiations covariantes, etc., à la vérification de conditions de compatibilité et à la démonstration de ces propriétés dans le cas d'espaces triviaux.

C'est dans cet esprit que les chapitres II et III (²) reprennent la théorie des

(²) Ces deux chapitres sont consacrés en grande partie à exposer, d'une façon nouvelle, croyons-nous, des résultats classiques. Leur lecture détaillée n'est donc pas indispensable pour la suite. Il est néanmoins nécessaire de lire le paragraphe III.1 ainsi que les résultats relatifs aux couples d'homomorphismes (φ, h).

espaces fibrés différentiables à fibre vectorielle, des connexions et des différentiations covariantes, de façon aussi globale que possible. On met en évidence le rôle de l'espace fibré des repères de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$, noté $\mathcal{R}$, et l'on définit des homomorphismes adjoints, de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$ d'abord, mais aussi de l'espace structural gauche, de l'espace de Lie et du faisceau des connexions de $\mathcal{E}$ dans les espaces correspondants associés à $\mathcal{R}$. Le faisceau des connexions qui s'identifie, bien entendu, au faisceau des sections différentiables de l'espace fibré des connexions, est l'objet d'une définition directe. On montre ainsi que le faisceau M(E) des sections différentiables de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ opère sur C(E) et l'on est directement conduit à la notion de faisceau d'invariance d'une connexion et à celle de faisceau des connexions réduites.

La théorie de l'holonomie est reprise dans le chapitre IV. Un lacet en x définit un élément m de la fibre $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$ de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Le groupe d'holonomie en x apparaît donc comme un sous-groupe de $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$. L'étude des opérations de M(E) sur C(E), comparée à celles de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{E}$, permet de montrer que le faisceau d'invariance d'une connexion est étroitement lié aux groupes d'holonomie locale de cette connexion. Enfin, on trouvera certains résultats valables lorsque G est abélien, ou relatifs aux rapports existant entre les opérations du centre de M(E) sur C(E) et les formes différentielles sur $\mathcal{X}$, à valeurs dans le centre de l'algèbre de Lie de G; ces résultats seront utilisés par la suite,

C'est la résolution du problème A qui occupe le chapitre suivant. On y introduit la notion *du champ normal* associé à une connexion et à un sous-espace $\mathcal{L}_1$ de l'espace de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Le résultat essentiel est le théorème V.4.1 qui fixe les conditions d'intégrabilité d'un champ normal. Ce théorème permet de construire un sous-espace fibré principal correspondant à un sous-espace $\mathcal{L}_1$ lorsque ce dernier contient la courbure d'une connexion ω et lorsque le faisceau L_1, déduit de $\mathcal{L}_1$, est stable pour la différentiation covariante associée à ω. Le sous-espace fibré en question est alors une variété intégrale du champ normal correspondant à $\mathcal{L}_1$ et à ω. Comme application de ce résultat, on retrouve le théorème d'Ambrose sur le groupes d'holonomie,

Les chapitres VI et VII sont consacrés à la résolution du problème B. On montre d'abord, d'une façon tout à fait générale, que si les couples (φ, h) et (ψ, g) déterminent les mêmes homomorphismes, c'est-à-dire, si

$$\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \psi^g_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}, \qquad \varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} = \psi^g_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}, \qquad \varphi^h_{C(E)} = \psi^g_{C(E)},$$

on passe de φ à ψ par un automorphisme intérieur $\mathrm{Int}(s^{-1})$ et de h à g par la translation à droite D_s sur $\mathcal{E}'$. Mais ensuite, le cas simplement connexe et le cas général sont traités séparément, bien que la résolution du premier soit une conséquence du second. Si $\mathcal{X}$ est simplement connexe, on donne une démonstration directe de l'existence d'un couple d'homomorphismes remplissant les condi-

tions (2). Dans le cas général, on commence par construire un couple d'homomorphismes compatibles liant $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ au quotient $\mathfrak{E}'_\gamma(\mathfrak{X}, G'_\gamma)$ de $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, G')$ par le centre H' de G' (on suppose G et G' connexes). En même temps, on détermine le premier des homomorphismes (φ, h) cherchés, c'est-à-dire $\varphi : G \to G'$. On passe ensuite à la recherche des conditions d'existence de h. Ces conditions se présentent sous la forme d'un homomorphisme χ' du premier groupe d'homologie de $\mathfrak{X}$, à coefficients entiers, dans H'. Pour que h existe, il faut et il suffit que χ' soit trivial. En fin de chapitre, on cherche s'il n'est pas possible, dans certains cas, de résoudre le problème en utilisant une connexion différente de ω'. Divers résultats sont obtenus lorsque l'image du premier groupe d'homologie, par χ', est un sous-groupe de la composante connexe de l'élément neutre dans H'. Le cas le plus intéressant est alors celui où la variété $\mathfrak{X}$ est compacte.

L'existence d'un espace fibré principal différentiable de groupe donné G admettant $(\tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ est traitée au chapitre VIII. On commence par fixer les axiomes auxquels doivent satisfaire $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Omega}$. On s'occupe ensuite du cas où le centre de $\tilde{\mathfrak{L}}$ se réduit à o et, plus généralement de celui du quotient de $\tilde{\mathfrak{L}}$ par son centre. La construction de l'espace fibré principal s'inspire alors du cas correspondant de la théorie des groupes de Lie : on le détermine comme variété intégrale d'un champ normal défini dans l'espace des repères de $\tilde{\mathfrak{L}}^0$. Dans le cas général (en supposant cependant $\mathfrak{X}$ simplement connexe), le problème n'admet pas toujours une solution. On donne cependant une condition nécessaire et suffisante d'existence qui se présente sous la forme d'un homomorphisme appliquant le deuxième groupe d'homologie de $\mathfrak{X}$ à coefficients entiers dans le centre H de G. Pour que $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ admettant $(\tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ existe, il faut et il suffit que cet homomorphisme soit trivial. S'il n'en est pas ainsi, il est parfois possible de modifier G ou $\tilde{\Omega}$ pour se ramener à un cas résoluble.

Le dernier chapitre est consacré à quelques applications. En particulier, en cherchant à construire un espace fibré principal $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ admettant $(\tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Delta})$ lorsque G est simplement connexe, on est conduit à la notion d'espace fibré principal maximal. Un tel espace (dont le groupe n'est pas nécessairement simplement connexe) possède les propriétés suivantes :

a. S'il existe un espace fibré principal admettant $(\tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ il existe aussi un espace fibré maximal admettant $(\tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ et ce dernier est un revêtement du premier.

b. L'espace fibré maximal admettant $(\tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ est unique [à un couple (φ, h) près]. Plus généralement, si $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ est maximal, le problème B peut être résolu à partir de la donnée du *seul* homomorphisme $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathfrak{E})}$ vérifiant (1).

Dans le même chapitre, on définit aussi divers types de classes caractéris-

tiques ([3]) et l'on généralise les notions de connexion et de transport parallèle au cas d'un espace fibré principal différentiable à « espace structural » (au sens du chapitre : I). La totale symétrie existant entre l'espace structural (ou espace structural droit) et l'espace structural « gauche » apparaît alors complètement. Il y a même lieu de distinguer un espace de Lie à droite et un espace de Lie à gauche, une courbure à droite et une courbure à gauche, etc.

La plupart des chapitres sont précédés d'introductions auxquelles on se référera pour plus de détails. Signalons aussi que ces résultats ont été annoncés d'une façon généralement schématique et légèrement optimiste par endroits dans cinq Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [1], [2], [3], [4], [5].

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à M. Lichnerowicz dont les conseils m'ont toujours été utiles et les encouragements, souvent nécessaires.

CHAPITRE I.

Espaces fibrés. Généralités.

1. Terminologie et notations. — Afin de donner toute leur généralité aux notions décrites dans ce chapitre, nous appellerons *espace fibré s. l.* (sens large), tout ensemble E muni d'une « projection » $p_E : E \to \mathfrak{X}$ de E sur un autre ensemble $\mathfrak{X}$ appelé base. L'expression « espace fibré » sera strictement réservée aux espaces localement triviaux, au sens qui sera précisé ci-dessous.

La projection d'un espace fibré s. l. sera notée, en général, par la lettre p munie, en indice, du symbole représentant l'espace en question. Cependant, lorsque aucune confusion ne sera possible ou lorsque la projection n'interviendra pas dans les raisonnements en cours en tant que fonction, on négligera l'indice. Par ailleurs, étant donné un sous-ensemble U de $\mathfrak{X}$, on posera toujours $E_U = p_E^{-1}(U)$.

On appelle *fibre* l'image réciproque d'un point quelconque de la base par la projection. S'il existe dans chaque fibre une structure algébrique d'un type déterminé, par exemple, de groupe ou d'algèbre de Lie, on dira que E est à fibres-groupes ou à fibres-algèbres de Lie, ou encore, que c'est un espace fibre de groupes ou d'algèbres de Lie.

On appelle *produit fibré* de deux espaces fibrés s. l. E et E′ de même base $\mathfrak{X}$, la partie du produit $E \times E'$ qui se projette sur la diagonale de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, identifiée à $\mathfrak{X}$. On notera $E \boxtimes E'$ ce produit fibré. Il est clair que c'est un espace fibré s. l. de base $\mathfrak{X}$.

([3]) L'une de ces classes, liée à l'existence de la forme $\tilde{\Omega}$, permet de résoudre le problème de l'extension d'un espace fibré principal différentiable.

Enfin, on dira qu'un espace fibré s. l. de groupes M opère sur un espace fibré E de même base lorsque chaque fibre M_x de $M(x \in X)$ opère sur la fibre correspondante E_x de E.

2. Espace fibré principal s. l. Modelage. — Un *espace fibré principal s. l.* $E(\mathfrak{X}, M)$ est défini par la donnée d'un espace fibré s. l. E de base $\mathfrak{X}$ et d'un espace fibré s. l. de groupes M, de même base, qui opère à droite sur E, M_x étant simplement transitif sur E_x, quel que soit $x \in \mathfrak{X}$. On dira que M est l'*espace structural droit* (ou simplement espace structural) de $E(\mathfrak{X}, M)$. On notera $y.m$ le transformé de $y \in E_x$ par $m \in M_x$ et l'application $y \to y.m$ sera la translation à droite correspondante, notée aussi $D_m : E_x \to E_x$.

Soit, d'autre part, L un espace fibré s. l. de base $\mathfrak{X}$ sur lequel M opère à *gauche*. On notera, $R(m)\,l$ le transformé de $l \in L_x$ par $m \in M_x$.

Soit L(E) le quotient de $E \boxtimes L$ par la relation d'équivalence suivante :

$$(y', l') \equiv (y, l) \qquad si \qquad p(y) = p(y') = p(l) = p(l')$$

et s'il existe $m \in M$ *tel que*

$$y' = y.m \qquad et \qquad l' = R(m^{-1})\,l \qquad [y, y' \in E \text{ et } l, l' \in L].$$

On dira que L(E) est obtenu en *modelant* L sur E, M opérant sur L par $R(m)$, ou encore que L(E) est l'espace associé à $E(\mathfrak{X}, M)$, de type $(L, R(m))$. Il est clair que L(E) est un espace fibré s. l. de base $\mathfrak{X}$. On notera α l'application canonique $\alpha : E \boxtimes L \to L(E)$.

3. L'application $i(y)$. — Étant donné $y \in E\,[p(y) = x]$, on définit une application biunivoque

$$i_L(y) : \quad L_x \to L_x(E)$$

en faisant correspondre à $l \in L_x$, la classe d'équivalence $\alpha\,(y, l) = i_L(y)\,l$ dont (y, l) fait partie. Cette application est bien biunivoque car, par définition, $(y, l) \equiv (y, l')$ implique $l = l'$. Elle est manifestement *sur*.

On pose $j_L(y) = (i_L(y))^{-1}$ et l'on vérifie facilement les formules

$$(I.3.1) \qquad \begin{cases} i_L(y.m)\,l = i_L(y)\,(R(m)\,l) & (l \in L), \\ j_L(y.m)\,\lambda = R(m^{-1})\,j_L(y)\,\lambda) & [\lambda \in L(E)]. \end{cases}$$

4. Sous-espaces et homomorphismes. — Un *sous-espace fibré s. l.* d'un espace fibré s. l. A est un sous-ensemble A' de A, muni de la projection induite et tel que $A' \cap A_x \neq \emptyset$ quel que soit $x \in \mathfrak{X}$. Si A est à fibres algébriques, on suppose que A'_x est, en outre, quel que soit $x \in \mathfrak{X}$, une sous-structure de A_x.

Un *homomorphisme* d'un espace fibré s. l. dans un autre espace fibré s. l. de même base est une application

$$\varphi_A : \quad A \to A'$$

du premier espace dans le second, telle que le diagramme

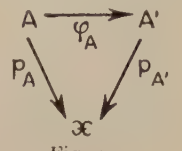


Fig. 1.

soit commutatif. Un homomorphisme d'espaces fibrés s. l. à fibres munies de structures algébriques est en outre, un homomorphisme de ces structures algébriques.

Dans ces conditions, en reprenant les notations du paragraphe 2, un *sous-espace fibré principal s. l.* de $E(\mathfrak{X}, M)$ est constitué par un couple de sous-espaces fibrés s. l. E' (de E) et M' (de M) tels que M'_x opérant sur E_x comme sous-groupe de M_x, soit simplement transitif sur $E'_x (x \in \mathfrak{X})$.

Étant donnés deux espaces fibrés principaux s. l. $E(\mathfrak{X}, M)$ et $E'(\mathfrak{X}, M')$, de même base, on dira que deux homomorphismes

$$\varphi_E : \quad E \to E' \qquad \text{et} \qquad \varphi_M : \quad M \to M'$$

sont *compatibles* si l'on a la relation

$$(I.4.1) \qquad \varphi_E(y.m) = \varphi_E(y).\varphi_M(m) \qquad (y \in E_x,\ m \in M_x,\ x \in \mathfrak{X}).$$

On dira alors que φ_E est un φ_M-*homomorphisme* et, si φ_M est l'identité, que φ_E est un M-*isomorphisme*.

Remarque. — Bien que, pour des raisons de simplicité, la terminologie ne soit fixée ici que pour des homomorphismes induisant l'identité sur $\mathfrak{X}$, on peut envisager des homomorphismes d'espaces fibrés de bases différentes, conservant les fibres et induisant une application d'une base dans l'autre. Ce sera le cas des *homomorphismes induits* (§ I.7) pour lesquels nous utiliserons le vocabulaire précédent.

Plus généralement, étant donnés deux espaces fibrés s. l. L et L′ sur lesquels M et M′ opèrent respectivement à gauche par R et R′, un homomorphisme $\varphi_L : L \to L'$ est compatible avec φ_M, si l'on a

$$(I.4.2) \qquad \varphi_L(R(m)\, l) = R'(\varphi_M(m))\, \varphi_L(l) \qquad (m \in M \text{ et } l \in L).$$

5. Conservation des structures par modelage. — On a les propositions suivantes :

Proposition I.5.1. — *Si* L *est un espace fibré s. l. de structures algébriques pour lesquelles les opérations de* M *sur* L *sont des automorphismes, la relation d'équivalence du paragraphe* 2 *est compatible avec les structures algébriques induites dans* $E \boxtimes L$ *et il existe dans* $L(E)$ *des structures-quotients pour lesquelles les applications* $i_L(y)$ *sont des isomorphismes.*

PROPOSITION I.5.2. — *Si* $\varphi_E : E \to E'$, $\varphi_M : M \to M'$ *et* $\varphi_L : L \to L'$ *sont des homomorphismes compatibles, il existe un homomorphisme*

$$\varphi_{L(E)} : \quad L(E) \to L'(E')$$

pour lequel on a

$$i_{L'}(\varphi_E(y))\,\varphi_L(l) = \varphi_{L(E)}(i_L(y)\,l) \qquad (l \in L_x,\ y \in E_x).$$

PROPOSITION I.5.3. — *Si* L_1 *est un espace fibré s. l. de groupes opérant à gauche (resp. à droite) sur* L_2 *et si* M *opère à gauche sur* L_1 *et* L_2 *avec la relation*

$$(R_1(m)\,l_1)\,(R_2(m)\,l_2) = R_2(m)\,l_1 l_2, \qquad (l_1 \in L_1,\ l_2 \in L_2,\ m \in M),$$

alors, $L_1(E)$ *est un espace fibré de groupes opérant à gauche (resp. à droite) sur* $L_2(E)$ *et l'on a*

$$(i_{L_1}(y)\,l_1)\,(i_{L_2}(y)\,l_2) = i_{L_2}(y)\,l_1 l_2.$$

Bien entendu, si les opérations de L_1 *sur* L_2 *sont des automorphismes des structures algébriques de* L_2, *il en est de même pour* $L_1(E)$ *et* $L_2(E)$.

6. ESPACE STRUCTURAL GAUCHE. — L'espace structural M de l'espace fibré principal s. l. $E(\mathfrak{X}, M)$ opérant sur lui-même par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs $[\mathrm{Int}(m)\,q = m\,q\,m^{-1}]$, on peut modeler M sur E et obtenir ainsi, conformément à la proposition I.5.1, un espace fibré s. l. de groupes noté M(E) et appelé *espace stuctural gauche* de $E(\mathfrak{X}, M)$. Les formules (I.3.1) s'écrivent dans ce cas :

$$(1.6.1) \qquad \begin{cases} i_M(y.m)\,q = i_M(y)\,mqm^{-1} & (y \in E,\ m,\ q \in M), \\ j_M(y.m)\,\mu = m^{-1}(j_M(y)\,\mu)\,m & [\mu \in M(E)]. \end{cases}$$

D'autre part, M opère à gauche sur l'espace fibré s. l. W, sous-jacent à M. Nous allons voir que W(E) *est isomorphe à* E.

En effet, soit e_x l'élément neutre de M_x. Considérons l'application

$$f' : \quad E \to E \boxtimes W$$

définie par $f'(y) = (y, e_x)$, puis l'application $f = \alpha \circ f'$. Toute classe d'équivalence $u \in W(E)$ admet un représentant et un seul du type (y, e_x). En effet, soit (y, m) un représentant quelconque de u, on a bien $(y', e_x) \equiv (y, m)$ pour $y' = y.m$. Comme, d'autre part, pour que $(y', e_x) \equiv (y, e_x)$ il faut et il suffit que $y = y'$, on voit que f est une application biunivoque de E *sur* W(E.) Comme elle conserve les fibres, c'est un isomorphisme. De la proposition I.5.3 dont les hypothèses sont vérifiées, on déduit alors que M(E) opère à gauche sur W(E) et que $M_x(E)$ est simplement transitif sur $W_x(E)$. En identifiant W(E) et E par f, on peut donc énoncer :

PROPOSITION I.6.1. — M(E) *opère à gauche sur* E *et* $M_x(E)$ *est simplement transitif sur* E_x *quel que soit* $x \in \mathfrak{X}$.

Ces opérations seront notées $\mu.y\,[\mu\in M(E), y\in E_x]$ et on les appellera *translations à gauche* de $M(E)$ sur E. On notera $G_\mu : E_x \to E_x$ l'application définie par $G_\mu(y) = \mu.y\,[\mu\in M_x(E), y\in E_x]$.

Proposition I.6.2.— *On a la formule*

$$\mu.y = y.(j_M(y)\,\mu) \qquad [\mu\in M(E), y\in E].$$

En effet, on a successivement :

$$\begin{aligned}\mu.y &= \mu.\alpha(y, e_x)\\ &= \alpha(y, (j_M(y)\,\mu)\,e_x)\\ &= \alpha(y.j_M(y)\,\mu, e_x)\\ &= f(y.j_M(y)\,\mu).\end{aligned}$$

Proposition I.6.3. — *Les opérations de* $M(E)$ *commutent avec celles de* M.

En effet, en utilisant le résultat précédent, on a successivement :

$$\begin{aligned}\mu.(y.m) &= (y.m).(j_M(y.m)\,\mu) \qquad [\mu\in M(E), m\in M]\\ &= (y.m).(m^{-1}(j_M(y)\,\mu)\,m)\\ &= y.(j_M(y)\,\mu)\,m\\ &= (y.j_M(y)\,\mu).m\\ &= (\mu.y).m.\end{aligned}$$

En outre, comme conséquence immédiate de la proposition I.5.3, on a :

Proposition I.6.4. — *Si* M *opère à gauche sur* L [*notation* $R(m)l$], $M(E)$ *opère également à gauche sur* $L(E)$ [*notation* $R(\mu)\lambda$]. *Si les opérations de* M *sont des automorphismes des structures algébriques de* L, *les opérations de* $M(E)$ *sont des automorphismes des structures algébriques de* $L(E)$.

Dans ces conditions, on est amené à remodeler $L(E)$ sur E par la relation d'équivalence $(y, \lambda)\equiv(\mu.y, R(\mu)\lambda)$. Soit L′ l'espace ainsi obtenu. On a alors les formules

$$\text{(I.6.2)}\qquad \begin{cases} i_{L(E)}(\mu.y)\,(R(\mu)\lambda) = i_{L(E)}(y)\,\lambda & [\lambda\in L(E)],\\ R(\mu^{-1})\,(j_{L(E)}(\mu.y)\,l) = j_{L(E)}(y)\,l & (l\in L')\end{cases}$$

et la proposition :

Proposition I.6.5. — L′ *est isomorphe à* L.

En effet, soit $h : E\boxtimes L(E) \to L$ l'application définie par

$$h(y, \lambda) = j_L(y)\,\lambda \qquad [\lambda\in L(E), y\in E].$$

On vérifie facilement que h est compatible avec la relation d'équivalence et que, une fois passée au quotient, elle est biunivoque.

Cette proposition permet d'identifier les applications $i_{L(E)}$ et j_L et les formules (I.6.2) entraînent les formules suivantes qu'on peut d'ailleurs vérifier directement :

$$\text{(I.6.3)} \qquad \begin{cases} j_L(\mu.y)\,(R(\mu)\,\lambda) = j_L(y)\,\lambda \\ R(\mu^{-1})\,(i_L(\mu.y)\,l) = i_L(y)\,l \end{cases} \qquad [y \in E,\ l \in L,\ \lambda \in L(E)].$$

En particulier, on retombe sur M en remodelant M(E) sur E, de sorte qu'en modelant sur E un espace admettant M(E) pour espace structural, on obtient un espace admettant M pour espace structural.

7. Espaces fibrés s. l. induits par une application. — Soit A un espace fibré s. l. de base $\mathfrak{X}$ et $\psi : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ une application d'un ensemble $\mathfrak{X}'$ dans $\mathfrak{X}$. Considérons le produit $B = \mathfrak{X}' \times A$ comme un espace fibré s. l. de base $\mathfrak{X}' \times \mathfrak{X}$, dont la projection est définie par

$$p_B(x', y) = (x', p_A(y)) \qquad (x' \in \mathfrak{X}' \text{ et } y \in A).$$

L'espace fibré s. l. induit par ψ est, par définition, la partie de B qui se projette sur le graphe de ψ, identifié à $\mathfrak{X}'$. Plus précisément, c'est l'ensemble des points (x', y) de B tels que $p_A(y) = \psi(x')$. On le notera $\psi^{-1}(A)$.

Il existe alors une application $\psi_A^{\#} : \psi^{-1}(A) \to A$ définie par

$$\psi_A^{\#}(x', y) = y \qquad (x' \in \mathfrak{X}' \text{ et } y \in A),$$

qui applique biunivoquement chaque fibre de $\psi^{-1}(A)$ sur une fibre de A, plus précisément, $(\psi^{-1}(A))_{x'}$ sur $A_{\psi(x')}$, C'est l'*homomorphisme induit.*

Si A est un espace fibré s. l. de structures algébriques d'un type donné, $\psi^{-1}(A)$ est un espace fibré s. l. de structures algébriques de même type pour lesquelles $\psi_A^{\#}$ est un homomorphisme. Si M est un espace fibré s. l. à fibres-groupes opérant sur L(M et L de base $\mathfrak{X}$), $\psi^{-1}(M)$ opère sur $\psi^{-1}(L)$. Si $E(\mathfrak{X}, M)$ est un espace fibré principal s. l. et si M opère sur L, on peut modeler $\psi^{-1}(L)$ sur $\psi^{-1}(E)$ parce que, conformément à ce qui vient d'être dit, $\psi^{-1}(M)$ opère de façon simplement transitive sur $\psi^{-1}(E)$ dont il est l'espace structural droit et qu'il opère également sur $\psi^{-1}(L)$. On vérifie facilement :

Proposition I.7.1. — $\psi^{-1}(L(E))$ *est isomorphe à* $\psi^{-1}(L)(\psi^{-1}(E))$.

Précisons maintenant quelques conventions que nous utiliserons constamment par la suite :

$M \Rightarrow E$ signifiera que M opère sur E de façon simplement transitive ;

$M \to L$ signifiera que M opère sur L (éventuellement $M \xrightarrow{R(m)} L$ pour préciser les notations) ;

$A \to A'$ représentera un homomorphisme et $A \Rightarrow A'$, un isomorphisme.

Dans ces conditions, on a le diagramme suivant qui est *compatible*, en ce sens que les homomorphismes $\psi^{\#}$ qui y figurent et les opérations des divers espaces M sur les espaces E ou L sont liés par les relations (I.7.1) et (I.7.2) ci-dessous, qu'on peut rapprocher de (I.4.1) et (I.4.2) (*voir* aussi la remarque du paragraphe (I.4) :

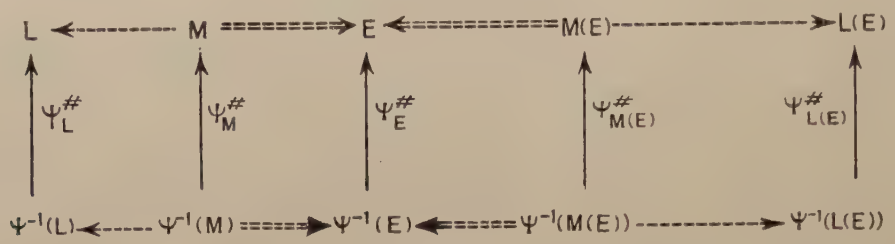


Fig. 2.

Formules de compatibilité :

$$(I.7.1)\qquad \begin{cases} \psi^{\#}_{E}(y.m) = \psi^{\#}_{E}(y).\psi^{\#}_{M}(m) & [m\in\psi^{-1}(M),\ y\in\psi^{-1}(E)], \\ \psi^{\#}_{E}(\mu.y) = \psi^{\#}_{M(E)}(\mu).\psi^{\#}_{E}(y) & [\mu\in\psi^{-1}(M(E))]; \end{cases}$$

$$(I.7.2)\qquad \begin{cases} \psi^{\#}_{L}(R(m)\,l) = R(\psi^{\#}_{M}(m))\,\psi^{\#}_{L}(l) & [l\in\psi^{-1}(L)], \\ \psi^{\#}_{L(E)}(R(\mu)\,\lambda) = R(\psi^{\#}_{M(E)}(\mu))\,\psi^{\#}_{L(E)}(\lambda) & [\lambda\in\psi^{-1}(L(E))]. \end{cases}$$

Enfin étant donnés une section $\sigma : U \to A$, c'est-à-dire une application d'un sous-ensemble U de $\mathfrak{X}$ dans A telle que $p_A \circ \sigma =$ identité, et un sous-ensemble V de $\mathfrak{X}'$ tel que $\psi(V) \subset U$, on dira que la restriction à $\psi^{-1}(A)$ de la section σ' de $\mathfrak{X}' \times A$ définie sur $V \times U$ par

$$\sigma'(x', x) = (x', \sigma(x)) \qquad (x' \in V \text{ et } x \in U)$$

est *la section induite sur* V *par* ψ *à partir de* σ. On la notera $\sigma^{\#}$. Elle est complètement définie par l'égalité

$$\psi^{\#}_{A}(\sigma^{\#}(x')) = \sigma(\psi(x')) \qquad (x' \in V).$$

8. Espaces fibrés différentiables. — Sous des hypothèses très larges, les notions précédentes s'étendent au cas où les espaces fibrés s. l. considérés sont des espaces topologiques et où les projections sont des applications continues : on applique alors aux topologies les opérations effectuées (topologie-quotient, induite, etc.). De plus, le modelage conserve certaines classes d'espaces fibrés, et, en précisant pour chacune de ces catégories les notions de sous-espaces, d'homomorphismes, etc., les résultats ci-dessous se transposent mot pour mot, à la substitution près des termes « espacé fibré s. l. » par ceux qui désignent la classe des fibres envisagée. C'est en particulier le cas des espaces fibrés différentiables et celui des faisceaux.

Un *espace fibré différentiable* est une variété différentiable $\mathfrak{A}$ qu'une projec-

tion $p_{\mathfrak{A}}$ applique sur une autre variété différentiable $\mathfrak{X}$ (base) de telle sorte que, quel que soit $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage U de x et un homéomorphisme différentiable

$$\psi_U : \quad A_U \to U \times F \qquad [p_{\mathfrak{A}}(\psi_U^{-1}(y, z)) = y, \; y \in U, \; z \in F]$$

de $\mathfrak{A}_U$ sur le produit de U par une fibre-type F. Pour pouvoir parler d'homéomorphisme différentiable, il est évidemment nécessaire de supposer en outre que F est une réunion de variétés différentiables. On remarquera que, comme $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{A}$ sont connexes par arcs, deux composantes connexes quelconques de F sont nécessairement différentiablement homéomorphes.

L'espace fibré différentiable $\mathfrak{A}$ est à fibre-groupe de Lie (resp. algèbre de Lie, vectorielle, etc.), si l'espace fibré s. l. sous-jacent est à fibres-groupes, si F est un groupe de Lie (resp. algèbre de Lie, espace vectoriel etc,), et si les ψ_U sont des *isomorphismes*.

Étant donnés deux espaces fibrés différentiables $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ de même base $\mathfrak{X}$, une application $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ est un *homomorphisme d'espaces fibrés différentiables* si, quel que soit $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert U de x, deux homéomorphismes différentiables ψ_U et ψ'_U et une application différentiable régulière $\mu : F \to F'$ de la fibre-type de $\mathfrak{A}$ dans celle de $\mathfrak{A}'$, tels que le diagramme

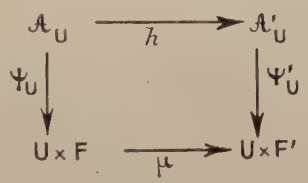


Fig. 3.

soit commutatif. Il en résulte évidemment que h est différentiable et régulière. Si les fibres de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ sont munies de stuctures algébriques de même type, on suppose de plus que h et μ sont des homomorphismes de ces structures.

Un sous-espace fibré s. l. $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ est un *sous-espace fibré différentiable* de $\mathfrak{A}$ si :

1° $\mathfrak{A}'$ est un espace fibré différentiable ;

2° l'inclusion $I : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ est un isomorphisme d'espaces fibrés différentiables.

Il en résulte que $\mathfrak{A}'$ est une sous-variété de $\mathfrak{A}$ et l'on remarquera que la topologie d'un sous-espace fibré différentiable n'est pas nécessairement la topologie induite. En particulier, la fibre-type F' de $\mathfrak{A}'$ est une réunion de sous-variétés de F mais chacune de ces sous-variétés est ouverte dans F'.

Un espace fibré différentiable $\mathfrak{M}$ à fibre-groupe de Lie opère sur un espace fibré différentiable $\mathfrak{A}$ de même base si la fibre-type G de $\mathfrak{M}$ opère sur la fibre-type F de $\mathfrak{A}$ par $R(g)$ de telle sorte que l'application $(g, y) \to R(g)y \; (g \in G$

et $y \in F$) soit différentiable, si l'espace fibré s. l. sous-jacent à $\mathfrak{M}$ opère sur $\mathfrak{A}$ par $R(m)$, et si, quel que soit $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage U de x et des homéomorphismes $\psi'_U : A_U \to U \times F$, $\psi_U : \mathfrak{M}_U \to U \times G$ tels que l'égalité

$$\psi_U(m) = (x, g) \qquad \text{et} \qquad \psi'_U(z) = (x, y) \qquad (m \in \mathfrak{M},\ x \in \mathfrak{X},\ g \in \mathfrak{G},\ y \in F,\ z \in \mathfrak{A})$$

entraîne

$$\psi'_U(R(m)z) = (x,\ R(g)y).$$

Dans ces conditions, un *espace fibré principal différentiable à espace stuctural* est défini par la donnée d'un espace fibré différentiable $\mathfrak{M}$ à fibre-groupe de Lie opérant à droite de façon simplement transitive sur un espace fibré différentiable $\mathfrak{E}$ de même base. Remarquons qu'on rejoint la notion habituelle d'espace fibré principal *à groupe structural* lorsque l'espace structural est le produit de $\mathfrak{X}$ par un groupe de Lie G. On notera $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ un tel espace et, étant donné un deuxième espace fibré principal différentiable à groupe structural de même base, noté $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, G')$, on parlera de φ-homomorphisme $h : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}'$ si φ est un homomorphisme de G dans G' tel que $h(y.g) = h(y).\varphi(g)$. On dira aussi que φ et h sont compatibles et que h est un G-isomorphisme si φ est l'identité. De même, un *sous-espace fibré principal différentiable à groupe structural* $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, G')$ de $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ est un sous-espace fibré principal s. l. de l'espace fibré principal s. l. sous-jacent à $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ tel que :

1° $\mathfrak{E}'$ soit un sous-espace fibré différentiable de $\mathfrak{E}$;

2° $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M} = \mathfrak{X} \times G$ s'identifie au produit $\mathfrak{X} \times G'$ de $\mathfrak{X}$ par un sous-groupe G' de G, sous-groupe muni, non de la topologie induite mais de la réunion de cette dernière et de la topologie de G' dont les seuls ouverts sont les composantes connexes par arcs de G' dans G. La composante connexe de l'identité de G' est alors un sous-groupe analytique de la composante connexe de G et G', un groupe de Lie.

On peut reprendre avec ces notions les propositions des paragraphes précédents à condition de supposer évidemment, en ce qui concerne l'induction des espaces fibrés, que l'application $\psi : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ est différentiable. Si $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, \mathfrak{M})$ est un espace fibré principal différentiable et si $\mathfrak{M}$ opère sur un autre espace fibré différentiable $\mathfrak{L}$ de base $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{L}(\mathfrak{E})$ est aussi différentiable, $\mathfrak{M}(\mathfrak{E})$ opère sur $\mathfrak{L}(\mathfrak{E})$, etc. De même, $\psi^{-1}(\mathfrak{E})$, $\psi^{-1}(\mathfrak{M})$, $\psi^{-1}(\mathfrak{L})$ sont des espaces fibrés différentiables, la section induite par ψ sur un ouvert V de $\mathfrak{X}'$ à partir d'une section différentiable de $\mathfrak{E}$ (resp. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$, ...) sur un ouvert U de $\mathfrak{X}$ ($\psi(V) \subset U$) est une section différentiable, etc.

9. Faisceaux. — Un espace topologique E muni d'une projection continue p_E sur une base $\mathfrak{X}$ est un *faisceau* si, quel que soit $y \in E$, il existe un voisinage ouvert V de y dans E tel que la restriction de p_E à V soit un homéomorphisme de V sur $p_E(V)$.

Un *sous-faisceau* E′ de E est un sous-espace fibré s. l. *ouvert* dans E.

Un homomorphisme d'un faisceau dans un autre est un homomorphisme des espaces fibrés s. l. sous-jacents qui est *continu*.

De même, un faisceau est à fibres-groupes (ou faisceau de groupes) si l'espace fibré s. l. sous-jacent est à fibres-groupes et si ces lois de groupe sont continues pour la topologie du faisceau. On peut donner une définition semblable pour toute autre espèce de structures algébriques.

Un faisceau M à fibres-groupes opère sur un faisceau E de même base si l'espace fibré s. l. sous-jacent à M opère sur E et si ces opérations sont continues pour les topologies de M et E.

La notion de faisceau principal découle de cette définition et l'on peut reprendre avec les faisceaux, les résultats des premiers paragraphes de ce chapitre, à condition de supposer, en ce qui concerne l'induction, que l'application ψ est continue. Si $E(\mathfrak{X}, M)$ est un faisceau principal et si M opère sur un faisceau L de même base, L(E) est un faisceau, M(E) opère sur L(E), etc. De même, si $\psi : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ est une application continue, $\psi^{-1}(E)$, $\psi^{-1}(M)$, $\psi^{-1}(L)$ sont des faisceaux, les sections continues sur des ouverts induits et des sections continues, etc.

10. Faisceau des sections différentiables d'un espace fibré différentiable $\mathcal{E}$. — Un *germe* de sections différentiables passant par $y \in \mathcal{E}$ est un ensemble non vide z de sections locales différentiables $\overline{\sigma}$ de $\mathcal{E}$ passant par y tel que, si $\overline{\sigma}$ et $\overline{\sigma}'$ appartiennent à z, il existe un voisinage ouvert U de $p_{\mathcal{E}}(y)$ au-dessus duquel $\overline{\sigma}$ et σ' coïncident et que, inversement, si une section locale quelconque différentiable $\overline{\sigma}'$ de $\mathcal{E}$ coïncide sur un voisinage ouvert de $p_{\mathcal{E}}(y)$ avec $\overline{\sigma} \in z$, alors, $\overline{\sigma}' \in z$. L'ensemble E de tous les germes de sections différentiables de $\mathcal{E}$ est donc muni d'une application notée $z \to \dot{z}$ qui associe à tout germe z le point $\dot{z}$ de $\mathcal{E}$ par lequel passent toutes les sections qui constituent z, et d'une projection $p_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \to \mathfrak{X}$ définie par $p_{\mathrm{E}}(z) = p_{\mathcal{E}}(\dot{z})$. D'autre part, toute section différentiable $\overline{\sigma} : \mathrm{U} \to \mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$ sur un ouvert U de $\mathfrak{X}$, détermine en tout point $x \in \mathrm{U}$ un germe $\underline{\sigma}(x)$ qui est celui auquel elle appartient et qui passe par $\overline{\sigma}(x) = \dot{\underline{\sigma}}(x)$. On dira que $\overline{\sigma} : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ est la section de E associée à $\overline{\sigma}$. Le *faisceau* E *des sections différentiables de* $\mathcal{E}$ est alors l'ensemble des germes de sections différentiables de $\mathcal{E}$, muni de la topologie engendrée par tous $\underline{\sigma}(\mathrm{U})$ (U ouvert dans $\mathfrak{X}$ et $\overline{\sigma}$ section différentiable de $\mathcal{E}$ sur U). Il est immédiat de voir qu'il s'agit bien d'un faisceau. L'application $\underline{\sigma}$ associée à toute section différentiable $\overline{\sigma} : \mathrm{U} \to \mathcal{E}$ est alors une *section continue* de E et, réciproquement, l'application $\overline{\sigma} : \mathrm{U} \to \mathcal{E}$ définie à partir d'une section continue $\underline{\sigma} : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ quelconque par $\overline{\sigma}(x) = \dot{\underline{\sigma}}(x)$ est une section différentiable de $\mathcal{E}$. Ces notations (point, surlignage et sous-lignage ainsi que les majuscules d'imprimerie pour désigner les faisceaux de sections différentiables d'espaces fibrés symbolisés par des majuscules manuscrites) seront conservées par la suite.

Soit M le faisceau des sections différentiables d'un espace fibré différentiable $\mathfrak{M}$ à fibre-groupe de Lie et de base $\mathfrak{X}$. Soient z et z' deux germes de sections différentiables de projection $x \in \mathfrak{X}$. On définit le produit zz' en choisissant une section σ de M passant par $z\,[\sigma(x) = z]$ et une section σ' passant par z' définies l'une et l'autre sur un voisinage ouvert U de x (il est clair qu'il existe toujours de telles sections), en définissant une section différentiable $\overline{\sigma}''$ de $\mathfrak{S}$ par $\overline{\sigma}''(t) = \overline{\sigma}(t)\overline{\sigma}'(t)$ $(t \in \mathrm{U})$ et en posant $zz' = \underline{\sigma}''(x)$. On vérifie sans peine que zz' ne dépend pas du choix des sections $\underline{\sigma}$ et $\underline{\sigma}'$. M est alors un faisceau de groupes et, pour cette structure de groupe, l'application « point » est un homomorphisme. Plus généralement, s'il existe dans les espaces fibrés différentiables $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$ ou entre ces espaces, diverses structures algébriques, on peut définir les mêmes structures dans les faisceaux E, M, L de leurs sections différentiables, ou entre ces faisceaux. Les applications « points » sont alors des homomorphismes.

En particulier, soit $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}, \mathfrak{M})$ un espace fibré principal d'espace stuctural $\mathfrak{M}$. Le faisceau des sections différentiables de $\mathfrak{M}$ est le faisceau structural du faisceau principal $\mathrm{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{M})$ défini comme faisceau des sections différentiables de $\mathfrak{S}$. Supposons de plus que $\mathfrak{M}$ opère sur un troisième espace fibré différentiable $\mathfrak{L}$ et soit L le faisceau des sections différentiables de $\mathfrak{L}$. M opère alors sur L et l'on a

$$(\mathrm{I.10.1}) \qquad \dot{y.m} = \dot{y}.\dot{m} \qquad \text{et} \qquad \dot{\mathrm{R}(m)l} = \mathrm{R}(\dot{m})\,\dot{l} \qquad (m \in \mathrm{M},\ y \in \mathrm{E},\ l \in \mathrm{L}).$$

On peut donc modeler L sur E en même temps que $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{S}$. Il résulte de la proposition I.5.2 qu'il existe une application de L(E) sur $\mathfrak{L}(\mathfrak{S})$ qui provient de l'application « point » et qu'on notera également $l \to \dot{l}$. On vérifie facilement, en utilisant des sections locales de E et les isomorphismes $i(y)$ correspondants que L(E) est le faisceau des sections différentiables de $\mathfrak{L}(\mathfrak{S})$ et que l'application « point » obtenue par modelage s'identifie à l'application « point » définie par les sections différentiables de $\mathfrak{L}(\mathfrak{S})$. En particulier, c'est un homomorphisme des structures algébriques de L(E) et $\mathfrak{L}(\mathfrak{S})$ et l'on a entre M(E), L(E) et E des formules du type (I.10.1).

Enfin, si $\psi : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ est une application différentiable, et si E est le faisceau des sections différentiables d'un espace fibré $\mathfrak{S}$ de base $\mathfrak{X}$, il existe une application $y \to \dot{y}$ de $\psi^{-1}(\mathrm{E})$ sur $\psi^{-1}(\mathfrak{S})$, induite par ψ à partir de l'application « point » de E sur $\mathfrak{S}$ et définie par

$$\psi_{\mathrm{E}}^{\sharp}(y) \to \psi_{\mathfrak{S}}^{\sharp}(\dot{y}) \qquad [y \in \psi^{-1}(\mathrm{E})].$$

Mais, en général, $\psi^{-1}(\mathrm{E})$ *ne s'identifie pas* au faisceau des sections différentiables de $\psi^{-1}(\mathfrak{S})$. Cependant, si l'on pose $\psi^{-1}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}^{\sharp}$ et si l'on désigne par $\mathrm{E}^{\sharp}$ le faisceau des sections différentiables de $\mathfrak{S}^{\sharp}$, il existe un homomorphisme de faisceaux

$$\psi^{-1}(\mathrm{E}) \to \mathrm{E}^{\sharp}$$

qui résulte du fait que l'application « point » induite par ψ permet d'associer à toute section continue de $\psi^{-1}(E)$ une section différentiable de $\psi^{-1}(\mathcal{E})$.

CHAPITRE II.

Espaces fibrés a fibre vectorielle. Espace de Lie d'un espace fibré principal différentiable.

Introduction. — La première notion exposée dans ce chapitre est celle d'espace fibré des formes différentiables tensorielles de type R associé à un espace fibré principal différentiable à groupe structural $\mathcal{G}(\mathcal{X}, G)$. Un tel espace $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$ s'obtient en modelant sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ l'espace $\mathfrak{W}$ des formes différentielles sur $\mathcal{X}$ à valeurs dans un espace vectoriel $\mathfrak{W}_0$ sur lequel G opère par l'intermédiaire d'une représentation R. Un cas particulièrement important est celui où R est la représentation adjointe de G. L'espace $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ qu'on obtient ainsi est appelé *espace de Lie* de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ (ou espace des formes différentielles tensorielles du type adjoint). Il est intrinsèquement associé à $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, gradué, et $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ s'identifie à l'espace des algèbres de Lie des fibres de l'espace structural gauche $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$,

Le but des paragraphes 2 et 3 est de mettre en évidence les propriétés intervenant entre $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et l'espace $\mathcal{R}(\mathfrak{W}^0(\mathcal{E}))$ des repères de $\mathfrak{W}^0(\mathcal{E})$, qui est fibré principal de groupe $Gl(m, R)$. On constate d'abord que les espaces intrinsèquement associés à $\mathcal{R}(\mathfrak{W}^0(\mathcal{E}))$ (espace structural gauche et espace de Lie), ainsi que $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$ peuvent s'obtenir soit par des opérations de modelage sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, soit par des opérations de modelage sur $\mathcal{R}(\mathfrak{W}^0(\mathcal{E}))$. En outre, toute base f de $\mathfrak{W}_0$ détermine un homomorphisme $\psi^f : \mathcal{E} \to \mathcal{R}(\mathfrak{W}^0(\mathcal{E}))$ qui est compatible avec l'homomorphisme $R^f : G \to Gl(m, R)$ déduit de R. Dans le cas de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, l'homomorphisme ψ^f est noté $a^f_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$. Il est compatible avec l'homomorphisme adjoint $a^f : G \to Gl(n, R)$ exprimé par rapport à la base f de l'algèbre de Lie de G, et nous dirons que c'est un *homomorphisme adjoint* de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Plus généralement, on se donne au paragraphe 6 deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}', G')$ et l'on montre qu'à tout couple d'homomorphisme compatibles $\varphi : G \to G'$ et $h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, sont associés des homomorphismes $\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et $\varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ des espaces structuraux gauches et des espaces de Lie de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. On vérifie ensuite que les homomorphismes $a_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et $a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ dans l'espace structural gauche de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ et de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ dans l'espace de Lie de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$, ainsi associés au couple $(a^f, a^f_{\mathcal{E}})$, sont indépendants de la base f choisie. On les appelle respectivement les $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$-*et* $\mathcal{L}(\mathcal{E})$-*homomorphismes adjoints*.

1. Notations. — $\mathfrak{T}^1$ désigne l'espace fibré des vecteurs tangents à une variété

différentiable $\mathfrak{X}$ de dimension d et $\mathfrak{C}^q$, l'espace fibré de base $\mathfrak{X}$ dont la fibre $\mathfrak{C}^q_x$ est la $q^{\text{ième}}$ puissance extérieure de $\mathfrak{C}^1_x (x \in \mathfrak{X})$. Soit $\mathfrak{F}^q$ l'espace fibré des formes différentielles ordinaires sur $\mathfrak{X}$: $\mathfrak{F}^q_x$ s'identifie au dual de $\mathfrak{C}^q_x$. Le faisceau des formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ de degré q, c'est-à-dire le faisceau des sections différentiables de $\mathfrak{F}^q$, est noté F^q. On pose

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{q=1,\ldots,d} \mathfrak{C}^q \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{F} = \bigcup_{q=0,\ldots,d} \mathfrak{F}^q,$$

$\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{F}$ sont des espaces fibrés différentiables sur $\mathfrak{X}$. De même,

$$\mathrm{F} = \bigcup_{q=0,\ldots,d} \mathrm{F}^q$$

est un faisceau sur $\mathfrak{X}$.

Soit $\underline{\mathrm{G}}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G de centre H et de dimension n. Soit $\mathfrak{W}_0$ un espace vectoriel de dimension m sur lequel G opère par l'intermédiaire d'une représentation $\mathrm{R} : \mathrm{G} \to \Gamma(\mathfrak{W}_0)$ de G dans le groupe $\Gamma(\mathfrak{W}_0)$ des automorphismes linéaires de $\mathfrak{W}_0$. A toute base $f = (f_i)(i = 1, \ldots, m)$ de $\mathfrak{W}_0$ est associée une représentation $\mathrm{R}^f : \mathrm{G} \to \mathrm{Gl}(m, \mathrm{R})$.

Nous nous donnons d'autre part, un espace fibré principal différentiable $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ de groupe structural G.

Nous désignerons par $\overset{*}{\mathfrak{W}}_0$ le dual de $\mathfrak{W}_0$, par $\overset{*}{f} = (f^i)$, la base duale de f et nous poserons $\underline{\underline{\mathfrak{W}}}_0 = \overset{*}{\mathfrak{W}}_0 \otimes \mathfrak{W}_0$. Muni de la multiplication définie par

$$[a, b] = \sum_{i,j,k=1}^{m} (a^i{}_j a^j{}_k - b^i{}_j a^j{}_k) f^k \otimes f_i$$

pour

$$a = \sum_{i,j=1}^{m} a^i{}_j (f^j \otimes f_i) \qquad \text{et} \qquad b = \sum_{i,j=1}^{m} b^i{}_j (f^j \otimes f_i),$$

$\underline{\underline{\mathfrak{W}}}_0$ s'identifie à l'algèbre de Lie de $\Gamma(\mathfrak{W}_0)$.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$\mathfrak{W}^p$, espace fibré des p-formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\mathfrak{W}_0$;
W^p, faisceau des p-formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\mathfrak{W}_0$;
$\overset{*}{\mathfrak{W}}{}^p$, espace fibré des p-formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\overset{*}{\mathfrak{W}}_0$;
$\overset{*}{\mathrm{W}}{}^p$, faisceau des p-formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\overset{*}{\mathfrak{W}}_0$;
$\langle \theta, \overset{*}{\theta} \rangle$, produit scalaire antisymétrisé de $\theta \in \mathfrak{W}^p_x$ et $\overset{*}{\theta} \in \overset{*}{\mathfrak{W}}{}^p$;
$\underline{\underline{\mathfrak{W}}}{}^p$, espace fibré des p-formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\underline{\underline{\mathfrak{W}}}_0$;
$\underline{\underline{\mathrm{W}}}{}^p$, faisceau des p-formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\underline{\underline{\mathfrak{W}}}_0$.

$$\underline{\underline{\mathfrak{W}}} = \bigcup_{p=0,\ldots,d} \underline{\underline{\mathfrak{W}}}{}^p \qquad \text{et} \qquad \underline{\underline{\mathrm{W}}} = \bigcup_{p=0,\ldots,d} \underline{\underline{\mathrm{W}}}{}^p.$$

$$\mathfrak{W} = \bigcup_{p=0,\ldots,d} \mathfrak{W}^p, \qquad \mathrm{W} = \bigcup_{p=0,\ldots,d} \mathrm{W}^p, \qquad \overset{*}{\mathfrak{W}} = \bigcup_{p=0,\ldots,d} \overset{*}{\mathfrak{W}}{}^p, \qquad \overset{*}{\mathrm{W}} = \bigcup_{p=0,\ldots,d} \overset{*}{\mathrm{W}}{}^p.$$

Naturellement, $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$, $\overset{*}{\mathfrak{W}}(\mathcal{E})$, $\underline{\underline{\mathfrak{W}}}(\mathcal{E})$, $\mathrm{W}(\mathrm{E})$, $\overset{*}{\mathrm{W}}(\mathrm{E})$ désigneront les modelés sur $\mathcal{E}$ et sur E (faisceau des sections différentiables de $\mathcal{E}$) des espaces ci-dessus, G opérant sur $\mathfrak{W}$, $\overset{*}{\mathfrak{W}}$, $\underline{\underline{\mathfrak{W}}}$ par R et par les représentations qui s'en déduisent. $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$ est *l'espace des formes tensorielles de type* R. Il est clair que $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$ est muni d'une graduation correspondant à celle de $\mathfrak{W}$ et que tout $\mathfrak{W}^p(\mathcal{E})$ est à fibre vectorielle.

Remarque. — A toute section $\theta : \mathrm{U} \to \mathfrak{W}(\mathcal{E})$ de $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$ correspond une forme différentielle sur $\mathcal{E}_\mathrm{U}$ à valeurs dans $\mathfrak{W}_0$ dont l'expression au point $y \in \mathcal{E}_x$ $(x \in \mathrm{U})$, est

$$[j_{\mathfrak{W}}(y)\,\theta(x)] \circ [dp_{\mathcal{E}}]_y.$$

Nous n'introduirons pas de nouvelle notation pour désigner cette forme : elle sera représentée par θ également et nous nous contenterons de préciser éventuellement s'il convient de considérer ce symbole comme une section de $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$ ou comme une forme différentielle sur $\mathcal{E}_\mathrm{U}$. Il nous arrivera aussi de dire que $j_{\mathfrak{W}}(y)\,\theta(x)$ est la restriction à $y \in \mathcal{E}_x$ de la forme θ ou, plus généralement, si $\bar{y}$ est une section différentiable de $\mathcal{E}_\mathrm{U}$, que $j_{\mathfrak{W}}(\bar{y})\,\theta$ est la restriction de la forme θ à la section locale $\bar{y}$.

Rappels. — 1° On définit un isomorphisme de $\mathfrak{W}^p(\mathcal{E})$ sur l'espace fibré des p-formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\mathfrak{W}^0(\mathcal{E})$, en faisant correspondre à $\theta \in \mathfrak{W}^p_x(\mathcal{E})$, l'application linéaire $i_{\mathfrak{W}^0}(y) \circ (j_{\mathfrak{W}}(y)\,\theta)$, indépendante de $y \in \mathcal{E}_x$ (4).

2° Il existe une multiplication $\alpha \wedge \theta$ $(\alpha \in \mathcal{F}'_x$ et $\theta \in \mathfrak{W}^p_x)$ notée simplement $\alpha\theta$ si θ est de degré o. Cette multiplication se transmet à $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$ sous la même notation $\alpha \wedge \theta$ $[\alpha \in \mathcal{F}'_x$ et $\theta \in \mathfrak{W}^p_x(\mathcal{E})]$ et, dans les deux cas, on a les propriétés suivantes :

a. Si (ρ_i) est une base de $\mathfrak{W}^0_x$ [resp. $\mathfrak{W}^0_x(\mathcal{E})$], tout $\theta \in \mathfrak{W}^p_x$ [resp. $\mathfrak{W}^p_x(\mathcal{E})$] admet une décomposition et une seule de la forme

$$\theta = \sum_{i=1}^{m} \theta^i \rho_i \qquad (\theta^i \in \mathcal{F}^p_x).$$

b. Le produit par les formes de la base se traduit par la formule

$$\alpha \wedge \theta = \sum_{i=1}^{m} (\alpha \wedge \theta^i)\rho_i \qquad (\alpha \in \mathcal{F}).$$

3° Étant donnés $\theta \in \mathfrak{W}^p_x(\mathcal{E})$ et $\overset{*}{\theta} \in \overset{*}{\mathfrak{W}}{}^q_x(\mathcal{E})$, le produit scalaire

$$\langle j_{\mathfrak{W}}(y)\theta,\ j^*_{\mathfrak{W}}(y)\overset{*}{\theta} \rangle$$

(4) On considère dans cette formule que $i_{\mathfrak{W}^0}(y)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{W}_0$ sur $\mathfrak{W}^0_x(\mathcal{E})$, et non de $\mathfrak{W}^0_x$ sur $\mathfrak{W}^0_x(\mathcal{E})$. Cela a un sens car $\mathfrak{W}^0 = \mathfrak{X} \times \mathfrak{W}_0$.

est une $(p+q)$-forme différentielle ordinaire sur $\mathfrak{X}$, *indépendante* de $y \in \mathcal{E}_x$. On peut donc poser

$$\langle \theta, \mathring{\theta} \rangle = \langle j_{\mathfrak{W}}(y)\theta, j^{*}_{\mathfrak{W}}(y)\mathring{\theta} \rangle,$$

ce qui permet, en particulier, de définir $\overset{*}{\mathfrak{W}}{}^{q}_{x}(\mathcal{E})$ comme le dual de $\mathfrak{W}^{q}_{x}(\mathcal{E})$. On a également

$$\langle R(m)\theta, \mathring{R}(m)\mathring{\theta} \rangle = \langle \theta, \mathring{\theta} \rangle \qquad [m \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})]. \tag{II.1.1}$$

où $\mathring{R}$ désigne la représentation duale de R.

4° L'isomorphisme $X \otimes Y \to \underset{=}{i_{\mathfrak{W}}}(y)(j_{\mathfrak{W}}(y)X \otimes j_{\mathfrak{W}}(y)Y) \left[X \in \overset{*}{\mathfrak{W}}{}^{q}_{x}(\mathcal{E}),\ Y \in \mathfrak{W}^{q}_{x}(\mathcal{E})\right]$ est indépendant de $y \in \mathcal{E}_x$ et permet d'identifier $\mathfrak{W}^{q}(\mathcal{E})$ et $\overset{*}{\mathfrak{W}}{}^{q}_{x}(\mathcal{E}) \otimes \mathfrak{W}^{q}_{x}(\mathcal{E})$.

Enfin, on posera $\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}} = \mathfrak{X} \times \Gamma(\mathfrak{W}_0)$ et $M_{\mathfrak{W}}$ sera le faisceau des sections différentiables de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}$. G opère sur $\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}$ par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs de $\Gamma(\mathfrak{W}^{q}_{0})$, ce qui permet de construire $\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}(\mathcal{E})$ et $M_{\mathfrak{W}}(E)$. Il est clair que $\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}(\mathcal{E})$ s'identifie à l'espace fibré des automorphismes linéaires des fibres de $\mathfrak{W}^{q}(\mathcal{E})$. En outre, il existe une représentation déduite de R :

$$R_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}(\mathcal{E}).$$

2. Espace des repères de $\mathfrak{W}^{q}(\mathcal{E})$. — L'espace des q-repères $\mathcal{R}^{q}(\mathfrak{W}^{q}(\mathcal{E}))$ est l'ensemble des q-repères des fibres de $\mathfrak{W}^{q}(\mathcal{E})$, muni d'une structure évidente d'espace fibré différentiable (5). Il est clair que $\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}(\mathcal{E})$ opère à gauche sur $\mathcal{R}^{q}(\mathfrak{W}^{q}(\mathcal{E}))$.

L'espace des m-repères, noté simplement $\mathcal{R}(\mathfrak{W}^{q}(\mathcal{E}))$, ou même $\mathcal{R}$, est muni d'une structure d'espace fibré principal différentiable de base $\mathfrak{X}$ et de groupe structural $Gl(m, R)$. Le translaté à droite de $\rho = (\rho_i)$ par $A = (A^i_j)$ est le repère $\rho . A$ constitué par les vecteurs

$$\rho'_i = \sum_{j=1}^{m} A^j{}_i \rho_j \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

A $\rho \in \mathcal{R}(\mathfrak{W}^{q}(\mathcal{E}))$ est associé canoniquement un isomorphisme

$$j'_{\mathfrak{W}}(\rho) : \quad \mathfrak{W}^{q}_{x}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{V}_{m,x},$$

où $\mathfrak{V}_m$ désigne l'espace fibré des formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans R^m, isomorphisme défini par

$$j'_{\mathfrak{W}}(\rho)\theta = (\theta^i) \quad \text{pour } \rho = (\rho_i) \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad \text{et} \qquad \theta = \sum_{i=1}^{m} \theta^i \rho_i.$$

(5) Cette définition est évidemment valable pour tout espace fibré différentiable à fibre vectorielle. $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ n'y joue aucun rôle.

On a alors

$$j'_{\mathfrak{W}}(\rho.\mathrm{A})\theta = \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathrm{A}}^{-1}{}^{i}{}_{j}\theta^{j} = \overline{\mathrm{A}}^{-1}.j'_{\mathfrak{W}}(\rho)\theta.$$

Proposition II.2.1. — *Il existe des isomorphismes canoniques*

$$j'_{\mathfrak{W}}(\rho) : \quad \mathfrak{W}_x(\mathcal{E}) \to \mathcal{V}_{m,x}$$

pour lesquels

$$j'_{\mathfrak{W}}(\rho.\mathrm{A})\theta = \overline{\mathrm{A}}^{-1} j'_{\mathfrak{W}}(\rho)\theta. \tag{II.2.1}$$

L'espace structural de $\mathcal{R}$ est $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{X} \times \mathrm{Gl}(m, \mathrm{R})$ et l'on notera $\mathfrak{L}^0_m$ le produit de $\mathfrak{X}$ par l'algèbre de Lie $\underline{\mathrm{Gl}(m, \mathrm{R})}$ du groupe linéaire. Par modelage de $\mathcal{V}_m$, $\mathfrak{M}_m$, $\mathfrak{L}_m$ sur $\mathcal{R}$, on obtient $\mathcal{V}_m(\mathcal{R})$, $\mathfrak{M}_m(\mathcal{R})$, $\mathfrak{L}_m(\mathcal{R})$ avec les isomorphismes correspondants : $j_{\mathfrak{M}_m}(\rho)$, $j_{\mathcal{V}_m}(\rho)$ et $i_{\mathfrak{L}_m}(\rho)(\rho \in \mathcal{R})$. La formule (II.2.1) permet de vérifier la proposition :

Proposition II.2.2. — *L'application $h_{\mathfrak{W}} = i_{\mathcal{V}_m}(\rho) \circ j'_{\mathfrak{W}}(\rho)$, indépendante de $\rho \in \mathcal{R}_x$, est un isomorphisme de $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{V}_m(\mathcal{R})$.*

Par ailleurs, puisque $\mathfrak{W}^0_x(\mathcal{E})$ s'identifie au dual de $\mathfrak{W}^0_x(\mathcal{E})$, que

$$\underline{\underline{\mathfrak{W}}}{}^0_x(\mathcal{E}) = \overset{*}{\mathfrak{W}}{}^0_x(\mathcal{E}) \otimes \mathfrak{W}^0_x(\mathcal{E}),$$

et que $\mathfrak{M}_{\mathfrak{W},x}(\mathcal{E})$ n'est autre que le groupe des automorphismes linéaires de $\mathfrak{W}^0_x(\mathcal{E})$, on associe à $\rho \in \mathcal{R}$, par l'intermédiaire de $j'_{\mathfrak{W}}(\rho)$, des isomorphismes

$$j'_{\overset{*}{\mathfrak{W}}}(\rho) : \quad \overset{*}{\mathfrak{W}}_x(\mathcal{E}) \to \overset{*}{\mathcal{V}}_{m,x}, \qquad j'_{\underline{\underline{\mathfrak{W}}}}(\rho) : \quad \underline{\underline{\mathfrak{W}}}_x(\mathcal{E}) \to \mathfrak{L}_{m,x}, \qquad j'_{\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}}(\rho) : \quad \mathfrak{M}_{\mathfrak{W},x}(\rho) \to \mathfrak{M}_{m,x}.$$

On a alors des résultats analogues à la proposition II.2.2 :

Proposition II.2.3. — *Les applications*

$$h_{\overset{*}{\mathfrak{W}}} = i_{\overset{*}{\mathcal{V}}_m}(\rho) \circ j'_{\overset{*}{\mathfrak{W}}}(\rho), \qquad h_{\underline{\underline{\mathfrak{W}}}} = i_{\mathfrak{L}_m}(\rho) \circ j'_{\underline{\underline{\mathfrak{W}}}}(\rho), \qquad h_{\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}} = i_{\mathfrak{M}_m}(\rho) \circ j'_{\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}}(\varphi),$$

ne dépendant que de la projection de ρ sur $\mathfrak{X}$, sont des isomorphismes.

Dans la suite, nous identifierons complètement $\mathcal{V}_m(\mathcal{R})$ et $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$, $\overset{*}{\mathcal{V}}_m(\mathcal{R})$ et $\overset{*}{\mathfrak{W}}(\mathcal{E})$, $\mathfrak{L}_m(\mathcal{R})$ et $\underline{\underline{\mathfrak{W}}}(\mathcal{E})$, $\mathfrak{M}_m(\mathcal{R})$ et $\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}(\mathcal{E})$.

3. Le R^f-homomorphisme $\psi^f : \mathcal{E} \to \mathcal{R}$. — Choisissons une base

$$f = (f_i) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

de $\mathfrak{W}_0$. La représentation $\mathrm{R} : \mathrm{G} \to \Gamma(\mathfrak{W}_0)$ s'exprime, par rapport à f, par un homomorphisme $\mathrm{R}^f : \mathrm{G} \to \mathrm{Gl}(m, \mathrm{R})$. On pose $\mathrm{R}^f(s) = (\mathrm{A}^i{}_j(s))(i, j = 1, \ldots, m)$,

avec $R(s)f_i = \sum_{j=1}^{m} A^j{}_i(s) f_j$ et $s \in G$. On peut alors définir un homomorphisme ψ^f, associé à R et à f, par l'égalité

$$\psi^f(y) = (i_{\mathfrak{Z}\mathfrak{P}}(y) f_i) \qquad (i = 1, \ldots, m \text{ et } y \in \mathcal{E}). \tag{II.3.1}$$

C'est un R^f-*homomorphisme*. En effet :

Proposition II.3.1. — *On a la formule*

$$\psi^f(y.s) = \psi^f(y).R^f(s) \qquad (y \in \mathcal{E} \text{ et } s \in G)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} i_{\mathfrak{Z}\mathfrak{P}}(y.s) f_i &= i_{\mathfrak{Z}\mathfrak{P}}(y)\,(R(s) f_i) \\ &= i_{\mathfrak{Z}\mathfrak{P}}(y) \left(\sum_{j=1}^{m} A^j{}_i(s) f_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} A^j{}_i(s) \left(i_{\mathfrak{Z}\mathfrak{P}}(y) f_j \right) \\ &= \psi^f(y).R^f(s). \end{aligned}$$

En outre :

Proposition II.3.2. — *On a la formule* $\psi^{f.A} = D_A \circ \psi^f$ *où* $A = (A^i{}_j)$ *est une matrice de* $Gl(m, R)$ *et* D_A *est la translation à droite sur* $\mathcal{R}$ *définie par* A, *tandis que* $f.A$ *est le repère* $\left(\sum_{j=1}^{m} A^j{}_i f_j \right)$.

En effet,

$$\begin{aligned} \psi^{f.A}(y) &= i_{\mathfrak{Z}\mathfrak{P}}(y) \left(\sum_{j=1}^{m} A^i{}_i f_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} A^j{}_i i_{\mathfrak{Z}\mathfrak{P}}(y) f_j \right) \\ &= \psi^f(y).A. \end{aligned}$$

4. Espace de Lie d'un espace fibré principal différentiable a groupe structural. — Nous considérons toujours un groupe de Lie G de dimension n et un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ de base $\mathfrak{X}$ et de groupe G. On appellera *espace de Lie* de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$, l'espace $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$ obtenu en modelant sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ l'espace $\mathfrak{L} = \bigcup_p \mathfrak{L}^p (p = 1, \ldots, d)$ des formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\underline{G}$ de G, G opérant sur $\mathfrak{L}$ par l'intermédiaire de la représentation adjointe. $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$ est donc, en appliquant la terminologie indiquée ci-dessus, l'espace des formes tensorielles de type adjoint de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$. Mais sa structure est plus complexe que celle d'un espace fibré de formes tensorielles

ordinaires : en plus des opérations linéaires, les fibres de $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$ sont munies d'un crochet. D'où le nom d'espace de Lie, qui se trouvera en outre justifié ultérieurement par une certaine similitude dans les rapports existant entre un espace fibré principal et son espace de Lie d'une part, entre un groupe de Lie et son algèbre, d'autre part.

On vérifie sans aucune difficulté que $\mathfrak{L}$ est muni des structures suivantes pour lesquelles les transformations adjointes sont des automorphismes, ce qui entraîne l'existence des mêmes structures dans les fibres de $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$, en vertu des propositions du paragraphe 5 :

1° Chaque $\mathfrak{L}^q_x$[resp. $\mathfrak{L}^q_x(\mathcal{E})$] est muni d'une structure d'espace vectoriel et il existe une multiplication extérieure par les formes différentielles ordinaires de la base, multiplication notée

$$\alpha \wedge \theta \qquad (\alpha \in \mathfrak{F}^r_x,\ \theta \in \mathfrak{L}^q_x\ [\text{resp. } \alpha \in \mathfrak{F}^r_x,\ \theta \in \mathfrak{L}^q_x(\mathcal{E})]),$$

et déjà signalée à propos de $\mathfrak{W}$ (§ II.1).

2° En outre, il existe dans chaque fibre de $\mathfrak{L}$[resp. $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$] une loi de composition interne, combinant le crochet de l'algèbre de Lie et la multiplication extérieure, qu'on continue à appeler « crochet » et à noter

$$[\theta,\ \theta'] \qquad (\theta \in \mathfrak{L}^p_x,\ \theta' \in \mathfrak{L}^q_x\ [\text{resp. } \theta \in \mathfrak{L}^p_x(\mathcal{E}),\ \theta' \in \mathfrak{L}^q_x(\mathcal{E})]).$$

On a les égalités suivantes :

$$[\theta,\ \theta'] + (-1)^{pq}[\theta',\ \theta] = 0,$$
$$[[\theta,\ \theta'],\ \theta''] + (-1)^{pqr}[[\theta',\ \theta''],\ \theta] + (-1)^{pqr}[[\theta'',\ \theta],\ \theta'] = 0 \qquad (\theta'' \in \mathfrak{L}^r_x\ [\text{resp. } \mathfrak{L}^r_x(\mathcal{E})]),$$

qui généralisent l'antisymétrie des algèbres de Lie et l'identité de Jacobi.

Il en résulte immédiatement que des opérations de même type existent dans les fibres des faisceaux L et L(E) des sections différentiables de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$, que ces opérations sont continues pour les topologies de faisceaux et que les applications « point » sont des homomorphismes de ces structures.

On a, bien entendu :

$$(\alpha + \alpha') \wedge \theta = \alpha \wedge \theta + \alpha' \wedge \theta \qquad [\alpha,\ \alpha' \in \mathfrak{F}^p_x,\ \theta \in \mathfrak{L}^q_x(\mathcal{E})],$$
$$\alpha \wedge (\theta + \theta') = \alpha \wedge \theta + \alpha \wedge \theta' \qquad [\theta' \in \mathfrak{L}^q_x(\mathcal{E})],$$
$$\alpha \wedge (\beta \wedge \theta) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \theta \qquad (\beta \in \mathfrak{F}^r_x)$$
$$\alpha \wedge [\theta,\ \theta'] = [\alpha \wedge \theta,\ \theta'].$$

Enfin, $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ opère sur $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$ par des transformations provenant des transformations adjointes de G (prop. I.5.3) et notées également Adj.

Remarquons que l'espace $\mathfrak{L}_m(\mathcal{R})$, considéré au paragraphe II.2 et identifié à $\underline{\underline{\mathfrak{W}}}(\mathcal{E})$, est l'espace de Lie de $\mathcal{R}(\mathfrak{L}^0(\mathcal{E}))$. Dans le cas où $\mathfrak{W}_0 = \underline{G}$, l'espace $\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}$, directement lié à $\mathfrak{M}$, sera noté $\underline{\underline{\mathfrak{M}}}$; de même, $\underline{\underline{\mathfrak{W}}}$ devient $\underline{\underline{\mathfrak{L}}}$. L'espace structural gauche de $\mathcal{R}(\mathfrak{L}^0(\mathcal{E}))$ est donc $\underline{\underline{\mathfrak{M}}}(\mathcal{E})$ et son espace de Lie est $\underline{\underline{\mathfrak{L}}}(\mathcal{E})$.

Comme, par définition, $\mathfrak{M} = \mathfrak{X} \times G$, nous considérerons $j_{\mathfrak{M}}(y)$ comme un isomorphisme $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E}) \to G$ [resp. $i_{\mathfrak{M}}(y) : G \to \mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$]. De même, $j_{\mathfrak{L}^0}(y)$ peut être considéré comme un isomorphisme $\mathfrak{L}^0_x(\mathcal{E}) \to \underline{G}$ [resp. $i_{\mathfrak{L}^0}(y) : \underline{G} \to \mathfrak{L}^0_x(\mathcal{E})$]. Soit $\underline{i_{\mathfrak{M}}(y)}$ l'isomorphisme de $\underline{G}$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$ de $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$ associé à $i_{\mathfrak{M}}(y)$. Si l'on pose

$$k(y) = \underline{i_{\mathfrak{M}}(y)} \circ j_{\mathfrak{L}^0}(y),$$

on obtient un isomorphisme

$$k(y) : \quad \mathfrak{L}^0_x(\mathcal{E}) \to \underline{\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})}.$$

On vérifie immédiatement que $k(y)$ ne dépend que de la projection x de y sur $\mathfrak{X}$, et non du choix de y dans $\mathcal{E}_x$. Cela permet d'énoncer :

Proposition II.4.1. — *Il existe un isomorphisme canonique*

$$k : \quad \mathfrak{L}^0(\mathcal{E}) \to \underline{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$$

de $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$ sur l'espace fibré $\underline{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ des algèbres de Lie des fibres de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$, isomorphisme défini par l'égalité

$$k = \underline{i_{\mathfrak{M}}(y)} \circ j_{\mathfrak{L}^0}(y) \qquad (y \in \mathcal{E}).$$

Remarque. — Ce résultat est évidemment plus général et il reste valable pour des espaces fibrés $\mathfrak{P}(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$ obtenus en modelant sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ les produits $\mathfrak{P} = \mathfrak{X} \times \Gamma$ de $\mathfrak{X}$ par un groupe de Lie Γ sur lequel G opère comme groupe d'automorphismes, et $\mathfrak{L}^0 = \underline{\Gamma} \times \mathfrak{X}$ de l'algèbre de Lie de Γ sur laquelle G opère par les automorphismes associés, par $\mathfrak{X}$ également.

On vérifie de plus qu'on a

$$\mathrm{Adj}(m)\, k(l) = k(\mathrm{Adj}(m) l) \qquad [l \in \mathfrak{L}^0(\mathcal{E}) \text{ et } m \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})],$$

formule où $\mathrm{Adj}(m)$ désigne, au premier membre, les transformations de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ sur son algèbre de Lie et, au second, l'opération de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ sur $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$ résultant du modelage.

Par ailleurs, puisque G est simplement transitif sur $\mathcal{E}_x$, il existe une forme β, définie en tout point $y \in \mathcal{E}[p(y) = x]$ sur l'espace vectoriel V_y des vecteurs tangents à $\mathcal{E}_x$ au point y, et identifiant V_y et $\underline{G}$:

$$\beta_y : \quad V_y \to \underline{G}.$$

De même, tout élément $X \in \underline{\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})}$ détermine un champ de vecteurs verticaux tangents à $\mathcal{E}_x$: soit X_y ce champ de vecteurs.

Proposition II.4.2. — *On a*

$$\beta(X_y) = j_{\mathfrak{L}^0}(y)\,(k^{-1}(X)).$$

Cette proposition résulte immédiatement de la formule

$$m.y = y.j_{\mathfrak{M}}(y)m \qquad [m \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})]$$

qui entraîne l'identité de $\underline{j_{\mathfrak{M}}(y)}\mathrm{X}$ et de $\beta(\mathrm{X}_y)$. Or, par définition de k, on a

$$j_{\mathfrak{L}^0}(y)(k^{-1}(\mathrm{X})) = \underline{j_{\mathfrak{M}}(y)}\mathrm{X},$$

d'où la formule indiquée.

Cette formule entraîne $\beta(\mathrm{X}_{y.s}) = \mathrm{Adj}(s^{-1})\beta(\mathrm{X}_y)$ et, par suite :

Proposition II.4.3. — *Le champ* X_y *est invariant par les translations à droite de* G *sur* $\mathcal{E}$.

5. Homomorphismes. — Soient $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathrm{G})$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \mathrm{G}')$ deux espaces fibrés principaux différentiables de base commune $\mathcal{X}$ et de groupes G et G′ respectivement. Nous supposons qu'il existe un couple d'homomorphismes compatibles

$$\begin{array}{ll} \varphi : & \mathrm{G} \to \mathrm{G}' \\ h : & \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \end{array} \qquad [h(y.s) = h(y).\varphi(s),\ s \in \mathrm{G},\ y \in \mathcal{E}].$$

Il s'agit, dans ce paragraphe, d'examiner de quelle façon se traduit l'existence d'un tel couple sur les espaces structuraux gauches et sur les espaces de Lie de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathrm{G})$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \mathrm{G}')$.

A φ est associé l'homomorphisme $\underline{\varphi} : \underline{\mathrm{G}} \to \underline{\mathrm{G}}'$ de l'algèbre de Lie de G dans l'algèbre de Lie de G′ (6). A son tour, $\underline{\varphi}$ détermine un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{L}} : \quad \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}' .$$

de l'espace des formes différentielles sur $\mathcal{X}$ à valeurs dans $\underline{\mathrm{G}}$ dans l'espace des formes différentielles à valeurs dans $\underline{\mathrm{G}}'$. $\varphi_{\mathfrak{L}}$ est compatible avec φ, en ce sens qu'on a (*voir* § I.4) :

$$\varphi_{\mathfrak{L}}(\mathrm{Adj}(s)\mathrm{X}) = \mathrm{Adj}(\varphi(s))\varphi_{\mathfrak{L}}(\mathrm{X}) \qquad (s \in \mathrm{G} \text{ et } \mathrm{X} \in \mathfrak{L}).$$

De même, $\varphi_{\mathfrak{M}}$ déduit de φ est compatible avec $\underline{\varphi}$ lorsque G opère sur $\mathfrak{M}$ par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs. Il en résulte (prop. I.5.2) qu'il existe deux homomorphismes

$$\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}') \qquad \text{et} \qquad \varphi^h_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{L}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{L}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathrm{G})$ dans celui de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \mathrm{G}')$, d'une part, de l'espace de Lie de $\mathcal{E}$ dans l'espace de Lie de $\mathcal{E}'$, d'autre part. On dira que ces homomorphismes sont associés au couple (φ, h). Ils peuvent être définis par les relations

$$\begin{aligned} \varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(i_{\mathfrak{M}}(y)s) &= i_{\mathfrak{M}'}(h(y))\varphi(s) \qquad (s \in \mathrm{G} \text{ et } y \in \mathcal{E}) \\ \varphi^h_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}(i_{\mathfrak{L}^0}(y)\mathrm{X}) &= i_{\mathfrak{L}'^0}(h(y))\underline{\varphi}(\mathrm{X}) \qquad (\mathrm{X} \in \mathrm{G}). \end{aligned}$$

(6) Nous conservons la notation $d\varphi$ pour la différentielle de φ qui interviendra de façon distincte de $\underline{\varphi}$ à l'occasion de la définition des connexions.

Cette dernière égalité montre que, en conservant les notations θ et θ' pour représenter les formes différentielles sur $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ correspondant à deux sections θ et θ' de $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ et $\mathscr{L}'(\mathscr{E}')$ respectivement, telles que $\theta' = \varphi^h_{\mathscr{L}(\mathscr{E})} \circ \theta$, on a

$$\theta'_{h(y)} \circ (dh)_y = (\underline{\varphi}) \circ \theta_y \qquad (y \in \mathscr{E}),$$

où $\theta'_{h(y)}$ et θ_y sont des formes linéaires sur des puissances extérieures des espaces vectoriels tangents à $\mathscr{E}'$ et à $\mathscr{E}$ aux points $h(y)$ et y, à valeurs dans $\underline{G}'$ et $\underline{G}$, et où $(dh)_y$, différentielle de h, applique les vecteurs tangents à $\mathscr{E}$ au point y dans les vecteurs tangents à $\mathscr{E}'$ au point $h(y)$. Enfin, $\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ et $\varphi^h_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$ sont également associés entre eux, en ce sens que, au-dessus de tout point x de $\mathscr{X}$, on a

$$\varphi^h_{\underline{\mathfrak{M}}(\mathscr{E})} \circ k = k \circ \varphi^h_{\mathscr{L}^0(\mathscr{E})}.$$

Application. — En revenant au paragraphe II.3, on voit qu'au couple (R^f, ψ^f), sont associés deux homomorphismes

$$R_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathscr{E}) \to \mathfrak{M}_m(\mathscr{R}) = M_{\mathfrak{W}}(\mathscr{E}) \qquad \text{et} \qquad R_{\mathscr{L}(\mathscr{E})} : \quad \mathscr{L}(\mathscr{E}) \to \mathscr{L}_m(\mathscr{R}) = \underline{\mathfrak{W}}(\mathscr{E})$$

qui sont indépendants du choix de f car, une fois qu'on a identifié $\mathfrak{M}_m(\mathscr{R})$ et $\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}}(\mathscr{E})$, d'une part, $\mathscr{L}_m(\mathscr{R})$ et $\mathfrak{W}(\mathscr{E})$, d'autre part, ils résultent simplement des homomorphismes $R : G \to \Gamma(\mathfrak{W}_0)$ et $\underline{R} : \underline{G} \to \underline{\Gamma(\mathfrak{W}_0)}$ par modelage sur $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$ (l'existence de $R_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ a déjà été signalée au paragraphe II.1).

Dans le cas où $\mathfrak{W}_0 = \underline{G}$ et où R est la représentation adjointe, l'homomorphisme ψ^f sera noté $a^f_{\mathscr{E}} : \mathscr{E} \to \mathscr{R}(\mathscr{L}^0(\mathscr{E}))$ et l'on dira que c'est l'*homomorphisme adjoint de* $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$ *associé à* f. Il est compatible avec l'homomorphisme adjoint $a^f : G \to Gl(n, R)$ exprimé par rapport à la base f de $\underline{G}$. Les homomorphismes $R_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ et $R_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$, indépendants de f mais associés à $(a^f, a^f_{\mathscr{E}})$ comme nous venons de le voir, seront alors notés :

$$a_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathscr{E}) \to \mathfrak{M}(\mathscr{E}) \qquad \text{et} \qquad a_{\mathscr{L}(\mathscr{E})} : \quad \mathscr{L}(\mathscr{E}) \to \mathscr{L}(\mathscr{E})$$

et ils s'appelleront les $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$- *et* $\mathscr{L}(\mathscr{E})$-*homomorphismes adjoints*. Bien entendu, $k \circ a_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(m) \circ k^{-1}$ n'est autre que $\mathrm{Adj}(m)\,[m \in \mathfrak{M}(\mathscr{E})]$.

Un autre exemple d'homomorphismes, d'ailleurs lié au précédent, est constitué par le couple d'homomorphismes canoniques

$$\gamma_{\mathscr{E}} : \quad \mathscr{E} \to \mathscr{E}_\gamma = \mathscr{E}/H \qquad \text{et} \qquad \gamma : \quad G \to G_\gamma = G/H,$$

où H est le centre de G. Si nous supposons le groupe G connexe, l'algèbre de Lie $\underline{H}$ de H est le centre de $\underline{G}$ et les espaces obtenus en modelant $\mathscr{X} \times H$ et $\mathscr{X} \times \underline{H}$ sur $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$ lorsque G opère sur H et $\underline{H}$ par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs et de la représentation adjointe (et, par suite, trivialement dans les deux cas), sont les centres $\mathfrak{N}(\mathscr{E})$ et $\mathscr{K}(\mathscr{E})$ de $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$ et $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ respectivement. Au couple $(\gamma, \gamma_{\mathscr{E}})$ sont associés, conformément à ce qui pré-

cède, deux homomorphismes

$$\gamma_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma) \qquad \text{et} \qquad \gamma_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma),$$

où $\mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)$ désignent respectivement l'espace structural gauche et l'espace de Lie de $\mathcal{E}_\gamma(\mathfrak{X}, G_\gamma)$. Comme les noyaux de $\gamma_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et $\gamma_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ sont, de toute évidence, $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, on peut identifier $\mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)$ [resp. $\mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)$] à $\mathfrak{M}(\mathcal{E})/\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ [resp. $\mathcal{L}(\mathcal{E})/\mathcal{K}(\mathcal{E})$]. Mais le noyau de la représentation adjointe de G est H, il en résulte que toute base f de $\underline{G}$ détermine un *isomorphisme*

$$a'_{\mathcal{E}_\gamma} : \quad \mathcal{E}_\gamma \to \mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$$

de $\mathcal{E}/H$ dans l'espace des repères de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$. D'autre part, les noyaux de $a_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et $a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ sont respectivement $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Il en résulte que $a_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et $a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ aussi, passent au quotient et déterminent des *isomorphismes dans*

$$\overset{\gamma}{a}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma) = \mathfrak{M}(\mathcal{E})/\mathfrak{N}(\mathcal{E}) \to \underline{\underline{\mathfrak{M}}}(\mathcal{E}) \qquad \text{et} \qquad \overset{\gamma}{a}_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma) = \mathcal{L}(\mathcal{E})/\mathcal{K}(\mathcal{E}) \to \underline{\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{E}).$$

Les notations précédentes, éventuellement agrémentées d'indices, seront conservées par la suite. D'une façon générale, la lettre γ sera toujours associée à des quotients d'espaces fibrés par le centre du groupe structural.

CHAPITRE III.

Connexions. Différentiations covariantes.

Introduction. — On peut construire le faisceau des connexions d'un espace fibré principal différentiable à groupe structural $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ en définissant d'abord la notion de connexion et en formant ensuite un préfaisceau de connexions locales. Ce n'est pas ce procédé que nous utilisons et la définition que nous donnons ici s'inscrit dans le cadre général du « modelage ». On définit un faisceau C de base $\mathfrak{X}$, dit des préconnexions de type G, et des opérations de M (faisceau des sections différentiables de $\mathfrak{M} = G \times \mathfrak{X}$) sur C. Le faisceau C(E) des connexions de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ s'obtient alors en modelant C sur E (sections différentiables de $\mathcal{E}$). Il en résulte immédiatement que M(E) opère sur C(E). En outre, il existe un homomorphisme de faisceaux

$$\Omega : \quad C \to L^2$$

(où L^2 désigne comme au chapitre précédent le faisceau des 2-formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\underline{G}$) qui, vérifiant les conditions de compatibilité de la proposition I.5.2, donne naissance à l'homomorphisme

$$\Omega_E : \quad C(E) \to L^2(E).$$

C'est cet homomorphisme Ω_E qui définit la *courbure* d'une connexion.

La notion de faisceau $D_W(E)$ des $W(E)$-différentiations covariantes est directement rattachée au faisceau $C_W(E)$ des connexions linéaires sur l'espace fibré $\mathcal{R}(\mathfrak{W}^0(\mathcal{E}))$ des repères de $\mathfrak{W}^0(\mathcal{E})$. $D_W(E)$ et $C_W(E)$ sont isomorphes et on les construit par modelage, soit sur le faisceau des sections différentiables de $\mathcal{R}(\mathfrak{W}^0(\mathcal{E}))$. Ce sont des relations de compatibilité du type de celles des propositions I.5 qui montrent que $D_W(E)$ opère sur $W(E)$, de même que D_W opère sur W. Il s'agit ensuite de montrer qu'il existe une $W(E)$-différentiation covariante associée à toute connexion de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Cela résulte du fait que, de même qu'il existait des homomorphismes $R_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$, $R_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ (*voir* chapitre précédent), de même, il existe un homomorphisme

$$R_{C(E)} : \quad C(E) \to C_W(E)$$

qui, à toute connexion sur $\mathcal{E}$ associe une connexion sur $\mathcal{R}(\mathfrak{W}^0(\mathcal{E}))$ et, par suite, une $W(E)$-différentiation covariante. L'existence d'un homomorphisme adjoint $a_{C(E)} : C(E) \to \underline{\underline{C}}(E)$ est une application immédiate de ce résultat. C'est au paragraphe 3 que ces homomorphismes sont introduits. On les présente comme des cas particuliers de la proposition générale qui montre qu'à tout couple d'homomorphismes compatibles (φ, h) liant deux espaces fibrés principaux $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, est associé un homomorphisme $\varphi^h_{C(E)}$ des faisceaux de connexions correspondants.

La fin du chapitre est consacrée à l'induction, par une application différentiable, des différents espaces et faisceaux associés à un espace fibré principal différentiable.

Indiquons pour terminer, que les formules classiques de Géométrie différentielle locale ne sont pas démontrées, elles sont simplement transcrites dans le langage utilisé ici. Pour leur démonstration, nous renvoyons par exemple à Lichnerowicz [1].

1. L'application X et les opérations de M sur C. — Nous noterons δ la forme fondamentale invariante à gauche sur G, c'est-à-dire la forme différentielle linéaire sur G, à valeurs dans l'algèbre de Lie $\underline{G}$ de G, qui, à tout vecteur v tangent à G en l'un de ses points, fait correspondre le champ invariant à gauche auquel il appartient. La projection naturelle $\mathfrak{M} = G \times \mathcal{X} \to G$ induit, à partir de δ, une forme différentielle linéaire X^0, à valeurs dans $\underline{G}$, sur $\mathfrak{M}$.

Soit $\underline{m}$ une section locale du faisceau M sur un voisinage ouvert U de $x_0 \in \mathcal{X}$. Conformément à la notation introduite au paragraphe I.10, $\overline{m}$ est une section différentiable de $\mathfrak{M}$, correspondant à $\underline{m}$. Nous définirons alors $\overline{X}(\underline{m})$ comme la forme différentielle sur U induite à partir de X^0 par l'application $\overline{m} : U \to \mathfrak{M}$ ou, en d'autres termes, comme la restriction de X^0 à $\overline{m}$. On passe immédiatement de cette définition à celle d'un *homomorphisme de faisceaux*

$$X : \quad M \to L^1$$

tel que $\underline{X}(\underline{m}) = X \circ \underline{m}$ soit la section de L^1 (faisceau des 1-formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\underline{G}$) correspondant à la forme différentielle $\overline{X}(\underline{m})$ (7).

On vérifie alors la formule

$$(III.1.1) \qquad X(m.m') = X(m') + \mathrm{Adj}(m'^{-1})\, X(m) \qquad (m,\ m' \in M_x).$$

Remarques. — 1° En considérant $\overline{m}$ comme une application différentiable $\overline{m} : U \to G$, on définit directement la forme $\overline{X}(\underline{m})$ par l'égalité

$$[\overline{X}(\underline{m})]_x \delta_{\overline{m}(x)} \circ [d\overline{m}]_x.$$

2° En notant N^0 le faisceau des sections différentiables du produit $\mathfrak{N}^0$ du centre H de la composante connexe G^0 de G, par $\mathfrak{X}$, on voit facilement que X applique N^0 dans le centre K^1 de L^1. Mais il ne s'agit pas d'un homomorphisme surjectif : en effet, en anticipant sur ce qui suit, on voit [formule (III.2.2)] que si θ est un élément de K^1 tel que $X(m) = \theta(m \in M)$, on a $d\theta = 0$ où d désigne la différentielle ordinaire sur K^1.

Définition III.1.1. — *On appellera faisceau des préconnexions de type* G *sur* $\mathfrak{X}$, *et l'on notera* C *le faisceau sous-jacent à* L^1 (*c'est-à-dire* L^1 *débarrassé de ses structures algébriques*) *muni :*

1° *de l'identification naturelle* $A : C \to L^1$;

2° *des opérations à gauche de* M *définies par*

$$(III.1.2) \qquad C(m)\omega = A^{-1}(X(m^{-1}) + \mathrm{Adj}(m)\, A(\omega)) \qquad (m \in M,\ \omega \in C).$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut vérifier que

$$C(mm')\,\omega = C(m)\,(C(m')\omega) \qquad (m,\ m' \in M_x \text{ et } \omega \in C_x).$$

Or,

$$\begin{aligned} C(mm')\omega &= A^{-1}(X((mm')^{-1}) + \mathrm{Adj}(mm')\, A(\omega)) \\ &= A^{-1}(X(m'^{-1}m^{-1}) + \mathrm{Adj}(mm')\, A(\omega)) \\ &= A^{-1}(X(m^{-1}) + \mathrm{Adj}(m)\, X(m'^{-1}) + \mathrm{Adj}(m)\,\mathrm{Adj}(m')\, A(\omega)) \\ &= C(m)\, C(m')\omega). \end{aligned}$$

On a alors

Proposition III.1.1. — L^1 *opère sur* C *de façon simplement transitive par*

$$(\omega,\ \theta) \to \omega + \theta = A^{-1}(A(\omega) + \theta) \qquad (\omega \in C_x,\ \theta \in L^1_x)$$

et l'on a

$$C(m)\,(\omega + \theta) = C(m)\omega + \mathrm{Adj}(m)\,\theta \qquad (m \in M_x).$$

(7) La forme $\overline{X}(\underline{m})$ n'est autre que la forme habituellement notée $m^{-1}\, dm$ (m étant considérée alors comme une fonction différentiable de U dans G).

En effet,

$$\begin{aligned} C(m)(\omega+\theta) &= A^{-1}(X(m^{-1}) + \mathrm{Adj}(m)(A(\omega)+\theta)) \\ &= A^{-1}(A(C(m)\omega) + \mathrm{Adj}(m)\theta) \\ &= C(m)\omega + \mathrm{Adj}(m)\theta. \end{aligned}$$

Nous considérons maintenant un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ de base $\mathfrak{X}$ et de groupe structural G.

Définition III.1.2. — *On appellera faisceau des connexions de* $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$, *le faisceau* C(E) *obtenu en modelant sur le faisceau* E (*des sections différentiables de* $\mathcal{E}$), *le faisceau* C *des préconnexions de type* G *sur* $\mathfrak{X}$, M *opérant sur* C *par* C(*m*).

On a alors les deux propositions suivantes qui découlent des résultats généraux du paragraphe I.5 et de ce qui précède :

Proposition III.1.2. — M(E) *opère à gauche sur* C(E) (*par* $m, \omega) \to C(m)\omega$, *et l'on a*

$$j_C(z)(C(m)\omega) = C(j_M(z)m)(j_C(z)\omega) \qquad [\omega \in C(E),\ m \in M(E),\ z \in E].$$

Proposition III.1.3. — $L^1(E)$ *opère sur* C(E) *de façon simplement transitive par* $(\omega, \theta) \to \omega + \theta\,[\omega \in C_x(E),\ \theta \in L^1_x(E)]$, *et l'on a*

$$j_C(z)(\omega+\theta) = j_C(z)\omega + j_L(z)\theta \qquad (z \in E_x).$$

Exemple. — Soit C_m le faisceau des préconnexions de type $Gl(m, R)$ sur $\mathfrak{X}$. On a explicitement pour $\mu = (\mu^i{}_j)\,[\mu \in M_m]$:

$$X(\mu) = \left(\sum_{j=1}^{m} \overline{\mu}^1{}_{i_j}\, d\mu^j{}_h \right) \qquad (i, h = 1, \ldots, m)$$

et

$$A(C(\mu)\omega) = \left(\sum_{h,k=1}^{m} (\overline{\mu}^1{}_{i_h}\, d\mu^h{}_j + \overline{\mu}^1{}_{i_h}\omega^h{}_k \mu^k{}_j) \right) \qquad (\omega \in C_m). \tag{III.1.3}$$

avec $A(\omega) = (\omega^i{}_j)$, les $\omega^i{}_j$ étant des germes de formes différentielles linéaires ordinaires sur $\mathfrak{X}$ et $(\omega^i{}_j)$, une matrice carrée $(i, j = 1, \ldots, m)$. Le *faisceau des connexions linéaires* d'un espace fibré différentiable à fibre vectorielle dont l'espace des repères est $\mathcal{R}$ est le faisceau $C_m(R)$ (R = faisceau des sections différentiables de $\mathcal{R}$).

Définition III.1.3. — *Une connexion sur* $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ *est une section globale de* C(E).

L'existence d'une telle connexion résulte du fait que $L^1(E)$, qui est le faisceau des sections différentiables d'un espace fibré à fibre *vectorielle* $\mathcal{L}^1(\mathcal{E})$, opère sur C(E) de façon simplement transitive (raisonnement classique).

La notion de connexion telle qu'elle résulte de la définition ci-dessus, se

rattache directement à la notion habituelle de *forme de connexion*. En effet, étant donnée une section $\omega : U \to C(E)$ du faisceau des connexions de $\mathcal{E}$, il existe une forme différentielle linéaire $f(\omega)$, prenant ses valeurs dans G, définie sur $\mathcal{E}_U$ ettelle que, quelle que soit la section $\bar{y} : U \to \mathcal{E}_U$ de $\mathcal{E}_U$, la restriction de $f(\omega)$ à $\bar{y}$ [c'est-à-dire la forme différentielle sur U induite par l'application différentiable $\bar{y}$ à partir de $f(\omega)$], s'identifie à l'image de ω par l'isomorphisme $j_c(\underline{y})$.

Plus précisément, l'isomorphisme A transforme la section $j_c(\underline{y})\omega$ de C [définie en toute rigueur par $[j_c(\underline{y})\omega](x) = j_c(\underline{y}(x))\omega(x)$, $x \in U$] en une section de L^1 qui peut être considérée comme une forme différentielle linéaire $\omega_{\underline{y}}$ sur U, à valeurs dans $\underline{G}$. C'est à cette forme qu'est égale la restriction à $\bar{y}$ de $f(\omega)$. Encore faut-il montrer l'existence de cette dernière. Il suffit pour cela de noter $\omega_{\underline{y}}^{\sharp}$ la forme induite sur $\mathfrak{M}_U = U \times G$ par $p_{\mathfrak{M}}$, à partir de $\omega_{\underline{y}}$ et $\psi_{\underline{y}} : \mathcal{E}_U \to U \times G$, l'homéomorphisme défini par l'égalité

$$\psi_{\underline{y}}(\bar{y}(x).s) = (x, s) \qquad (x \in U,\ s \in G).$$

En revenant à la définition de $C(m)$ et en utilisant la proposition III.1.2, on vérifie alors que, si $\underline{y}$ et $\underline{y}'$ désignent deux sections distinctes de $\mathcal{E}_U$, les formes induites sur $\mathcal{E}_U$ par $\psi_{\underline{y}}$ et $\psi_{\underline{y}'}$, à partir de $X^0 + \omega_{\underline{y}}^{\sharp}$ et $X^0 + \omega_{\underline{y}'}^{\sharp}$ respectivement, coïncident. On définit donc ainsi, indépendamment de la section $\bar{y}$ choisie, une forme $f(\omega)$ qui possède les propriétés signalées.

Nous ne conserverons pas la notation $f(\omega)$ et ce sera généralement la même lettre qui représentera la forme de connexion et la section de C(E) qu'elle représente. Nous nous contenterons de préciser éventuellement ce que signifie exactement le symbole utilisé. Par contre, le champ invariant par les translations à droite de G sur $\mathcal{E}$, transversal aux fibres et défini par $\omega = 0$ où ω est une forme de connexion, sera appelé *champ de connexion* et noté $c(\omega)$, tandis qu'on désignera par φ_ω le projecteur $\varphi_\omega = \beta^{-1} \circ \omega$, où β est la forme identifiant les vecteurs verticaux aux éléments de $\underline{G}$ (*voir* § II.4).

2. Différentiation. — Le but de ce paragraphe est de donner les formules qui conduisent aux notions de courbure et de différentiation covariante. Le même symbole d notera la différentiation ordinaire dans les faisceaux F (formes ordinaires) L (formes à valeurs dans $\underline{G}$) et W (formes à valeurs dans un espace vectoriel $\mathfrak{W}_0$ de dimension m). On a alors

$$\text{(III.2.1)} \qquad \begin{cases} d(\alpha \wedge \theta) = d\alpha \wedge \theta + (-1)^r \alpha \wedge d\theta & (\alpha \in F_x^r,\ \theta \in W_x \text{ ou } L_x), \\ d[\theta, \theta'] = [d\theta, \theta'] + (-1)^p [\theta, d\theta'] & (\theta \in L_x^p,\ \theta' \in L_x^q). \end{cases}$$

Par ailleurs, la différentiation est liée à $X(m)$ et $C(m)$ par les formules

$$\text{(III.2.2)} \qquad dX(m) + \frac{1}{2}[X(m), X(m)] = 0 \qquad (m \in M),$$

$$\text{(III.2.3)} \qquad \mathrm{Adj}(m^{-1})(d(\mathrm{Adj}(m)\theta)) = d\theta + [X(m), \theta] \qquad (\theta \in L).$$

D'où l'on déduit

$$(\text{III}.2.4)\quad d\mathrm{A}(\mathrm{C}(m)\omega)+\frac{1}{2}[\mathrm{A}(\mathrm{C}(m)\omega),\mathrm{A}(\mathrm{C}(m)\omega)]=\mathrm{Adj}(m)\,d\mathrm{A}(\omega)+\frac{1}{2}[\mathrm{A}(\omega),\mathrm{A}(\omega)]\quad(\omega\in\mathrm{C}),$$

formule qui montre qu'en définissant un homomorphisme de faisceaux

$$\Omega:\quad \mathrm{C}\to\mathrm{L}^2$$

par

$$\Omega(\omega)=d\mathrm{A}(\omega)+\frac{1}{2}[\mathrm{A}(\omega),\mathrm{A}(\omega)]\qquad(\omega\in\mathrm{C}),$$

on a la *relation de compatibilité*

$$\Omega(\mathrm{C}(m)\omega)=\mathrm{Adj}(m)\Omega(\omega)\qquad(\omega\in\mathrm{C},\ m\in\mathrm{M}).$$

Il en résulte que l'homomorphisme Ω de C dans L^2 détermine par modelage (*voir* prop. I.5.2) un homomorphisme de faisceaux

$$\Omega_{\mathrm{E}}:\quad \mathrm{C}(\mathrm{E})\to\mathrm{L}^2(\mathrm{E}).$$

Si $\omega\in\mathrm{C}(\mathrm{E})$, $\Omega_{\mathrm{E}}(\omega)$ est la *courbure de* ω. Comme, en général, il n'y a pas de confusion possible, nous supprimerons l'indice E et la courbure d'une connexion (ou d'un germe de connexion) ω sur $\mathfrak{E}(\mathfrak{X},\mathrm{G})$ sera simplement noté $\Omega(\omega)$.

En revenant maintenant aux notations du paragraphe II.1, en notant $\mu\mathrm{X}$ et $\mathrm{Z}.\mathrm{X}$ les transformés de $\mathrm{X}\in\mathfrak{W}_0$ par $\mu\in\Gamma(\mathfrak{W}_0)$ et $\mathrm{Z}\in\Gamma(\mathfrak{W}_0)$, et en étendant ces notations aux opérations correspondantes de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{W}_0}$ et $\underline{\underline{\mathfrak{W}}}$ sur $\mathfrak{W}$, on a

$$(\text{III}.2.5)\qquad \overline{\mu}^{1}(d(\mu\theta))=d\theta+\mathrm{X}(\mu).\theta\qquad(\mu\in\mathrm{M},\ \theta\in\mathrm{W}),$$

formule dont la transcription pour une base $f=(f_i)\,(i=1,\ \ldots,\ m)$ de $\mathfrak{W}_0$ par rapport à laquelle $\mu=(\mu^i{}_j)$ et $\theta=\sum_{i=1}^{m}\theta^i f_i$, est

$$(\text{III}.2.6)\qquad \sum_{i,j,k=1}^{m}\overline{\mu}^{1}{}^i{}_j\,d(\mu^j{}_k\theta^k)f_i=\sum_{i,j,k=1}^{m}(d\theta^i+\overline{\mu}^{1}{}^i{}_j\,d\mu^j{}_k\wedge\theta^k)f_i.$$

3. Différentiation covariante. — Soit C_{W} le faisceau des préconnexions de type $\Gamma(\mathfrak{W}_0)$ sur $\mathfrak{X}$. A $\overline{\omega}\in\mathrm{C}_{\mathrm{W},x}$, on associe l'opérateur $\Delta:\mathrm{W}_x\to\mathrm{W}_x$ défini par

$$(\text{III}.3.1)\qquad \Delta\theta=d\theta+\mathrm{A}(\overline{\omega}).\theta\qquad(\theta\in\mathrm{W}_x).$$

Si Δ' est associé à $\overline{\omega}'\in\mathrm{C}_{\mathrm{W},x}$ et si $\omega\neq\overline{\omega}'$, on a manifestement $\Delta\neq\Delta'$. L'ensemble des opérateurs Δ correspondant à tous les éléments de C_{W} constitue donc un faisceau D_{W} isomorphe à C_{W} et appelé faisceau des W-*différentiations covariantes*. On notera $\mathrm{B}_{\mathrm{W}}:\mathrm{C}_{\mathrm{W}}\to\mathrm{D}_{\mathrm{W}}$ l'isomorphisme canonique résultant de la définition de D_{W}. Le faisceau M opère sur D_{W} par des opérations notées $\underline{\mathrm{D}}(\mu)$ et définies par

$$(\text{III}.3.2)\qquad \underline{\mathrm{D}}(\mu)\Delta=\mu\circ\Delta\circ\overline{\mu}^{1}\qquad(\mu\in\mathrm{M}_{\mathrm{W}}),$$

$\underline{D}(\mu)$ et $C(\mu)$ sont liées par la formule de compatibilité

$$\underline{D}(\mu)B_W(\overline{\omega}) = B_W(C(\mu)\overline{\omega}) \qquad (\overline{\omega}\in C_W) \tag{III.3.3}$$

qui résulte de (III.2.5).

Comme on peut faire opérer M sur D_W et C_W grâce à l'homomorphisme $R_M : M \to M_{\mathfrak{W}^0}$, déduit de $R : G \to \Gamma(\mathfrak{W}^0)$, on peut construire par modelage sur E, les faisceaux $D_W(E)$ et $C_W(E)$, isomorphes par

$$B_{W(E)} : \quad C_W(E) \to D_W(E),$$

comme le montre la formule de compatibilité (III.3.3). $D_W(E)$ est le faisceau des W(E)-*différentiations covariantes* et nous verrons dans un instant que $C_W(E)$ est isomorphe au faisceau des connexions linéaires de W(E).

D'autre part, la formule (III.3.2) qui s'écrit également

$$(\underline{D}(\mu)\Delta)(\mu\theta) = \mu(\Delta\theta)$$

montre que $\Delta\in D_{W,x}(E)$ opère sur $W_x(E)$, avec la formule habituelle

$$j_W(z)\Delta\theta = \big(j_{D_W}(z)\Delta\big)\big(j_W(z)\theta\big) \qquad [z\in E_x,\ \Delta\in D_{W,x}(E),\ \theta\in W_x(E)]$$

et aussi que $M_{\mathfrak{W}^0}(E)$ opère sur $D_W(E)$, opération notée $\underline{D}(\mu)$, bien entendu.

Les formules fondamentales suivantes relient la différentiation covariante à la multiplication extérieure par les formes de la base, d'une part, à la courbure, d'autre part

$$\Delta\alpha \wedge \theta = d\alpha \wedge \theta + (-1)^p \alpha \wedge \Delta\theta \qquad [\alpha\in F^p_x,\ \theta\in W_x(E)], \tag{III.3.4}$$

$$\Delta^2\theta = \Omega(\overline{\omega}).\theta \qquad [\overline{\omega}\in C_W(E) \text{ et } \Delta = B_{W(E)}(\overline{\omega})]. \tag{III.3.5}$$

Leur vérification est classique. Remarquons qu'en toute rigueur (III.3.5) n'a de sens qu'en fonction de la proposition III.3.1 ci-dessous, puisque nous n'avons défini la courbure que dans le cas d'un germe de connexion et que nous n'avons pas encore montré que $C_W(E)$, dont fait partie $\overline{\omega}$, est le faisceau des connexions de $\mathcal{R}(\mathfrak{W}^0(\mathcal{E}))$.

Pour vérifier cela, on définit un isomorphisme

$$j'_{C_W}(\rho) : \quad C_{W,x}(E) \to C_{m,x}$$

pour tout $\rho\in R$ [faisceau des sections différentiables de $\mathcal{R}(\mathfrak{W}^0(\mathcal{E}))$], par

$$\rho = (\rho_i), \qquad j'_{C_W}(\rho)\overline{\omega} = (\overline{\omega}^i{}_j), \qquad B_{W(E)}(\overline{\omega}) = \Delta \qquad \text{et} \qquad \Delta\rho^i = \sum_{j=1}^{m} \overline{\omega}^i{}_j \rho_j,$$

Les formules (III.1.3) et (III.3.4) montrent que

$$j'_{C_W}(\rho.\mu) = C(\mu^{-1}) \circ j'_{C_W}(\rho) \qquad (\rho\in R,\ \mu\in M_m),$$

ce qui entraîne la proposition :

PROPOSITION III.3.1. — *L'isomorphisme*

$$h_{C_W} = i_{C_m}(\rho) \circ j'_{C_W}(\rho) \qquad (\rho \in R),$$

ne dépendant que de la projection de ρ *sur* $\mathfrak{X}$, *identifie* $C_W(E)$ *et* $C_m(R)$ *qui seront donc appelés l'un et l'autre,* faisceau des connexions linéaires de $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$.

4. HOMOMORPHISMES. — Soit $(\varphi : G \to G', h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}')$ un couple d'homomorphismes compatibles. A φ sont associés $\underline{\varphi} : \underline{G} \to \underline{G}'$ ainsi que $\varphi_{\mathfrak{M}}$, φ_M, $\varphi_{\mathcal{L}}$, φ_L. Nous allons voir qu'on a

$$\varphi_L(X(m)) = X(\varphi_M(m)) \qquad (m \in M).$$

En effet, notons $d\varphi$ la différentielle de φ, et soit $\underline{m}$ une section de M sur U. En considérant $\overline{m}$ comme une fonction différentiable de U dans G :

$$[\overline{X}(\underline{m})]_x = \delta_{\overline{m}(x)} \circ [d\overline{m}]_x$$

et

$$\overline{X}(\varphi_M(\underline{m}))_x = \delta_{\varphi(\overline{m}(x))} \circ [d(\varphi \circ \overline{m})]_x = \delta_{\varphi(\overline{m}(x))} \circ [d\varphi]_{\overline{m}(x)} \circ [d\overline{m}]_x.$$

La formule annoncée résulte alors de

$$\varphi \circ \delta_y = \delta_{\varphi(y)} \circ [d\varphi]_y \qquad (y \in G)$$

qui sert à définir $\underline{\varphi}$.

Il en résulte qu'en notant C (resp. C') le faisceau des préconnexions de type G (resp. G') sur $\mathfrak{X}$, il existe un homomorphisme

$$\varphi_C : \quad C \to C'$$

défini par

$$\varphi_C = A^{-1} \circ \varphi_{L^1} \circ A$$

pour lequel on a la relation de compatibilité

$$\varphi_C(C(m)\omega) = C(\varphi_M(m))\varphi_C(\omega) \qquad (\omega \in C).$$

En vertu des propositions du paragraphe I.5, il existe donc un homomorphisme

$$\varphi^h_{C(E)} : \quad C(E) \to C'(E')$$

relié à φ_C par la relation habituelle

$$\varphi_C(j_C(z)\omega) = j_{C'}(h(z))\,\varphi^h_{C(E)}(\omega).$$

On déduit de cette dernière formule, transposée en termes de vecteurs tangents, qu'étant données une connexion ω sur $\mathcal{E}$ et $\omega' = \varphi^h_{C(E)}(\omega)$ [ou, si l'on préfère, $\omega' = \varphi^h_{C(E)} \circ \omega$], on a, en conservant les notations ω et ω' pour repré-

senter les formes de connexions correspondantes

$$\omega'_{h(y)} \circ (dh)_y = \underline{\varphi} \circ \omega_y \qquad (y \in \mathcal{E}),$$

où $\omega'_{h(y)}$ et ω_y sont des formes linéaires sur les espaces vectoriels tangents à $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$ aux points $h(y)$ et y, qui prennent leurs valeurs dans $\underline{G}'$ et $\underline{G}$, et où $(dh)_y$, différentielle de h au point y, applique les vecteurs tangents à $\mathcal{E}$ au point y dans les vecteurs tangents à $\mathcal{E}'$ au point $h(y)$. Il en résulte également que le champ de connexion $c(\omega)$ est projetable par h et que, sur $h(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}'$, son image $h(c(\omega))$ est $c(\omega')$.

En outre, on vérifie que l'image de la courbure d'une connexion ω par l'homomorphisme $\varphi^h_{L(E)}$ est la courbure de la connexion-image de ω par $\varphi^h_{C(E)}$:

$$\Omega(\varphi^h_{C(E)}(\omega)) = \varphi^h_{L(E)}(\Omega(\omega)). \tag{III.4.1}$$

Application. — En particulier, et d'une façon tout à fait analogue à ce qu'on a vu au paragraphe II.5, il existe un homomorphisme

$$R_{C(E)} : \quad C(E) \to C_m(R) = C_W(E)$$

associé à (R', Ψ') mais indépendant du choix de f puisque, après identification de $C_m(R)$ et $C_W(E)$, $R_{C(E)}$ provient, par modelage, de $R_C : C \to C_W$.

L'image de C(E) par $R_{C(E)}$ est le *faisceau des connexions linéaires de type* R. L'image du faisceau des connexions de type R par $B_{W(E)}$ est le *faisceau des différentiations covariantes de type* R. Étant donnée une connexion ω sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, $R_{C(E)}(\omega) = \overline{\omega}$ est la *connexion linéaire de type* R *associée* et l'opérateur $\Delta = B_{W(E)}(\overline{\omega})$ est la *différentiation covariante de type* R *associée à* ω ou encore, la W(E)-*différentiation covariante associée.*

Les formules (III.3.5) et (III.4.1) montrent qu'en conservant les notations précédentes, on a

$$\begin{cases} \Omega(\overline{\omega}) = R_{L(E)}(\Omega(\omega)) \\ \Delta^2 0 = R_{L(E)}(\Omega(\omega)).0 \qquad 0 \in W(E)]. \end{cases} \tag{III.4.2}$$

Cas particulier. — Soient $\mathfrak{V}'_0$ et $\mathfrak{V}''_0$ deux espaces vectoriels sur lesquels G opère par l'intermédiaire de R' et R'', et $\Lambda(u, v)$ $(u \in \mathfrak{V}_0, v \in \mathfrak{V}'_0)$ une application bilinéaire à valeurs dans $\mathfrak{V}''_0$ telle que

$$\Lambda(R(s)u, R'(s)v) = R''(s)\Lambda(u, v) \qquad (s \in G). \tag{III.4.3}$$

Cette égalité entraîne, pour les représentations $\underline{R}$, $\underline{R}'$ et $\underline{R}''$ de l'algèbre de Lie de G,

$$\Lambda(\underline{R}(X)u, v) + \Lambda(u, \underline{R}'(X)v) = \underline{R}''(X)\Lambda(u, v) \qquad (X \in G). \tag{III.4.4}$$

De (III.4.3), on déduit l'existence d'une forme bilinéaire (antisymétrisée)

$$\Lambda(0, 0'), \quad 0 \in \mathfrak{V}(\mathcal{E}), \quad 0' \in \mathfrak{V}'(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad \Lambda(0, 0') \in \mathfrak{V}''(\mathcal{E}).$$

Si Δ, Δ', Δ'' sont respectivement les W(E)-, W'(E)- et W''(E)-différentiations

covariantes associées à une *même connexion* ω de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$, la formule (III.4.4) montre qu'on a

$$(\text{III}.4.5)\quad \Delta''\Lambda(\theta, \theta') = \Lambda(\Delta\theta, \theta') + (-1)^p \Lambda(\theta, \Delta'\theta') \qquad [\theta \in W^p(E) \text{ et } \theta' \in W'(E)].$$

Exemple :

$$d\langle \theta, \theta' \rangle = \langle \Delta\theta, \theta' \rangle + (-1)^p \langle \theta, \check{\Delta}\theta' \rangle \qquad \left[\theta \in W^p(E),\ \theta' \in \check{W}(E)\right].$$

Remarquons enfin que la formule (III.3.4) est un cas particulier de (III.4.6).

5. L'HOMOMORPHISME ADJOINT $C(E) \to \underline{\underline{C}}(E)$. — Dans le cas où $\mathfrak{W}_0 = \underline{G}$, le faisceau C_W sera noté $\underline{\underline{C}}$ et l'homomorphisme $R_{C(E)}$ devient un homomorphisme

$$a_{C(E)} : \quad C(E) \to \underline{\underline{C}}(E) = C_n(R)$$

appelé C(E)-*homomorphisme adjoint* [dans $C_n(R)$, R désigne naturellement le faisceau des sections différentiables de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$].

Quant au faisceau $D_W(E)$, il sera purement et simplement noté D(E) lorsque $\mathfrak{W}_0 = \underline{G}$. L'isomorphisme B correspondant

$$B_{L(E)} : \quad \underline{\underline{C}}(E) \to D(E)$$

joint à $a_{C(E)}$, associe une L(E)-différentiation covariante à toute connexion sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$. En effet, $a_{C(E)}$ transforme d'abord $\omega \in C(E)$ en $\underline{\underline{\omega}} = a_{C(E)}(\omega) \in \underline{\underline{C}}(E)$ et $B_{L(E)}$ associe à $\underline{\underline{\omega}}$ un élément de D(E). On notera $\nabla(E)$ le faisceau-image de C(E) par ces deux homomorphismes

$$\nabla(E) = B_{L(E)}(a_{C(E)}(C(E))) \subset D(E)$$

et on l'appellera *faisceau des différentiations covariantes de type adjoint*. L'image par $B_{L(E)} \circ a_{C(E)}$ d'une connexion ω sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ sera appelée la L(E)-*différentiation covariante associée à* ω (ou différentielle covariante de type adjoint associée).

Comme $\underline{\underline{M}}(E)$ opère sur D(E) par $\underline{D}(\mu)$, M(E) opère sur $\nabla(E)$ par

$$\nabla(m) = \underline{D}(a_{M(E)}(m)) \qquad [m \in M(E)]$$

et la formule (III.3.2) s'écrit

$$\nabla(m)\Delta = \mathrm{Adj}(m) \circ \Delta \circ \mathrm{Adj}(m^{-1}) \qquad [\Delta \in \nabla(E) \text{ et } m \in M(E)].$$

Formules fondamentales. — La formule (III.4.6) montre qu'on a, pour $\nabla \in \Delta(E)$:

$$(\text{III}.5.1)\qquad \Delta[\theta, \theta'] = [\Delta\theta, \theta'] + (-1)^p [\theta, \Delta\theta'] \qquad [\theta \in L^p(E),\ \theta' \in L(E)]$$

et, si Δ est la L(E)-différentiation covariante associée à ω, l'égalité (III.4.2) donne

$$(\text{III}.5.2)\qquad \Delta^2\theta = [\Omega(\omega), \theta].$$

En outre, dans ce cas-là :

(III.5.3) $$\Delta(\Omega(\omega)) = 0 \qquad \text{(identité de Bianchi).}$$

D'autre part, on a les relations suivantes où ω et θ sont les formes différentielles sur $\mathcal{E}$ à valeurs dans $\underline{G}$ respectivement attachées à une connexion et à une forme tensorielle

(III.5.4) $$\Omega(\omega) = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \qquad \text{et} \qquad \Delta\theta = d\theta + [\omega, \theta].$$

Enfin, signalons qu'en recommençant les opérations précédentes avec l'espace fibré principal $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$, on peut définir un homomorphisme adjoint $a_{\mathfrak{D}(E)}$.

Diagrammes. — Tout ce que nous venons de dire au sujet des homomorphismes adjoints peut être résumé par les diagrammes suivants où, ainsi que

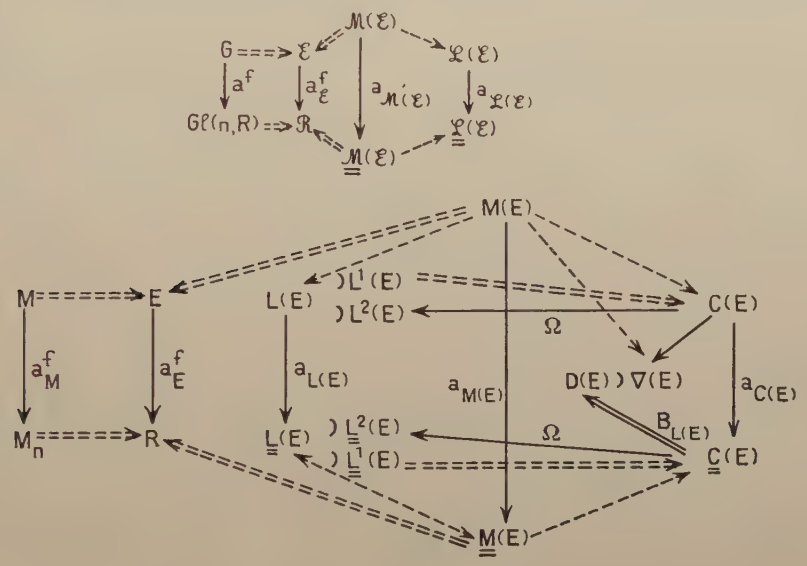


Fig. 4.

nous l'avons déjà indiqué, les traits pleins figurent des homomorphismes lorsqu'ils sont simples, des isomorphismes lorsqu'ils sont doubles et où les pointillés indiquent qu'un espace opère sur un autre, de façon simplement transitive si le trait est double. Nous donnons d'abord le diagramme relatif aux espaces fibrés, puis celui relatif aux faisceaux. Ces diagrammes sont compatibles en ce sens que toutes les égalités du type de celles données aux paragraphes I.4 et I.5 sont vérifiées.

Application. — On a vu que, en supposant G connexe, $a_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et $a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ permettent de déterminer des *isomorphismes dans*

$$a^{\gamma}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E})/\mathfrak{N}(\mathcal{E}) \to \underline{\underline{\mathfrak{M}}}(\mathcal{E}) \qquad \text{et} \qquad a^{\gamma}_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathcal{L}(\mathcal{E})/\mathcal{K}(\mathcal{E}) \to \underline{\underline{\mathcal{L}}}(\mathcal{E}).$$

De même, $C(E)/K^1(E)$ est le faisceau des connexions de $\mathscr{E}_\gamma = \mathscr{E}/H$ [il suffit pour le voir de remonter à la définition et de tenir compte de la deuxième remarque du paragraphe III.1, grâce à laquelle on peut faire opérer $M(E)/N(E)$ sur $C(E)/K^1(E)$, en faisant passer $C(m)$ au quotient] et l'on a un homomorphisme canonique

$$\gamma_{C(E)} : \quad C(E) \to C_\gamma(E_\gamma) = C(E)/K^1(E)$$

et un isomorphisme dans

$$a^\gamma_{C(E)} : \quad C_\gamma(E_\gamma) = C(E)/K^1(E) \to \underline{\underline{C}}(E).$$

On peut remarquer que, de même que $G_\gamma = G/H$ opère sur G par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs, on peut faire opérer G_γ sur $\underline{G}$ par l'intermédiaire des automorphismes adjoints, puisque le noyau de la représentation adjointe est le centre H de G. Par modelage, on obtient les espaces $\mathfrak{M}(\mathscr{E}_\gamma)$ et $\mathfrak{L}(\mathscr{E}_\gamma)$ qui sont manifestement isomorphes à $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$ et $\mathfrak{L}(\mathscr{E})$. On ne peut pas procéder de la même façon pour C. Cependant, toute connexion ω' sur $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$ détermine — conformément à la théorie générale des W(E)-différentiations covariantes — une $L(E_\gamma)$-différentiation covariante qui n'est autre que celle correspondant à la connexion linéaire $a_{C(E)}(\omega')$. De sorte que, s'il existe une connexion ω sur $\mathscr{E}$ telle que $\omega' = \gamma_{C(E)}(\omega)$, les L(E)- et $L(E_\gamma)$-opérateurs de différentiations covariantes associés respectivement à ω et ω', coïncident. Or :

Proposition III.5.1. — *Étant donnée une connexion ω' sur $\mathscr{E}_\gamma$, il existe toujours une connexion ω sur $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$ telle que $\omega' = \gamma_{C(E)}(\omega)$.*

En effet, $K^1(E)$ opère de façon simplement transitive sur $\gamma^{-1}_{C(E)}(\omega')$, et $K^1(E)$ est le faisceau des sections différentiables d'un espace fibré à fibre vectorielle : on retombe sur un raisonnement du même type que celui démontrant l'existence d'une connexion globale sur tout espace fibré principal différentiable à groupe structural ([8]).

6. Homomorphismes (*suite et fin*). — Il s'agit, dans ce paragraphe, d'examiner d'abord comment se comporte le faisceau des L(E)-différentiations covariantes adjointes par rapport aux homomorphismes associés à un couple d'homomorphismes compatibles (φ, h), puis de résumer par un diagramme l'effet d'un tel couple sur les espaces associés aux espaces fibrés principaux considérés.

Nous nous donnons donc comme d'habitude, deux espaces fibrés $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$ et $\mathscr{E}'(\mathscr{X}, G')$ liés par (φ, h). Soit Δ le germe de L(E)-différentiation covariante associée à $\omega \in C(E)$ et soit Δ' le germe de L'(E') — différentiation covariante associée à $\varphi^h_{C(E)}(\omega)$ ([9]).

([8]) On a un résultat identique en substituant à $(\gamma, \gamma_{\mathscr{E}})$ un couple (φ, h) quelconque.

([9]) On peut vérifier qu'en posant $\Delta' = \varphi^h_{\nabla(E)}(\Delta)$, on définit un homomorphisme.

PROPOSITION III.6.1. — *Dans les conditions ci-dessus, on a*

$$\Delta' \circ \varphi^h_{L(E)} = \varphi^h_{L(E)} \circ \Delta.$$

Cette égalité résulte de la même relation, vérifiée pour les faisceaux C, ∇ et L. Or, si Δ et Δ' sont associés respectivement à ω et $\varphi_C(\omega)$, $[\omega \in C]$, on a, par définition

$$\Delta\theta = d\theta + [A(\omega), \theta] \qquad (\theta \in L)$$

et

$$\Delta'\varphi_L(\theta) = d\varphi_L(\theta) + [A(\varphi_C(\omega), \varphi_L(\theta))].$$

Or, $\varphi_C(\omega) = A^{-1}(\varphi_L(A(\omega)))$ et $d \circ \varphi_L = \varphi_L \circ d$, ainsi qu'on le vérifie immédiatement en choisissant une base de $\underline{G}$, une base de $\underline{G}'$ et en exprimant φ_L par une matrice à coefficients constants. Les trois dernières formules démontrent la proposition. Cette démonstration ne diffère pas essentiellement de celle qui permet de vérifier la formule (III.4.1).

Diagrammes. — En résumé, l'effet d'un couple d'homomorphismes compatibles (φ, h) peut être représenté par les diagrammes compatibles suivants :

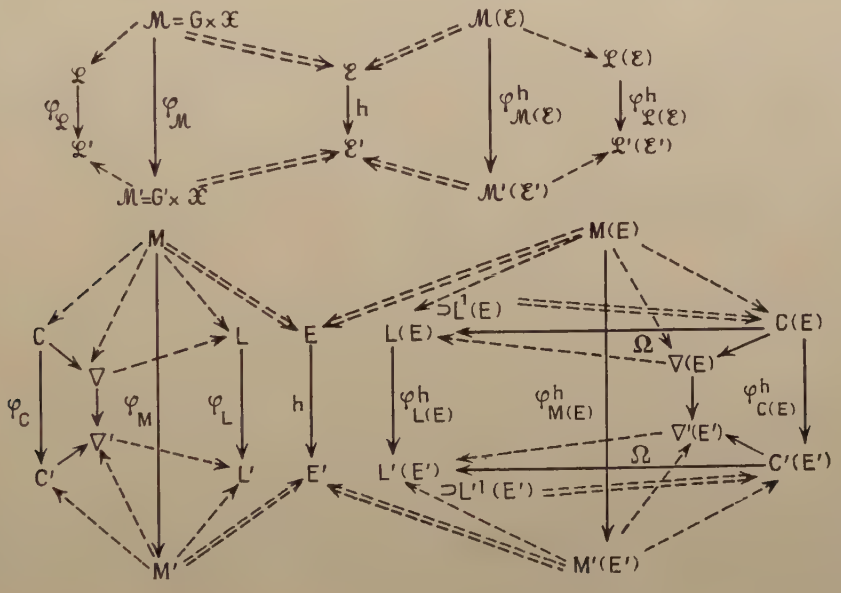


Fig. 5.

La compatibilité de la partie gauche de ce diagramme entraîne évidemment la compatibilité de la partie droite et les deux côtés sont reliés par des formules du type de celles de la proposition I.5.2 :

$$\text{(III.6.1)} \qquad \begin{cases} j_Z, (h(y)) \circ \varphi_{Z(\varepsilon)} = \varphi_Z \circ j_Z(y) \qquad (y \in \varepsilon) \\ (\varepsilon = \mathcal{E} \text{ et } Z = \mathfrak{M}, \mathcal{L} \text{ [resp. } \varepsilon = E \text{ et } Z = L, M, C, \nabla]). \end{cases}$$

7. ESPACES FIBRÉS ET FAISCEAUX INDUITS. — Soit $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$, une application

différentiable d'une variété différentiable $\mathscr{X}'$ dans $\mathscr{X}$. Conformément à ce qui a été dit au paragraphe I.10, il existe dans (ou entre) les espaces fibrés et les faisceaux induits :

$$f^{-1}(\mathscr{E}),\quad f^{-1}(\mathfrak{M}(\mathscr{E})),\quad f^{-1}(\mathfrak{L}(\mathscr{E})),\quad f^{-1}(\mathrm{E}),$$
$$f^{-1}(\mathrm{M}(\mathrm{E})),\quad f^{-1}(\mathrm{L}(\mathrm{E})),\quad f^{-1}(\mathrm{C}(\mathrm{E})),\quad f^{-1}(\nabla(\mathrm{E})),$$

les mêmes structures algébriques que celles existant dans (ou entre) les espaces et faisceaux $\mathscr{E}$, $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$, $\mathfrak{L}(\mathscr{E})$, E, M(E), L(E), C(E) et ∇(E), y compris les applications « point ». Ces structures sont liées les unes aux autres par les homomorphismes induits $f^{\#}$. Mais, si $f^{-1}(\mathfrak{M}(\mathscr{E}))$ est l'espace structural gauche de $f^{-1}(\mathscr{E})$, si $f^{-1}(\mathfrak{L}^0(\mathscr{E}))$ est l'espace de Lie de degré o de $f^{-1}(\mathscr{E})$, par contre, $f^{-1}(\mathfrak{L}(\mathscr{E}))$ n'est pas, en général, l'espace de Lie de $f^{-1}(\mathscr{E})$, pas plus que $f^{-1}(\mathrm{E})$ n'est le faisceau des sections différentiables de $f^{-1}(\mathscr{E})$. Cependant, de même qu'il existe un homomorphisme de $f^{-1}(\mathrm{E})$ sur le faisceau E′ des sections différentiables de $\mathscr{E}' = f^{-1}(\mathscr{E})$, de même, il existe des homomorphismes, notés $\hat{f}$, de $f^{-1}(\mathfrak{M}(\mathscr{E}))$, $f^{-1}(\mathfrak{L}(\mathscr{E}))$, $f^{-1}(\mathrm{M}(\mathrm{E}))$, etc. sur les espaces ou faisceaux correspondants intrinsèquement associés à $\mathscr{E}'(\mathscr{X}', \mathrm{G})$, c'est-à-dire $\mathfrak{M}'(\mathscr{E}')$, $\mathfrak{L}'(\mathscr{E}')$, M′(E′), etc. Ces homomorphismes sont des homomorphismes de toutes les structures algébriques existant sur ces espaces, y compris les applications « point ». Explicitons cela pour L(E) et C(E). Compte tenu de la proposition I.5.1, il suffira d'établir l'existence de ces homomorphismes pour L et C.

Remarquons tout d'abord que la différentielle $(df)_x : \mathscr{C}'^0_0 \to \mathscr{C}^0_{f(x)}$ ([10]) se traduit par un homomorphisme

$$(df)^{\#} :\quad \mathscr{C}'^0 \to f^{-1}(\mathscr{C}^0)$$

défini par l'égalité

$$\left(f^{\#}_{\mathscr{C}^0} \circ (df)^{\#}\right)_x = (df)_x, \tag{III.7.1}$$

où $f^{\#}_{\mathscr{C}^0}$ est, conformément à nos notations, l'homomorphisme induit

$$f^{\#}_{\mathscr{C}^0} :\quad f^{-1}(\mathscr{C}^0) \to \mathscr{C}^0.$$

Nous poserons alors

$$\hat{f}_{\mathscr{L}}(\theta) = \theta \circ (df)^{\#} \qquad (\theta \in \mathscr{L}). \tag{III.7.2}$$

En passant aux faisceaux, l'égalité

$$\widehat{\hat{f}_{\mathrm{L}}(\theta)} = \hat{f}_{\mathscr{L}}(\dot{\theta}) \qquad [\theta \in f^{-1}(\mathrm{L})],$$

permet de définir l'homomorphisme

$$\hat{f}_{\mathrm{L}} :\quad f^{-1}(\mathrm{L}) \to \mathrm{L}'.$$

([10]) $\mathscr{C}'^0$ désigne l'espace des vecteurs tangents à $\mathscr{X}'$, de même $\mathscr{L}'$ est l'espace des formes différentiables sur $\mathscr{X}'$ à valeurs dans $\underline{\mathrm{G}}$, $\mathfrak{M}' = \mathrm{G} \times \mathscr{X}'$, etc.

De même, en posant $\hat{f}_{\mathfrak{M}} = \text{identité}$, on définit $\hat{f}_{\mathrm{M}} : f^{-1}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}'$ par l'égalité

$$\widehat{\dot{f}_{\mathrm{M}}(m)} = \hat{f}_{\mathfrak{M}}(\dot{m}) \qquad [m \in f^{-1}(\mathrm{M})],$$

et l'on a les relations de compatibilité

$$\hat{f}_{\mathfrak{E}} \circ \mathrm{Adj}(m) = \mathrm{Adj}\big(\hat{f}_{\mathfrak{M}}(m)\big) \circ \hat{f}_{\mathfrak{E}} \qquad [m \in f^{-1}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}']$$
$$\hat{f}_{\mathrm{L}} \circ \mathrm{Adj}(m) = \mathrm{Adj}\big(\hat{f}_{\mathrm{M}}(m)\big) \circ \hat{f}_{\mathrm{L}} \qquad [m \in f^{-1}(\mathrm{M})].$$

Ces dernières relations montrent que la proposition I.5.1 est applicable et qu'il existe, par suite, un homomorphisme

$$\hat{f}_{\mathrm{L}(\mathrm{E})} : \quad f^{-1}(\mathrm{L}(\mathrm{E})) \to \mathrm{L}'(\mathrm{E}')$$

lié à $\hat{f}_{\mathrm{L}}$ par les relations habituelles.

Montrons maintenant qu'on a

$$\mathrm{X} \circ \hat{f}_{\mathrm{M}} = \hat{f}_{\mathrm{L}} \circ \mathrm{X}. \tag{III.7.3}$$

En effet, soit $m \in f^{-1}(\mathrm{M})$ [avec $p(m) = x$ et $f(x) = y$]. A partir de $\mathrm{X} : \mathrm{M} \to \mathrm{L}^1$ est induite une application $\mathrm{X} : f^{-1}(\mathrm{M}) \to f^{-1}(\mathrm{L}^1)$ et, pour définir $\mathrm{X}(m)$, nous choisirons une section locale $\underline{m}$ de M passant par $f^{\sharp}_{\mathrm{M}}(m)$. On a alors

$$f^{\sharp}_{\mathrm{L}}(\mathrm{X}(m)) = \mathrm{X}\big(f^{\sharp}_{\mathrm{M}}(m)\big) = \mathrm{X}(\underline{m}(y)),$$

tandis que $\hat{f}_{\mathrm{M}}(m) = \underline{m}'(x)$ avec $\overline{m}' = \overline{m} \circ f$. Comme $f^{\sharp}_{\mathrm{L}}(\mathrm{X}(m)) = \mathrm{X}(m) \circ (df)^{\sharp}$, il s'agit en définitive, de vérifier

$$(\mathrm{X}(\underline{m}) \circ df)_x = (\mathrm{X}(\underline{m}'))_x,$$

soit

$$(\delta \circ d\overline{m} \circ df)_x = (\delta \circ (d(\overline{m} \circ f)))_x,$$

ce qui est évident.

En revenant à la définition de $\mathrm{C}(m)$, la formule (III.7.3) montre alors qu'en définissant

$$\hat{f}_{\mathrm{C}} : \quad f^{-1}(\mathrm{C}) \to \mathrm{C}'$$

par

$$\mathrm{A} \circ \hat{f}_{\mathrm{C}} = \hat{f}_{\mathrm{L}} \circ \mathrm{A},$$

$\hat{f}_{\mathrm{C}}$ est compatible avec $\hat{f}_{\mathrm{M}}$ lorsque $f^{-1}(\mathrm{M})$ opère sur $f^{-1}(\mathrm{C})$ par $\mathrm{C}(m)$ et que M' opère sur C' par $\mathrm{C}(m)$ également. On en déduit l'existence de $\hat{f}_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}$, lié à $\hat{f}_{\mathrm{C}}$ par les relations habituelles.

Diagrammes. — En procédant ainsi pour tous les espaces envisagés, on

vérifie qu'on a les diagrammes compatibles suivants où la compatibilité de la partie gauche entraîne celle de la partie droite :

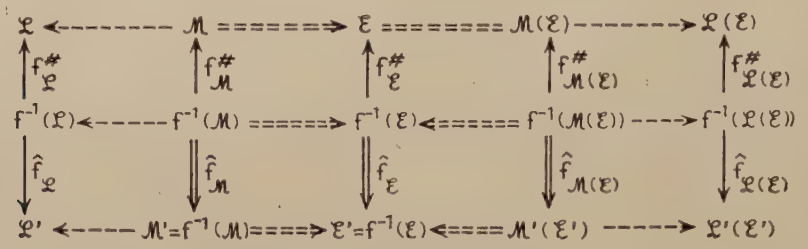


Fig. 6.

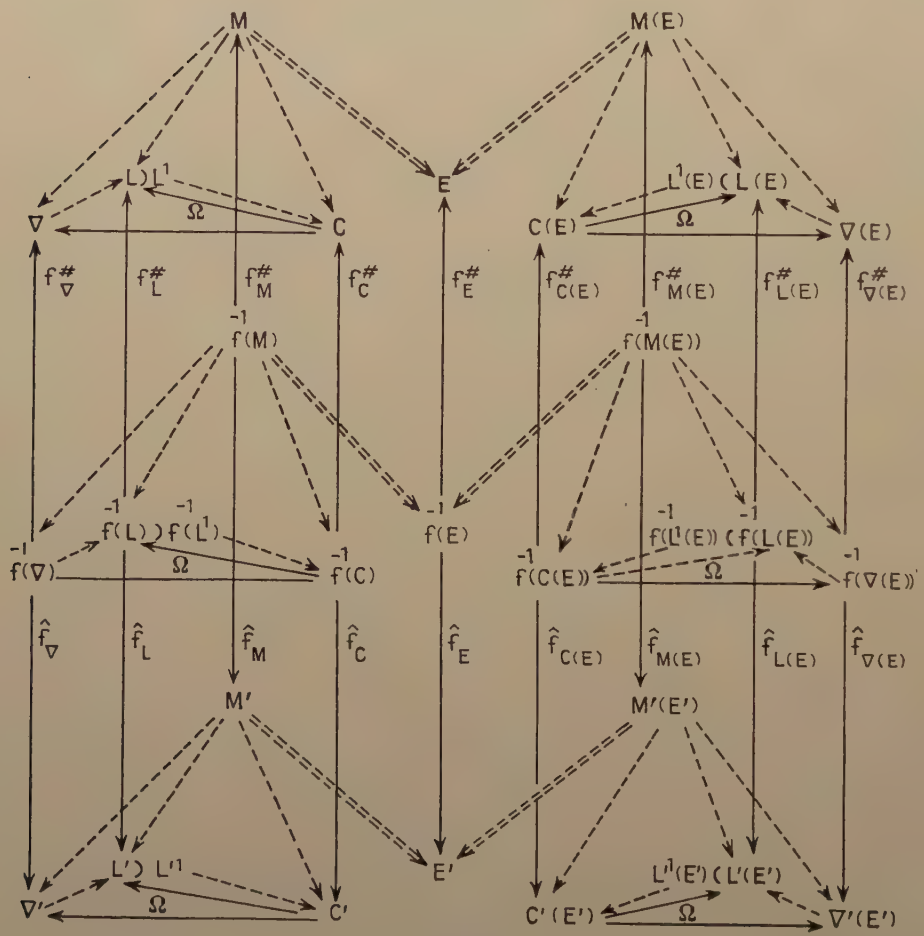


Fig. 7.

Soit alors V un ouvert de $\mathfrak{X}'$ tel que $f(V) \subset U$ (ouvert dans $\mathfrak{X}$) et soit $\sigma : U \to Z$ une section locale différentiable (resp. continue) de $Z(Z = \mathcal{E}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}(\mathcal{E}), \mathfrak{L}(\mathcal{E})$ [resp. $Z = E, L, M, C, \nabla, L(E), M(E), C(E), \nabla(E)$]). A partir de σ,

f induit d'abord sur V une section locale $\sigma^\#$ complètement définie par l'égalité (11)

$$f_Z^\#(\sigma^\#(x)) = \sigma(f(x)) \qquad (x \in \mathfrak{X}').$$

On obtient ensuite une section σ' de Z′ en posant

$$\sigma' = f_Z \circ \sigma^\#.$$

De sorte qu'en définitive, cette dernière section est complètement déterminée par l'égalité

$$\sigma'(x) = \hat{f}_Z\left(\overset{-1}{f}{}_Z^\#(\sigma(f(x)))\right) \qquad (x \in \mathfrak{X}').$$

En appliquant cette construction au cas $U = \mathfrak{X}$, on voit que toute forme de Lie sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ induit une forme de Lie sur $f^{-1}(\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G))$, que toute connexion sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ induit une connexion sur $f^{-1}(\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G))$, que toute différentiation covariante induit une différentiation covariante, etc.

8. Application. — Ce paragraphe est consacré, en vue d'applications au chapitre VI, à un cas où induction et homomorphisme se combinent. Considérons deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$ de même base et supposons qu'il existe un homomorphisme d'espaces fibrés différentiables à fibres-groupes de Lie :

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$$

des espaces structuraux gauches de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$ auquel est associé l'homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{L}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{L}'(\mathcal{E}')$$

de leurs espaces de Lie, puisque $\mathfrak{L}_x^0(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{L}_x'^0(\mathcal{E}')$ s'identifient aux algèbres de Lie de $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{M}_x'(\mathcal{E}')$. Nous ne supposons pas que ces homomorphismes proviennent d'un couple (φ, h), mais nous nous donnons deux connexions ω et ω' sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ respectivement, liées à $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}$ par les relations suivantes où Δ est la L(E)-différentiation covariante associée à ω et où Δ' est la L′(E′)-différentiation covariante associée à ω' :

$$\text{(III.8.1)} \qquad \begin{cases} \Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta, \\ \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)). \end{cases}$$

Nous considérons alors une application différentiable

$$f : \quad \bar{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$$

d'une variété différentiable $\bar{\mathfrak{X}}$ dans $\mathfrak{X}$. Il s'agit de montrer qu'on se trouve,

(11) *Voir* la fin du paragraphe I.7.

sur $\mathfrak{X}$, dans la même situation que celle qui existe sur $\mathfrak{X}$. Notons $\overline{\omega}$ la connexion induite sur $f^{-1}(\mathcal{E})$ à partir de ω, $\overline{\omega}'$ la connexion induite sur $f^{-1}(\mathcal{E}')$ à partir de ω'. L'espace de Lie (resp. structural gauche) de $\overline{\mathcal{E}} = f^{-1}(\mathcal{E})$ étant noté $\overline{\mathfrak{L}}(\overline{\mathcal{E}})$ [resp. $\overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{E}})$], celui de $\overline{\mathcal{E}}' = f^{-1}(\mathcal{E}')$ sera désigné par $\overline{\mathfrak{L}}'(\overline{\mathcal{E}}')$ [resp. $\overline{\mathfrak{M}}'(\overline{\mathcal{E}}')$]. Enfin, $\overline{\Delta}$ et $\overline{\Delta}'$ sont les $\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$- et $\overline{\mathrm{L}}'(\mathrm{E}')$-différentiations covariantes associées à $\overline{\omega}$ et $\overline{\omega}'$ (c'est-à-dire induite à partir de Δ et de Δ').

L'induction transforme les homomorphismes $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}$ en homomorphismes $\varphi_{\overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{E}})}$ et $\varphi_{\overline{\mathfrak{L}}(\overline{\mathcal{E}})}$ définis par les diagrammes commutatifs suivants :

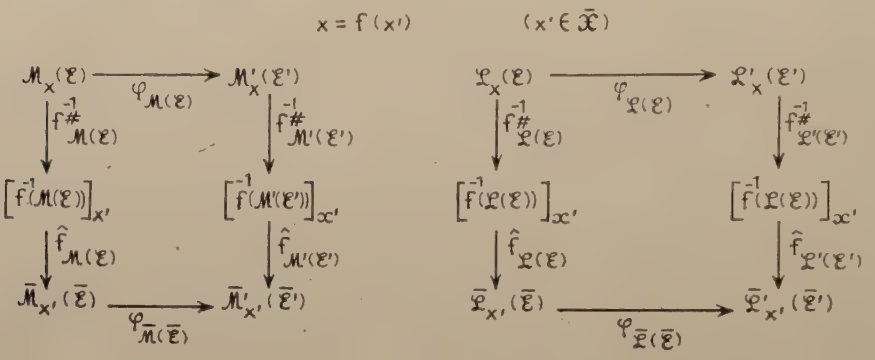


Fig. 8.

De la comparaison de ces deux diagrammes, on déduit immédiatement que $\varphi_{\overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{E}})}$ et $\varphi_{\overline{\mathfrak{L}}(\overline{\mathcal{E}})}$ sont associés. De plus, il est facile de voir qu'on a

$$\text{(III.8.2)} \qquad \begin{cases} \overline{\Delta}' \circ \varphi_{\overline{\mathrm{L}}(\overline{\mathrm{E}})} = \varphi_{\overline{\mathrm{L}}(\overline{\mathrm{E}})} \circ \overline{\Delta}, \\ \Omega(\overline{\omega}') = \varphi_{\overline{\mathrm{L}}(\overline{\mathrm{E}})}(\Omega(\overline{\omega})). \end{cases}$$

Il suffit pour cela de se reporter aux diagrammes du type de ceux du paragraphe précédent relatifs à $\mathcal{E}$, f, $\overline{\mathcal{E}}$ et à $\mathcal{E}'$, f, $\overline{\mathcal{E}}'$. Les parties de ces diagrammes faisant intervenir les faisceaux des connexions, les faisceaux de Lie, l'application « courbure » et les faisceaux des différentielles covariantes, permettent de vérifier la formule (III.8.2).

9. Sous-espaces fibrés principaux différentiables. — Soit $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ une sous-espaces fibré principal différentiable à groupe structural de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$. En d'autres termes, $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ est un espace fibré principal différentiable dont l'espace $\mathcal{E}'$ proprement dit est une sous-variété de $\mathcal{E}$ et dont le groupe structural G' est un sous-groupe de G muni de la topologie-réunion de la topologie induite et de la topologie dont les seuls ouverts sont les composantes connexes par arcs de G' dans G. Si l'on désigne par $\mathrm{I}_{\mathcal{E}'}$ et $\mathrm{I}_{\mathrm{G}'}$, les inclusions

$$\mathrm{I}_{\mathcal{E}'} : \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_{\mathrm{G}'} : \mathrm{G}' \to \mathrm{G},$$

le couple $(I_{\mathcal{E}}, I_{\mathcal{C}})$ est un couple d'homomorphismes compatibles. Ce sont même des *isomorphismes dans*. Les homomorphismes associés

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')} &: \mathfrak{M}'(\mathcal{E}') \to \mathfrak{M}(\mathcal{E}), \\ I_{\mathcal{L}'(\mathcal{E}')} &: \mathcal{L}'(\mathcal{E}') \to \mathcal{L}(\mathcal{E}), \\ I_{C'(E')} &: C'(E') \to C(E) \end{aligned}$$

sont aussi des *isomorphismes dans*. Cela permet d'identifier :

$I_{\mathcal{L}'(\mathcal{E}')}(\mathcal{L}'(\mathcal{E}'))$ à l'espace de Lie de $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$;
$I_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')}(\mathfrak{M}'(\mathcal{E}'))$ à l'espace structural gauche de $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$;
$I_{C'(E')}(C'(E'))$ au faisceau des connexions de $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$.

Dans la suite, nous ferons toujours complètement ces identifications. Une connexion sur $\mathcal{E}'$, considérée comme une section de C(E), sera dite « étendue » à $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$. Le même terme sera également utilisé pour les sections de l'espace de Lie ou de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$.

CHAPITRE IV.

Holonomie. Faisceau d'invariance d'une connexion. Transport parallèle.

Introduction. — Dans la définition que nous donnons ci-dessous, le groupe d'holonomie d'un espace fibré principal muni d'une connexion ω n'est pas exactement le groupe habituellement désigné sous ce nom. Au lieu d'être un sous-groupe de G dépendant d'un point y de $\mathcal{E}$, c'est, en un point x de la base, un sous-groupe $\mathfrak{P}_x(\omega)$ de $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$ qui n'est fonction que de x. Le groupe d'holonomie habituel en $y \in \mathcal{E}_x$ est alors $j_{\mathfrak{M}}(y)\mathfrak{P}_x(\omega)$. A un lacet l_x de la base est donc associé un élément unique de $\mathfrak{P}_x(\omega)$.

On passe ensuite à l'étude des propriétés des opérations $C(m)$ de M(E) sur C(E). Le résultat essentiel, et d'ailleurs immédiat, est le suivant : étant donnée une connexion ω sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X},G)$ et une section globale de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ [à laquelle correspond évidemment une section de M(E)], cette dernière, opérant par $C(m)$, transforme ω en une connexion ω' tandis que, en opérant à gauche sur $\mathcal{E}$, elle transforme tout chemin ω-horizontal en un chemin ω'-horizontal. A partir de là, on peut relier les propriétés du *faisceau d'invariance* d'une connexion ω [c'est-à-dire du sous-faisceau de M(E) laissant ω invariante par $C(m)$], aux groupes d'*holonomie locale* de ω : la fibre en $x \in \mathfrak{X}$ du faisceau d'invariance de ω est algébriquement isomorphe au centralisateur [12] du groupe d'holonomie locale en x.

---

[12] Ou commutant dans $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$.

La proposition la plus importante démontrée au paragraphe 5 concerne le passage, lorsque G est connexe, d'une connexion ω à une connexion $\omega + \theta$, où θ est une section globale du *centre de* $L^1(E)$. En gros, θ détermine alors une connexion sur le centre $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ [$\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ étant trivial, on peut le considérer comme un espace fibré principal dont le groupe structural est le centre de G] et, en notant $\tau_\theta^0(l_x)$ l'élément de $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ associé dans ces conditions à tout lacet l_x, on a

$$\tau_{\omega+\theta}(l_x) = \tau_\theta^0(l_x)\tau_\omega(l_x),$$

égalité où $\tau_\omega(l_x)$ représente l'élément de l'espace structural gauche associé à l_x et à ω.

Enfin, le dernier paragraphe est consacré à des rappels sur la notion de transport parallèle [dans $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$ par exemple]. On se borne, en général, à fixer des notations et à énoncer les résultats qui seront utiles par la suite.

1. Chemins horizontaux. — Soit I l'intervalle fermé [0, 1]. Une application

$$l : \mathrm{I} \to \mathfrak{X}$$

définit un *chemin différentiable* de la variété différentiable $\mathfrak{X}$ si la fonction l est elle-même différentiable (14), c'est-à-dire s'il existe un intervalle ouvert I' contenant I et une application différentiable $l' : \mathrm{I}' \to \mathfrak{X}$ dont la restriction à I est l.

Étant donné un tel chemin différentiable l et un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ muni d'une connexion ω, considérons l'espace fibré $l'^{-1}(\mathcal{E})$, de base I', induit par l', et soit $\omega^\#$ la connexion induite. Choisissons un point $y \in \mathcal{E}_{l(0)}$ et soit z l'unique point de la fibre de $l'^{-1}(\mathcal{E})$ de projection 0, tel que $l'^\#_{\mathcal{E}}(z) = y$ ($l'^\#_{\mathcal{E}}$ = homomorphisme induit). Le champ $c(\omega^\#)$, invariant par G, est intégrable puisque c'est un champ régulier de vecteurs. Soit $\bar{s} : \mathrm{I}' \to l'^{-1}(\mathcal{E})$ l'unique variété intégrale passant par z. On appellera chemin ω-horizontal de projection l et d'origine y, le chemin

$$\lambda_y : \mathrm{I} \to \mathcal{E}$$

défini par

$$\lambda_y = l'^\#_{\mathcal{E}} \circ \bar{s}.$$

Il est clair que ce chemin ne dépend pas de l'extension l' de l et qu'on a $\lambda_{y.s} = \mathrm{D}_s \circ \lambda_y (s \in \mathrm{G})$. En revenant à la définition du champ de connexion (*voir* § III.1) et de la forme de connexion, on voit que $\bar{s}$ peut être défini par l'équation

$$\Lambda\left[j_{\mathrm{G}}{}^\#(\underline{s})^{\omega^\#}\right] = 0. \tag{IV.1.1}$$

(14) Rappelons que « différentiable » signifie de « classe C^∞ ».

Soit maintenant $\mu : I \to I$ un homémorphisme différentiable de I et $l_1 = l \circ \mu$. Comme l'homomorphisme induit

$$\mu^{\#}_{l^{-1}(\mathcal{E})} : \quad \mu^{-1}(l^{-1}(\mathcal{E})) \to l^{-1}(\mathcal{E})$$

est un isomorphisme de $l_1^{-1}(\mathcal{E}) = \mu^{-1}(l^{-1}(\mathcal{E}))$ sur $l^{-1}(\mathcal{E})$ et que la connexion induite par l_1 à partir de ω coïncide avec la connexion induite par μ à partir de $\omega^{\#}$, il est clair que le chemin ω-horizontal de projection l_1 est

$$\lambda_1 = \lambda_y \circ \mu.$$

En choisissant un homéomorphisme μ dont toutes les dérivées s'annulent pour o et 1, on peut donc toujours se ramener au cas où toutes les dérivées de $l : I \to \mathfrak{X}$ s'annulent au points o et 1. Cette remarque permet d'éviter de parler de chemins différentiables par morceaux puisque, si toutes les dérivées de l et l^0 s'annulent pour o et 1, le produit $l.l_0$, défini par

$$\left.\begin{aligned} (l.l^0)(t) &= l^0(2t) \qquad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \\ (l.l^0)(t) &= l(2t-1) \qquad \text{si} \quad \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{aligned}\right\} \qquad [l^0(1) = l(0)]$$

est différentiable, et que ses dérivées s'annulent pour o et 1. Par la suite, nous considérerons, en général, des chemins de ce type et nous dirons qu'ils sont définis par une *représentation amortie*.

En particulier, on appellera *lacet différentiable en* $x \in \mathfrak{X}$, tout chemin différentiable $l_x : I \to \mathfrak{X}$ tel que $l_x(0) = l_x(1) = x$, et *lacet amorti en* x, tout lacet différentiable en x dont toutes les dérivées partielles s'annulent pour o et 1. Il en résulte qu'un lacet amorti l_x peut être défini par une application différentiable

$$\bar{l}_x : \quad S^1 \to \mathfrak{X}$$

du cercle S^1 orienté, muni d'une origine et paramétré par une application différentiable régulière $\alpha : I \to S^1$ $[\alpha(0) = \alpha(1) = o]$. On peut en effet poser

$$\bar{l}_x(\alpha(t)) = l_x(t) \qquad (t \in I).$$

Par ailleurs, à tout lacet l_x (amorti ou non) est associé un élément $\tau_\omega(l_x) \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$ défini par les égalités suivantes :

$$\tau_\omega(l_x) = i_{\mathfrak{M}}(y) s_y \qquad \text{et} \qquad \lambda_y(1) = \lambda_y(0).s_y = y.s_y,$$

où $\lambda_y : I \to \mathcal{E}$ est le chemin ω-horizontal d'origine $y \in \mathcal{E}_x$ se projetant sur l_x. On vérifie que $s_{y.\sigma} = \sigma^{-1} s_y \sigma$, ce qui justifie cette définition qui pourrait aussi bien être donnée sous la forme

$$\tau_\omega(l_x) = m \qquad \text{avec} \quad \lambda_y(1) = m.y \qquad [m \in \mathfrak{M}_x(\mathcal{E})].$$

On vérifie immédiatement que, si l_x et l_x^0 sont deux lacets amortis en x et si $l_x . l_x^0$ désigne leur produit (au sens défini ci-dessus), on a

$$\tau_\omega(l_x)\tau_\omega l_x^0) = \tau_\omega(l_x . l_x^0).$$

Comme, de plus, si l_x^{-1} désigne le lacet défini à partir de l_x par

$$l_x^{-1}(t) = l_x(1-t).$$

on a

$$\tau_\omega(l_x^{-1}) = (\tau_\omega(l_x))^{-1},$$

on voit que l'ensemble des $\tau_\omega(l_x)$ pour tous les lacets assortis en x (et, par suite, pour tous les lacets sans exception) est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$. C'est le *groupe d'holonomie en x* que nous noterons $\mathfrak{T}_x(\omega)$. Rappelons que c' est un groupe de Lie, du moins lorsqu'on le munit de la topologie-réunion de la topologie induite et de celle dont les seuls ouverts sont les composantes connexes par arcs de $\mathfrak{T}_x(\omega)$ dans $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$. L'ensemble de $\mathfrak{T}_x(\omega)(x \in \mathcal{X})$ est un sous-espace fibré différentiable à fibre-groupe de Lie de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$, noté $\mathfrak{T}(\omega)$ et appelé *espace d'holonomie de* ω.

Nous appellerons *nappe d'holonomie* passant par $y \in \mathcal{E}$ l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ atteints par des chemins ω-horizontaux d'origine y. On sait que c'est une sous-variété différentiable de $\mathcal{E}$. Compte tenu de l'invariance de l'ensemble des chemins ω-horizontaux par les translations à droite de G, il est clair que la nappe d'holonomie passant par y est un sous-espace fibré principal de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de groupe structural $j_{\mathfrak{M}}(y)\mathfrak{T}_x(\omega)\,[x = p(y)]$. L'espace d'holonomie $\mathfrak{T}(\omega)$ est alors l'espace structural gauche de cette nappe d'holonomie et, par suite, de toutes les nappes d'holonomie.

Revenons aux notations du début de ce paragraphe. Dire que $\bar{s}$ est une variété intégrale de $c(\omega^\sharp)$ est équivalent à dire que $\lambda_y = l_{\mathcal{E}}^\sharp \circ \bar{s}$ est tangent au champ de connexion $c(\omega)$, c'est-à-dire qu'on a

$$(\omega)_{\lambda_y(t)} \circ (d\lambda_y)_t = 0 \qquad (t \in I). \tag{IV.1.2}$$

Réciproquement, si un chemin de $\mathcal{E}$ satisfait à cette égalité, il est horizontal.

Considérons maintenant un couple d'homomorphismes compatibles

$$\varphi : G \to G' \qquad \text{et} \qquad h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

liant deux espaces fibrés principaux $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$. Soit ω une connexion sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Nous avons remarqué au paragraphe III.4, que $c(\omega)$ était projetable par h et que son image était le champ $c(\varphi^h_{C(E)}(\omega))$, associé à la connexion-image $\varphi^h_{C(E)}(\omega)$. L'image par h d'un chemin tangent à $c(\omega)$ est donc un chemin tangent à $c(\varphi^h_{C(E)}(\omega))$. On a donc la proposition suivante qu'on peut également vérifier à l'aide de diagrammes du type de ceux du paragraphe III.7.

Proposition IV.1.1. — *Étant donné un couple d'homomorphismes compatibles* (φ, h), *l'image par h d'un chemin* ω*-horizontal est un chemin* $\varphi^h_{C(E)}(\omega)$*-horizontal.*

COROLLAIRE. — *L'image par h d'une nappe d'holonomie est une nappe d'holonomie et l'on a*

$$\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\mathfrak{R}(\omega)) = \mathfrak{R}(\varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega)).$$

Cette dernière égalité résulte de la relation plus générale

$$\varphi^h{}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\tau_\omega(l_x)) = \tau_{\omega'}(l_x) \qquad [\omega' = \varphi^h{}_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega)] \tag{IV.1.3}$$

qui est une conséquence immédiate de la proposition précédente et de la définition de $\tau_\omega(l_x)$.

2. OPÉRATIONS DE $\mathrm{M}(\mathrm{E})$:

PROPOSITION IV.2.1. — *Étant donnés $\omega \in \mathrm{C}_x(\mathrm{E})$ et $m \in \mathrm{M}_x(\mathrm{E})$, si l'on a*

$$\mathrm{A}(j_{\mathrm{C}}(y)\omega) = 0 \qquad (y \in \mathrm{E}),$$

on a également

$$\mathrm{A}(j_{\mathrm{C}}(m.y)\mathrm{C}(m)\omega) = 0.$$

Cette proposition résulte immédiatement des formules (I.3.1).

Soit maintenant $\underline{m} : \mathrm{U} \to \mathrm{E}_{\mathrm{U}}$ une section locale de E sur un ouvert U de $\mathfrak{X}$. Étant donné un chemin différentiable $\lambda : \mathrm{I} \to \mathcal{E}_{\mathrm{U}}$, nous désignerons par $\lambda' = \overline{m}.\lambda$, le chemin différentiable défini par

$$\lambda'(t) = \overline{m}(p(\lambda(t))).\lambda(t) \qquad (t \in \mathrm{I}).$$

En se plaçant maintenant sur l'espace induit par $l = p_{\mathcal{E}} \circ \lambda$ à partir de $\mathcal{E}$, et en utilisant la condition (IV.1.1) et la proposition précédente, on démontre :

PROPOSITION IV.2.2. — *Si λ est un chemin ω-horizontal, $\overline{m}.\lambda$ est un chemin $\mathrm{C}(\underline{m})(\omega)$-horizontal.*

On remarquera que ce résultat peut également être considéré comme un cas particulier de la proposition IV.1.1 car la translation à gauche $\mathrm{G}_{\overline{m}}$ est un G-isomorphisme de $\mathcal{E}_{\mathrm{U}}$.

Donnons-nous maintenant un lacet en x :

$$l_x : \mathrm{I} \to \mathrm{U}.$$

Par une vérification directe ou comme application de la formule (IV.1.3), on peut énoncer :

PROPOSITION IV.2.3. — *Avec les notations précédentes, on a*

$$\tau_{\mathrm{C}(\underline{m})\omega}(l_x) = \mathrm{Int}(\overline{m}(x))\tau_\omega(l_x).$$

Et, comme conséquence immédiate :

COROLLAIRE. — $\mathrm{Int}(\overline{m})$ *détermine un isomorphisme de l'espace d'holonomie $\mathfrak{R}(\omega_{\mathrm{U}})$ de la restriction ω_{U} de ω à $\mathcal{E}_{\mathrm{U}}$, sur l'espace d'holonomie $\mathfrak{R}(\mathrm{C}(\underline{m})\omega_{\mathrm{U}})$.*

3. Faisceau d'invariance et groupe d'invariance d'une connexion ;

Définition IV.3.1. — *On appelle faisceau d'invariance* $Q(\omega)$ *d'une connexion* ω, *le sous-faisceau de* $M(E)$ *constitué par les éléments* $m \in M(E)$ *tels que*

$$C(m)\omega(x) = \omega(x) \qquad [x \in \mathfrak{X} \text{ et } p(m) = x].$$

Remarquons que $Q(\omega)$ est bien un faisceau. En effet, soit $\underline{m}$ une section de $M(E)$ sur un voisinage ouvert U de x, telle que

$$C(\underline{m}(x))\omega(x) = \omega(x).$$

Cette égalité signifie que la section de $C(E)$ définie sur U par $C(\underline{m})\omega$ passe par $\omega(x)$ et coïncide donc avec ω sur un voisinage ouvert V de x. Par suite, sur V, on a $C(\underline{m})\omega = \omega$ et $\underline{m}$ est un homéomorphisme local de $Q(\omega)$ sur V.

Définition IV.3.2. — *On appelle groupe d'invariance* $I(\omega)$ *d'une connexion* ω, *le groupe des sections globales de* $Q(\omega)$.

Proposition IV.3.1. — *Si* q *est une section globale de* $Q(\omega)$, *l'automorphisme intérieur* $\mathrm{Int}(\overline{q}(x))$ *laisse invariant le groupe d'holonomie en* x.

C'est là une conséquence immédiate de la proposition IV.2.3.

Corollaire. — *Le groupe d'invariance* $I(\omega)$ *de la connexion* ω *est nécessairement constitué de sections globales de l'espace fibré de groupes* $\mathfrak{S}(\omega)$ *dont les fibres* $\mathfrak{S}_v(\omega)$ *sont les centralisateurs dans les fibres* $\mathfrak{M}_x(\mathfrak{E})$ *de* $\mathfrak{M}(\mathfrak{E})$, *des fibres de l'espace d'holonomie* $\mathfrak{L}(\omega)$.

Bien entendu, cela ne signifie pas que toute section globale de $\mathfrak{S}(\omega)$ fournit un élément de $I(\omega)$, mais simplement, que les éléments de $I(\omega)$ se recrutent parmi les sections de $\mathfrak{S}(\omega)$.

Proposition IV.3.2. — *L'espace fibré* $\mathfrak{S}(\omega)$ *est trivial.*

En effet, soit V une nappe d'holonomie quelconque. On détermine un isomorphisme de $\mathfrak{S}_x(\omega)$ sur un sous-groupe déterminé de G de la façon suivante. Soit P_V le groupe structural de V, c'est-à-dire, pour $y \in V$, le sous-groupe

$$P_V = j_{\mathfrak{M}}(y)\mathfrak{L}_x(\omega) \qquad [x = p(y)].$$

Comme

$$j_{\mathfrak{M}}(y \cdot g)s = g\big(j_{\mathfrak{M}}(y)s\big)g^{-1} \qquad [s \in \mathfrak{S}_x(\omega) \text{ et } g \in G],$$

on voit que, pour $g \in P_V$, on a

$$j_{\mathfrak{M}}(y \cdot g)s = j_{\mathfrak{M}}(y)s.$$

Autrement dit, $j_{\mathfrak{M}}(y)s$ est indépendant du choix de y dans V_x, pour $s \in \mathfrak{S}_x(\omega)$. Par suite, $j_{\mathfrak{M}}(y)$ détermine un isomorphisme de $\mathfrak{S}_x(\omega)$ sur le centralisateur S_v

de P_V dans G, ne dépendant que de x. Soit $j_x^V : \mathcal{S}_x(\omega) \to S_V$ cet isomorphisme. L'application

$$j_V : \quad \mathcal{S}(\omega) \to S_V \times \mathcal{X},$$

définie par

$$j_V(s) = (j_x^V(s), x) \qquad [s \in \mathcal{S}(\omega) \text{ et } x = p(s)],$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\omega)$ sur le produit $S_V \times \mathcal{X}$.

Remarquons que l'isomorphisme j_V n'est pas canonique : il dépend du choix de la nappe d'holonomie V. Cependant, les *sections constantes* de $\mathcal{S}(\omega)$, c'est-à-dire les sections $\bar{q} : \mathcal{X} \to \mathcal{S}(\omega)$ telles que $j_x^V(\bar{q}(x))$ ne dépende pas de $x \in \mathcal{X}$, peuvent être définies indépendamment de V. On le vérifie immédiatement en choisissant deux variétés distinctes V et V′ et en utilisant le fait que V′ se déduit de V par une translation à droite σ. Il suffit alors de définir j_x^V, $j_{x'}^V$, (resp. $j_x^{V'}$, $j_{x'}^{V'}$) à l'aide de points $y \in V_x$, $y' \in V_{x'}$ (resp. $y.\sigma$ et $y'.\sigma$) reliés par un chemin ω-horizontal.

Proposition IV.3.3. — *Si $\underline{q}$ est une section globale de $Q(\omega)$, $\bar{q}$ est une section constante de $\mathcal{S}(\omega)$. Réciproquement, si $\bar{q}$ est une section constante de $\mathcal{S}(\omega)$, $\underline{q}$ est une section globale de $Q(\omega)$, c'est-à-dire un élément du groupe d'invariance $I(\omega)$.*

En effet, les sections de $\mathcal{S}(\omega)$ qui fournissent des sections de $Q(\omega)$ satisfont à l'équation

$$C(\underline{q})\omega = \omega, \tag{IV.3.1}$$

et réciproquement. Soit alors U un voisinage ouvert de $x \in \mathcal{X}$, différentiablement homéomorphe à R^d et soit $\bar{y} : U \to V$ une section locale sur U de la nappe d'holonomie V. Posons $\omega_U = j_C(\underline{y})\omega$. Comme le projecteur φ_ω associé à ω conserve l'espace des vecteurs tangents à V par définition même d'une nappe d'holonomie, $A(\omega_U)$ est une forme différentielle sur U à valeurs dans l'algèbre de Lie de P_V. Or, les solutions de (IV.3.1), transformées par $j_{\mathfrak{M}}(\underline{y})$ deviennent des solutions de

$$C(\underline{s})\omega_U = \omega_U, \tag{IV.3.2}$$

où $\bar{s}$ est une section de $S_V \times U$, et réciproquement. On est donc amené à résoudre (IV.3.2) qui s'écrit

$$X(\underline{s}^{-1}) + \mathrm{Adj}(\underline{s})A(\omega_U) = A(\omega_U). \tag{IV.3.3}$$

Mais $A(\omega_U)$ est une forme différentielle invariante par $\mathrm{Adj}(\underline{s})$ puisque les éléments de S_V commutent avec tous les éléments de P_V. L'équation (IV.3.2) se réduit donc à $X(\underline{s}^{-1}) = 0$, ce qui entraîne $\bar{s} = \mathrm{Cte}$.

Corollaire. — *Le groupe d'invariance $I(\omega)$ est isomorphe (algébriquement) à $\mathcal{S}_x(\omega)$ et à S_V.*

Proposition IV.3.4. — *Quel que soit $x \in X$, il existe un voisinage* U *de x tel que toute section du faisceau d'invariance* $Q(\omega)$ *sur un voisinage quelconque* $U \subset U$ *de x, soit la restriction d'une section locale de* $Q(\omega)$ *sur* U *et d'une seule.*

En effet, on sait que tout point x possède un voisinage U tel que, si $U' \subset U$, le groupe d'holonomie de la restriction de ω à $\mathscr{E}_{U'}$ soit le même que le groupe d'holonomie de la restriction de ω à $\mathscr{E}_U$ [et isomorphe, par définition, au groupe d'holonomie locale en x ([15])]. La proposition précédente résulte alors de la proposition (IV.3.3) appliquée à $\mathscr{E}_U$ et à $\mathscr{E}_{U'}$.

Corollaire. — *La fibre en x du faisceau d'invariance* $Q(\omega)$ *est isomorphe (algébriquement) au centralisateur du groupe d'holonomie locale en x, centralisateur dans $\mathfrak{M}_x(\mathscr{E})$, bien entendu.*

Proposition IV.3.5. — *Le faisceau d'invariance d'une connexion est localement simple, sauf sur un sous-ensemble de $\mathscr{X}$ sans point intérieur.*

En effet, si x est un point régulier pour la connexion ([15]), il existe un voisinage U de x tel que si $x' \in U$, le groupe d'holonomie locale en x' est isomorphe au groupe d'holonomie locale en x. Il en résulte que $Q(\omega_U)$ est simple, ω_U désignant ici la restriction de ω à $\mathscr{E}_U$. D'où la proposition précédente qui tient compte, en outre, d'une propriété classique des points réguliers d'une connexion.

4. Définitions :

Définition IV.4.1. — *On dira qu'une connexion est régulière lorsque son faisceau d'invariance est simple.*

Définition IV.4.2. — *On appellera faisceau des connexions réduites de type* G, *sur $\mathscr{X}$, le quotient* C(E)/M(E) *du faisceau des connexions d'un espace fibré principal différentiable quelconque de base $\mathscr{X}$ et de groupe* G, *par le faisceau des sections différentiables de son espace structural gauche.*

Comme C(E) est défini par modelage sur E du faisceau C des préconnexions de type G, il est clair que la définition du faisceau des connexions réduites de type G ne dépend pas du choix de l'espace fibré principal : C(E)/M(E) est isomorphe à C/M.

On notera Π_E l'application canonique

$$\Pi_E : \quad C(E) \to C(E)/M(E).$$

Définition IV.4.3. — *On appellera faisceau des courbures réduites de type* G

([15]) *Voir* Lichnerowicz, [1] p. 113 et 141, et aussi Nuijenhuis [1].

sur $\mathscr{X}$ *le quotient* $\Omega(C(E))/M(E)$ *de l'image de* $C(E)$ *dans* $L^2(E)$ *par l'homomorphisme (de faisceaux) courbure, par* $M(E)$.

Il est clair également que cette définition ne dépend pas de l'espace fibré choisi. De plus, l'homomorphisme-courbure

$$\Omega : \quad C(E) \to L^2(E)$$

passe au quotient sous la notation

$$\overline{\Omega} : \quad C(E)/M(E) \to L^2(E)/M(E)$$

et l'on dira que $\overline{\Omega}(\omega)$ est la courbure du germe de connexion réduite $\omega \in C(E)/M(E)$.

Ces notions seront étudiées dans un autre travail. Elles conduisent à des théorèmes d'unicité : isomorphisme de deux espaces fibrés principaux de même base simplement connexe admettant des connexions régulières dont les images par Π_E coïncident; à des théorèmes d'existences : existence (sous des conditions analogues à celles qui interviennent au chapitre VIII de cette thèse) d'un espace fibré principal admettant une connexion réduite régulière (en un sens assez évident) donnée sur une base simplement connexe; enfin, en qualifiant d'homotopes deux connexions réduites (régulières ou non) qui sont les restrictions à $(\mathscr{X}, 0)$ et $(\mathscr{X}, 1)$ d'une même connexion réduite sur $\mathscr{X} \times I$, on montre que toute connexion réduite détermine un homomorphisme de Weil et que deux connexions réduites homotopes déterminent le même homorphisme de Weil.

5. Cas particuliers. — Nous supposons dans ce paragraphe que G est connexe. Il en résulte que $\mathscr{K}^0(\mathscr{E})$, centre de $\mathscr{L}^0(\mathscr{E})$ obtenu en modelant $\mathscr{K}^0 = \mathscr{X} \times \underline{H}$ (H = centre de G) est trivial car G laisse invariant les éléments de $\underline{H}$ lorsqu'il opère sur $\underline{G}$ par la représentation adjointe. Pour la même raison, mais sans que l'hypothèse de connexité soit nécessaire, le centre $\mathscr{Z}(\mathscr{E})$ de $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ est également trivial. De plus, sur K(E), toute différentielle covariante de type adjoint [c'est-à-dire associée à une connexion sur $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$] se réduit à la différentielle ordinaire d. Signalons enfin la formule

$$\Omega(\omega + \theta) = \Omega(\omega) + \Delta\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta], \tag{IV.5.1}$$

où Δ est la L(E)-différentiation covariante associée à une connexion ω et où θ est une section quelconque de $L^1(E)$.

Proposition IV.5.1. — *Si* θ *est une section du centre* $K^1(E)$ *de* $L^1(E)$ *et si* $d\theta = 0$ (*ou si* $\Delta = 0$ *d'après ce qui précède*), *on a*

$$\Omega(\omega + \theta) = \Omega(\omega).$$

En effet, la formule (IV.5.1) s'écrit alors

$$\Omega(\omega+\theta)=\Omega(\omega)+d\theta=\Omega(\omega).$$

Proposition IV.5.2. — *Si θ est une section du centre $K^1(E)$ de $L^1(E)$, si $d\theta=0$ et si $\mathfrak{X}$ est simplement connexe, il existe une section $\underline{s}$ du centre $N(E)$ de $M(E)$ telle que*

$$\omega+\theta=C(\underline{s})\,\omega.$$

et réciproquement.

Choisissons une section locale z de $\mathfrak{E}$ sur un ouvert U différentiablement homéomorphe à R^d et posons $\omega_U=j_C(z)\omega$. Soit $\underline{s}$ une section de $N(E)=N$. On a

$$j_C(z)\,C(\underline{s})\,\omega=C(\underline{s})\,\omega_U=X(\underline{s})+\omega_U,$$

la dernière partie de cette égalité résultant du fait que $\underline{s}$ est une section de $N(E)$, identifié à N. On est donc amené à résoudre l'équation

$$X(\underline{s})=\theta.$$

Or, en interprétant cette égalité en termes de formes différentielles, on voit qu'elle est équivalente à

$$X^0=\theta.$$

où X^0 et θ sont des formes différentielles sur le produit $U\times H$. La première est la forme de connexion triviale (dont les variétés intégrales sont les sections constantes de $U\times H$) qui sert à définir $X(s)$ (*voir* § III.1). La deuxième est la forme θ qui peut être considérée comme une forme sur $U\times H$. L'une et l'autre sont à valeurs dans $\underline{H}$ et l'égalité $X^0=\theta$ définit un système de Pfaff complètement intégrable car $dX^0=d\theta=0$. Comme $\mathfrak{X}$ est simplement connexe par hypothèse, il existe bien une variété intégrale de ce système de Pfaff (définie à une translation près) à laquelle correspond une section $\underline{s}$ de $N(E)$ telle que $\omega+\theta=C(\underline{s})\omega$. La réciproque est évidente.

Proposition IV.5.3. — *Si est θ une section de $K^1(E)$, si $d\theta=0$ (ou, ce qui est équivalent, si $\Delta\theta=0$) et si $\mathfrak{X}$ est simplement connexe, on a, quel que soit le lacet l_x de $\mathfrak{X}$:*

$$\tau_{\omega+\theta}(l_x)=\tau_\omega(l_x).$$

En effet, étant donnée une des sections $\underline{s}$ définies par la proposition précédente, on passe de $\tau_\omega(l_x)$ à $\tau_{\omega+\theta}(l_x)$ par l'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}(\bar{s}(x))$ ce qui entraîne l'égalité annoncée.

Corollaire. — *Si λ_y et λ'_y sont deux chemins différentiables de $\mathfrak{E}$, de même origine y, se projetant sur le même lacet l_x, et respectivement ω- et $(\omega+\theta)$-horizontaux (θ satisfaisant aux conditions de la proposition précédente), alors, ils ont également même extrémité.*

On peut généraliser la proposition IV.5.3 de la façon suivante. Étant donnée une forme différentielle linéaire θ à valeurs dans $\underline{H}$, c'est-à-dire une section de $K^1(E) = K^1$, considérons la connexion définie dans $H \times \mathfrak{X}$ par la forme de connexion $X^0 - \theta$, où X^0 est, comme ci-dessus, la forme de connexion triviale dans $H \times \mathfrak{X}$. On notera $\tau_\theta^0(l_x)$ la transformation de $\mathfrak{N}(\mathfrak{E})$ (transformation qu'on peut également considérer comme un élément de H) associée à tout lacet l_x de $\mathfrak{X}$ dans la connexion $X^0 - \theta = 0$. On a alors :

Proposition IV.5.4. — *Si θ est une forme différentielle quelconque à valeurs dans* H, *on a*

$$\tau_{\omega+\theta}(l_x) = \tau_\omega(l_x)\,\tau_\theta^0(l_x),$$

où l_x est un lacet différentiable quelconque de $\mathfrak{X}$ et où $\tau_\theta^0(l_x)$ est l'élément du centre $\mathfrak{N}_x(\mathfrak{E})$ de $\mathfrak{N}_x(\mathfrak{E})$ défini dans les lignes précédentes.

Considérons en effet, un lacet $l_x : S^1 \to \mathfrak{X}$ défini par une application différentiable du cercle S^1 paramétré par une application différentiable régulière $\alpha : I \to S^1$, dans $\mathfrak{X}$. Nous nous trouvons, sur l'espace fibré principal induit $l_x^{-1}(\mathfrak{E})$ muni de la connexion induite $\omega^\#$ et de $\omega^\# + \theta^\#$, où $\theta^\#$ est la forme différentielle induite par l_x à partir de θ, dans la situation de la proposition IV.5.2, à cela près que la base S^1 n'est pas simplement connexe. En d'autres termes, l'équation

$$C(\underline{s})\,\omega^\# = \omega^\# + \theta^\# \tag{IV.5.2}$$

est localement équivalente au système de Pfaff,

$$(X^0 - \theta)^\# = 0 \tag{IV.5.3}$$

induit à partir de $X^0 - \theta = 0$. On le vérifie immédiatement en utilisant des sections locales et en reprenant le raisonnement de la proposition IV.5.2. Le système (IV.5.3) qui définit un champ de vecteurs régulier est localement intégrable. Il existe donc une solution et une seule de (IV.5.2) définie dans $H \times S^1$ au voisinage du point (e, O) et passant par ce point [e = élément neutre de H et $O = \alpha(o)$ = origine de S^1]. Notons

$$\bar{\sigma} : \quad I \to H \times S^1 \qquad [p(\bar{\sigma}(t)) = \alpha(t)]$$

cette solution prolongée jusqu'à rejoindre la fibre de projection O. Soit alors y un point arbitraire de cette fibre. Considérons le chemin $\omega^\#$-horizontal λ d'origine y et le chemin $(\omega + \theta)^\#$-horizontal λ' d'origine y également, paramétrés l'un et l'autre de telle sorte qu'on ait

$$p(\lambda(t)) = p(\lambda'(t)) = \alpha(t) \qquad (t \in I).$$

Puisque $\lambda(o) = \lambda'(o) = y$ et que $\bar{\sigma}(o) = (e, O)$ la proposition IV.2.2 montre

qu'on a quel que soit t :

$$\lambda'(t) = \sigma(t).\lambda(t).$$

En particulier, pour $t = 1$, on a

$$\lambda'(1) = \bar{\sigma}(1).\lambda(1).$$

Mais, comme (IV.5.3) et (IV.5.2) sont équivalentes, cette égalité s'écrit, en revenant à l'espace fibré initial $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$:

$$\tau_{\omega+\theta}(l_x) = \tau_{\omega}(l_x)\,\tau_{\theta}^{\theta}(l_z).$$

Revenons maintenant aux notations utilisées à la fin du paragraphe II.5 : soit ω' une connexion dans $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}/H$ et ω une connexion dans $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ telle que $\gamma_{C(E)}(\omega) = \omega'$. Étant donnée, dans ces conditions, une section de $L^2(E) = L^2(E_\gamma)$ notée $\tilde{\Omega}$ et telle que $\Delta\tilde{\Omega} = 0$, existe-il une connexion $\tilde{\omega}$ sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ admettant $\tilde{\Omega}$ pour courbure ? Dans un cas au moins, la réponse est immédiate (16).

Proposition IV.5.5. — *Étant donnée une section* $(\tilde{\Omega})$ de $L^2(E)$ *et une connexion* ω *sur* $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ *à laquelle est associée la* $L(E)$*-différentiation covariante* Δ, *si* $\Delta\tilde{\Omega} = 0$, *si* $\gamma_{L(E)}(\tilde{\Omega}) = \gamma_{L(E)}(\Omega(\omega))$ *et si le deuxième groupe d'homologie de* $\mathfrak{X}$ *à coefficients dans* $\underline{H}$ *est nul, il existe une connexion* $\tilde{\omega}$ *sur* $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ *telle que* $\Omega(\tilde{\omega}) = \tilde{\Omega}$.

Posons en effet $\Pi = \Omega(\omega) - \Omega$. Comme $\gamma_{L(E)}(\tilde{\Omega}) = \gamma_{L(E)}(\Omega(\omega))$, on a $\gamma_{L(E)}(\Pi) = 0$. On peut donc identifier Π à une forme différentielle sur $\mathfrak{X}$ à coefficients dans $\underline{H}$. L'égalité $\Delta\Pi = 0$ se traduit alors par $d\Pi = 0$. Puisque, par hypothèse, le deuxième groupe d'homologie de $\mathfrak{X}$ à coefficients dans $\underline{H}$ est nul, il existe une forme différentielle θ, de degré 1 à coefficients dans $\underline{H}$ telle que $d\theta = \Pi$. En posant $\tilde{\omega} = \omega + \theta$, la formule (IV.5.1) montre qu'on a $\Omega(\tilde{\omega}) = \tilde{\Omega}$. Ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Lorsque $\mathfrak{X}$ est homéomorphe à R^d, les conditions d'application de la proposition précédente sont remplies. C'est surtout dans ce cas qu'elle nous servira dans la suite.

Application. — Si G est abélien, si $\mathfrak{X}$ est simplement connexe et si son deuxième groupe d'homologie est nul, tout espace fibré principal différentiable de groupe structural G et de base $\mathfrak{X}$ est trivial.

En effet, d'après la proposition précédente, il existe toujours une connexion de courbure nulle. Le champ de connexion correspondant est donc intégrable et, comme $\mathfrak{X}$ est simplement connexe, l'espace fibré principal considéré possède une section globale : il est trivial.

---

(16) Si θ est quelconque, la réponse est évidemment négative, en général.

6. Transport parallèle. — Le but de ce paragraphe est d'abord de montrer comment la notion de transport parallèle se rattache au cadre général que nous avons choisi, mais surtout, de rappeler quelques résultats qui nous seront utiles par la suite.

Soit Z un espace tel que G, $\underline{G}$, $\mathfrak{W}_0$, etc., sur lequel le groupe structural G de $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ opère comme groupe d'automorphismes. Nous posons $\mathfrak{Z} = Z \times \mathfrak{X}$ et nous construisons $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$. Nous considérerons les applications différentiables suivantes :

(1°) $$g_Z : \quad \mathfrak{E} \boxtimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{E}) \to Z$$

définie par l'égalité

$$g_Z(y, z) = j_{\mathfrak{Z}}(y)\, z \qquad [y \in \mathfrak{E}_x,\ z \in \mathfrak{Z}_x(\mathfrak{E}),\ x \in \mathfrak{X}]$$

où l'on considère $j_{\mathfrak{Z}}(y)\, z$ comme un élément de Z.

(2°) $$f_Z : \quad \mathfrak{E} \boxtimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{E}$$

définie par l'égalité

$$f_Z(y, z) = y \qquad [y \in \mathfrak{E}_x,\ z \in \mathfrak{Z}_x(\mathfrak{E}),\ x \in \mathfrak{X}].$$

(3°) $$h_Z : \quad \mathfrak{E} \boxtimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$$

définie par l'égalité

$$h_Z(y, z) = z \qquad [y \in \mathfrak{E}_x,\ z \in \mathfrak{Z}_x(\mathfrak{E}),\ x \in \mathfrak{X}].$$

Nous désignerons maintenant par $T_{y,z}$ l'espace vectoriel tangent à $\mathfrak{E} \boxtimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ au point $(y, z)[y \in \mathfrak{E}_x$ et $z \in \mathfrak{Z}_x(\mathfrak{E})]$. Les applications df_z et dh_z permettent de décomposer $T_{y,z}$ en deux espaces vectoriels supplémentaires dont l'un, T^1_y, est l'espace tangent à $\mathfrak{E}_x$ au point y et dont l'autre, T^2_z, est tangent à $\mathfrak{Z}_x(\mathfrak{E})$ au point z. Soit, d'autre part, ω, une forme de connexion sur $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$. Nous noterons $\omega^{\mathfrak{Z}}$ la forme différentielle sur $\mathfrak{E} \boxtimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ à valeurs dans $\underline{G}$ induite par f_z à partir de ω. Le système

(IV.6.1) $$dg_z = 0, \qquad \omega^{\mathfrak{Z}} = 0,$$

détermine alors, en tout point (y, z), un sous-espace vectoriel de $T_{y,z}$ dont la projection sur T^2 sera notée $c^{\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})}_{y,z}(\omega)$. Soit $X \in T_{y,z}$, un vecteur qui se décompose suivant T^1_y et T^2_z en X^1 et X^2 :

$$X = X^1 + X^2.$$

Si $(dg_z)_{y,z} X = 0$, les formules (I.3.1) montrent qu'on a aussi

$$(dg)_{y.s,z}(X^1.s + X^2) = 0 \qquad (s \in G).$$

Mais $c(\omega)$ est également invariant par les translations à droite, de sorte que si $(\omega^{\mathfrak{Z}})_{y,z} X = 0$, on a

$$(\omega^{\mathfrak{Z}})_{y.s,z}(X^1.s + X^2) = 0.$$

Il en résulte que

$$c^{\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})}_{y.s,z}(\omega) = c^{\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})}_{y,z}(\omega).$$

Autrement dit, on a défini un champ transversal aux fibres de $\mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ que nous noterons évidemment $c^{\mathfrak{Z}(\mathcal{E})}(\omega)$. C'est ce champ qui définit le transport parallèle dans $\mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ associé à la connexion ω. Plus précisément, $z_t \in \mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ se déplace parallèlement à lui-même dans $\mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ le long du chemin $l : \mathrm{I} \to \mathcal{X}$, si $p(z_t) = l(t)$ et si le chemin décrit par z_t lorsque t varie de 0 à 1, est un chemin différentiable tangent à $c^{\mathfrak{Z}(\mathcal{E})}(\omega)$ en chacun de ses points. Il en résulte immédiatement que si $\lambda : \mathrm{I} \to \mathcal{E}$ est le chemin ω-horizontal de projection l, l'élément $j_{\mathfrak{Z}}(\lambda(t))z_t$ de Z reste invariant lorsque z_t se déplace par parallélisme le long de l. Inversement, cette propriété permet de définir le transport parallèle dans $\mathfrak{Z}(\mathcal{E})$.

Remarque. — Si $\mathfrak{Z}$ n'est pas trivial mais s'il existe un champ transversal aux fibres de $\mathfrak{Z}$ définissant un transport parallèle, il est possible de lui associer un transport parallèle dans $\mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ dépendant également de ω. Avec les notations précédentes, z_t se déplacera par parallélisme si $j_{\mathfrak{Z}}(\lambda(t))z_t$ se déplace également par parallélisme.

Rappelons d'autre part que, dans le cas de $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$, ou plus généralement, dans le cas d'un espace fibré différentiable $\mathfrak{W}^0(\mathcal{E})$ à fibre vectorielle, le transport parallèle associé à une connexion ω peut être défini par $\Delta X = 0$ [$X \in \mathfrak{W}^0(\mathcal{E})$ et $\Delta =$ différentiation covariante associée à ω], en ce sens que, si v' est une variété intégrale du champ $(c^{\mathfrak{W}^0(\mathcal{E})}(\omega'))$ [induit dans l'espace $l^{-1}(\mathfrak{W}^0(\mathcal{E}))$ à partir de $c^{\mathfrak{W}^0(\mathcal{E})}(\omega)$], c'est-à-dire si $l^{\sharp}_{\mathfrak{W}^0(\mathcal{E})}(v'(t))$ se déplace parallèlement à lui-même dans $\mathfrak{W}^0(\mathcal{E})$ et si Δ' est la différentielle covariante induite par l à partir de Δ, on a $\Delta' v' = 0$.

Il en résulte que, lorsqu'on connaît une section $(\rho_i)(i = 1, \ldots, m)$ de l'espace des repères de $\mathfrak{W}^0(\mathcal{E})$ sur un ouvert U homéomorphe à R^d, on peut définir localement $c^{\mathfrak{W}^0(\mathcal{E})}(\omega)$ par le système de Pfaff suivant. Représentons $\mathfrak{W}^0_{\mathrm{U}}(\mathcal{E})$ par les coordonnées constituées par un système de coordonnées dans U d'une part, et par les composantes X^i de $\mathrm{X} \in \mathfrak{W}^0_{\mathrm{U}}(\mathcal{E})$ par rapport à (ρ_i), d'autre part. On a alors

$$\Delta \mathrm{X} = \Delta \sum_{i=1}^{m} \mathrm{X}^i \rho_i = \sum_{i=1}^{m} (d\mathrm{X}^i \rho_i + \mathrm{X}^i \Delta \rho_i).$$

En posant

$$\Delta \rho_i = \sum_{j=1}^{m} \omega^j{}_i \rho_j,$$

il vient

$$\Delta \mathrm{X} = \sum_{j=1}^{m} \left(d\mathrm{X}^j + \sum_{i=1}^{m} \omega^j{}_i \mathrm{X}^i \right) \rho_j.$$

Compte tenu de ce qui précède, il est alors clair que les égalités

$$d\mathrm{X}^i + \sum_{j=1}^{m} \omega^i{}_j \mathrm{X}^j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{IV.6.1}$$

qui constituent un système de Pfaff déterminent le champ $c^{\mathfrak{W}^0(\mathcal{E})}(\omega)$ sur $\mathfrak{W}_U^0(\mathcal{E})$.

Enfin, d'une façon générale, le transport parallèle le long d'un chemin l de $\mathcal{X}$ détermine un isomorphisme

$$\mu^{l,\omega}_{\mathfrak{F}(\mathcal{E})}: \quad \mathfrak{F}_{x_0}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{F}_{x_1}(\mathcal{E}) \qquad [x_0 = l(0),\ x_1 = l(1)].$$

Considérons en particulier, le cas où Z est successivement un groupe de Lie Γ sur lequel G opère comme groupe d'automorphismes et l'algèbre de Lie $\underline{\Gamma}$ de Γ sur lequelle G opère par les automorphismes associés. Posons $\mathfrak{X} = \Gamma \times \mathcal{X}$ et $\mathfrak{Z}^0 = \Gamma \times \mathcal{X}$, puis, construisons $\mathfrak{X}(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})$ (*cf.* la proposition II.4.1 et la remarque qui suit). On constate alors immédiatement que $\mu^{l,\omega}_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}$ et $\mu^{l,\omega}_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}$ sont *associés*, c'est-à-dire qu'on a, en reprenant les notations de II.4.1 ;

$$\underline{\mu}^{l,\omega}_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})} = k^{-1} \circ \mu^{l,\omega}_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})} \circ k.$$

Application. — Soit $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ un deuxième espace fibré principal différentiable et soit Γ' un groupe de Lie sur lequel G' opère comme groupe d'automorphismes. Comme ci-dessus, on forme $\mathfrak{X}'(\mathcal{E}')$ et $\mathfrak{Z}'^0(\mathcal{E}')$. Supposons qu'il existe un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}: \quad \mathfrak{X}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{X}'(\mathcal{E}),$$

auquel est associé

$$\varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}: \quad \mathfrak{Z}^0(\mathcal{E}) \to \mathfrak{Z}'^0(\mathcal{E}'),$$

tel que l'image par $\varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}$ de tout élément plan $c^{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}_{\gamma}(\omega)$ soit l'élément $c^{\mathfrak{Z}'^0(\mathcal{E}')}_{\gamma'}(\omega')[\gamma \in \mathfrak{Z}^0(\mathcal{E}),\ \gamma' = \varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}(\gamma)$, ω et $\omega' =$ deux connexions sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ resp.]. En d'autres termes, $c^{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}(\omega)$ est projetable par $\varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}$ et son image est $c^{\mathfrak{Z}'^0(\mathcal{E})}(\omega)$. *Dans ces conditions, $c^{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}(\omega)$ est également projetable par $\varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}$ et son image est $c^{\mathfrak{X}'(\mathcal{E}')}(\omega')$.* En effet, quel que soit le chemin l de $\mathcal{X}$, à l'homomorphisme

$$\mu^{l,\omega'}_{\mathfrak{X}'(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}: \quad \mathfrak{X}_{x_0}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{X}'_{x_1}(\mathcal{E}')$$

est manifestement associé

$$\mu^{l,\omega'}_{\mathfrak{Z}'^0(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}: \quad \mathfrak{Z}^0_{x_0}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{Z}'^0_{x_1}(\mathcal{E}').$$

Par hypothèse, ce dernier homomorphisme coïncide avec $\varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})} \circ \mu^{l,\omega}_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}$ qui est associé à $\varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})} \circ \mu^{l,\omega}_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}$. On a donc

$$\mu^{l,\omega'}_{\mathfrak{X}'(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})} \circ \mu^{l,\omega}_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}.$$

En faisant varier x_1, on voit que si y_t se déplace parallèlement à lui-même dans $\mathfrak{X}(\mathcal{E})$ relativement à ω, $\varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}(y_t)$ se déplace parallèlement à lui-même relativement à ω', résultat équivalent à celui que nous avons annoncé.

Pour terminer, on vérifie sans difficulté que, pour un lacet l_x, et dans le cas

de l'espace structural gauche et de l'espace de Lie de degré o de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, on a

$$\mu^{l_{x_1}\omega}_{\mathfrak{IR}(\mathcal{E})} = \mathrm{Int}\,(\tau_\omega(l_x)) \qquad \text{et} \qquad \mu^{l_{x_1}\omega}_{\mathcal{L}^0(\mathcal{E})} = \mathrm{Adj}\,(\tau_\omega(l_x)).$$

CHAPITRE V.

Champs normaux. Champs normaux intégrables.

Introduction. — On considère, dans ce chapitre, un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de base $\mathcal{X}$ (de dimension d) et de groupe structural G (de dimension n), et l'on étudie les sous-espaces fibrés principaux de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, en liaison avec les sous-espaces de l'espace de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.

Un sous-espace $\mathcal{L}'^0$ de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ déterminant un champ d'éléments tangents aux fibres de $\mathcal{E}$, tandis qu'une connexion ω détermine un champ transversal à ces mêmes fibres, la réunion des deux engendre ce que nous appelons un *champ normal*. On étudie les conditions d'intégrabilité d'un tel champ et l'on trouve (§ 4) qu'il faut et il suffit que le sous-faisceau L′ de L(E) engendré par $\mathcal{L}'^0$ soit stable pour la différentiation covariante Δ associée à ω et que L'^2 contienne la courbure $\Omega(\omega)$, pour que le champ normal correspondant soit intégrable. La démonstration de ce théorème se fait en définissant localement $\mathcal{L}'^0$ par des sections indépendantes du sous-espace de $\overset{*}{\mathcal{L}}{}^0(\mathcal{E})$ orthogonal à $\mathcal{L}'^0$. La condition d'intégrabilité de Frobenius conduit à une égalité dont les différents termes se séparent aisément en fonction de leurs degrés par rapport aux différentielles des coordonnées de la fibre et de la base : les uns conduisent à la condition de stabilité, les autres, à la condition portant sur la courbure.

On vérifie ensuite que toute variété intégrale d'un champ normal intégrable est un sous-espace fibré principal à groupe structural de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Cela établit la correspondance entre sous-espaces de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et sous-espaces fibrés principaux de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.

Une autre application (§ 5) de la condition d'intégrabilité conduit au théorème d'Ambrose : on obtient le plus petit sous-espace de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ invariant par transport parallèle et contenant $\Omega(\omega)$ en transportant de toutes les façons possibles les éléments de courbure, c'est-à-dire les valeurs que prend $\Omega(\omega)$ pour les 2-vecteurs tangents à $\mathcal{X}$. A ce plus petit sous-espace correspondent évidemment les nappes d'holonomie.

1. Champ normal. — Soit $\mathcal{L}'^0$ un sous-espace de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ (sous-espace au sens « sous-espace d'un espace fibré différentiable à fibre-algèbre de Lie », bien entendu). On associe à $\mathcal{L}'^0$ le champ Λ de p-éléments plans tangents aux fibres de $\mathcal{E}$ et définis au point $y \in \mathcal{E}_x$ par

$$\Lambda_y = \beta^{-1}(j_{\mathcal{E}}(y)\,\mathcal{L}'^0). \tag{V.1.1}$$

Rappelons que cette expression, conformément aux notations du paragraphe II.4 peut être donnée sous la forme

$$\Lambda_y = (k(\mathcal{L}'^0_x))_y. \tag{V.1.2}$$

Il résulte de la proposition II.4.3 que Λ est invariant par les translations à droite de G sur $\mathcal{E}$. Donnons-nous d'autre part une connexion ω, sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, dont nous noterons le champ de connexion $c(\omega)$, comme d'habitude.

Définition V.1.1 — *On appelle champ normal* $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ *associé à un sous-espace* $\mathcal{L}'^0$ *de* $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ *et à une connexion* ω, *le champ de* $(p+d)$*-éléments plans tangents à* $\mathcal{E}$ *engendré par le champ* Λ *défini ci-dessus et par* $c(\omega)$.

Puisque Λ_y et $c_y(\omega)$ n'ont en commun que le vecteur nul et qu'ils sont eux-mêmes réguliers, il est clair que $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ est régulier. Il est non moins évident que c'est un champ globalement invariant par les translations à droite de G sur $\mathcal{E}$.

Exemple. — Soit $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ un sous-espace fibré principal à groupe structural de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G')$ dont l'espace structural gauche $\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$ est considéré comme un sous-espace de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ (*voir* § III.9) et dont l'espace de Lie $\mathcal{L}'(\mathcal{E}')$ est également un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Soit ω' une connexion de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dont l'extension à $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est notée ω. Comme $\mathcal{E}'_x = \mathfrak{M}'_x(\mathcal{E}'_x).y$ pour tout point $y \in \mathcal{E}_x (x \in \mathcal{X})$, on voit que l'élément plan

$$\beta^{-1}(j_{\mathcal{E}^0}(y)\, \mathcal{L}'^0_x(\mathcal{E}')) = \underline{(\mathfrak{M}'_x(\mathcal{E}'))}_y$$

n'est autre que l'espace des vecteurs verticaux (c'est-à-dire tangents aux fibres) tangents à $\mathcal{E}'$ au point y. Comme, d'autre part, $c_y(\omega)$ et $c_y(\omega')$ coïncident sur $\mathcal{E}'$ et que $c_y(\omega)'$ et $\underline{(\mathfrak{M}'_x(\omega'))}_y$ engendrent l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{E}'$ au point y, on peut énoncer :

Proposition V.1.1 — *Tout sous-espace fibré principal différentiable à groupe structural* $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ *de* $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ *est une variété intégrale du champ normal associé à l'espace de Lie de* $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ *d'une part et à l'extension d'une connexion quelconque de* $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, *d'autre part.*

2. Stabilité pour la différentiation covariante. — A $\mathcal{L}'^0$ est associé un espace fibré $\mathcal{L}'$ engendré à partir de $\mathcal{L}'^0$ par multiplication extérieure par les formes différentielles ordidaires de la base et identifiable à l'espace fibré des formes différentielles sur $\mathcal{X}$ à valeurs dans $\mathcal{L}'^0$. C'est un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Nous noterons L' le faisceau des sections différentielles de $\mathcal{L}'$.

Proposition V.2.1 — *Pour que* L' *soit stable pour la* L(E)*-différentiation covariante* Δ *associée à une connexion* ω *de* $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ *il faut et il suffit que*

$$\Delta L'^0 \subset L'^1.$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de la formule de différentiation covariante du produit extérieur d'une forme différentielle tensorielle par une forme différentielle ordinaire. Elle est d'ailleurs valable pour tout sous-faisceau L′ de L(E) engendré à partir d'un sous-faisceau L′^{0} de L^0(E) par multiplication extérieure par les formes de la base.

Proposition V.2.2 — *Pour que le faisceau* L′ *soit stable pour la* L(E)*-différentiation covariante* Δ *associée à une connexion* ω*, il faut et il suffit que* $\mathfrak{L}'^0$ *soit invariant par le transport parallèle également associé à* ω.

En effet, soit (ρ_i) $(i=1, \ldots, n)$ une section locale différentiable de l'espace des repères de $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$ sur un ouvert U différentiablement homéomorphe à R^d, telle que l'ensemble des p premiers vecteurs $(\rho_\alpha)(\alpha=1, \ldots, p)$ constitue une base de $\mathfrak{L}'^0$ en tout point de U. Soient

$$\Delta\rho_i=\sum_{j=1}^{n}\omega^j{}_i\,\rho_j,$$

les formules expriment les différentielles covariantes des vecteurs constituant (ρ_i) en fonction des repères (ρ_i). Puisque, par hypothèse, L′ est stable, on a

$$\omega^a_\alpha=0 \qquad (\alpha=1, \ldots, p \text{ et } a=p+1, \ldots, n). \tag{V.2.1}$$

Choisissons alors comme système de coordonnées locales de $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$: sur la base $\mathfrak{X}$, un système de coordonnées quelconque de U, sur les fibres, les composantes X^i des vecteurs $X\in\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$ par rapport aux repères (ρ_i). Nous avons vu au paragraphe IV.6 que le transport parallèle associé à ω, ou plutôt le champ définissant ce dernier, était défini dans ces conditions par le système de Pfaff :

$$dX^i+\sum_{j=1}^{n}\omega^i{}_j X^j=0 \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{V.2.2}$$

qui traduit l'équation $\Delta X=0$. D'autre part, dans le système de coordonnées locales précédent, la sous-variété $\mathfrak{L}'^0$ de $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$ est définie par les équations

$$X^a=0 \qquad (a=p+1, \ldots, n),$$

et ses vecteurs tangents, par

$$X^a=0 \qquad \text{et} \qquad dX^a=0 \qquad (a=p+1, \ldots, n).$$

Or, si $X^a=0$, le système (V.2.2) devient

$$dX^\beta+\sum_{\alpha=1}^{p}\omega^\beta_\alpha X^\alpha=0 \qquad (\beta=1, \ldots, p),$$

$$dX^a+\sum_{\alpha=1}^{p}\omega^a_\alpha X^\alpha=0 \qquad (\alpha=p+1, \ldots, n).$$

Si l'on tient compte maintenant de l'égalité (V.2.1), les formules du deuxième type deviennent

$$dX^a = 0 \qquad (a = p+1, \ldots, n),$$

ce qui montre bien que l'élément plan définissant le transport parallèle en un point $\mathfrak{L}'^0$ est tangent en $\mathfrak{L}'^0$.

Réciproquement, la conservation de $\mathfrak{L}'^0$ par transport parallèle entraîne $\omega_\alpha^a = 0$ et, par suite, $\Delta L'^0 \subset L'$.

Nous considérerons maintenant le sous-espace $\mathfrak{L}''^0$ de $\overset{*}{\mathfrak{L}}{}^0(\mathcal{E})$ orthogonal à $\mathfrak{L}'^0$, c'est-à-dire le sous-espace de $\overset{*}{\mathfrak{L}}{}^0(\mathcal{E})$ constitué par les tenseurs X appartenant à $\overset{*}{\mathfrak{L}}{}^0(\mathcal{E})$ tels que le produit scalaire $\langle X, Y\rangle$ soit nul, quel que soit le tenseur Y appartenant à la fibre de $\mathfrak{L}'^0$ de projection $p(X)$.

Proposition V.2.3 — *Si le faisceau* L′ *est stable pour la* L(E)*-différentiation covariante associée à* ω, *le faisceau* L″ *déduit de* $\mathfrak{L}''^0$, *est également stable pour la* $\overset{*}{L}(E)$*-différentiation covariante* $\overset{*}{\Delta}$ *associée à* ω, *et réciproquement.*

En effet, on a

$$d\langle X, Y\rangle = \langle \Delta X, Y\rangle + \langle X, \overset{*}{\Delta} Y\rangle \qquad [X \in L^0(E) \text{ et } Y \in \overset{*}{L}{}^0(E)].$$

Or, si $X \in L'^0$ et $Y \in L''^0$, on a $\langle X, Y\rangle = 0$ et si $\Delta X \in L'$, on a $\langle \Delta X, Y\rangle = 0$, d'où $\langle X, \overset{*}{\Delta} Y\rangle = 0$ quel que soit $X \in L'$, égalité qui, à son tour, implique $\overset{*}{\Delta} Y \in L''$, comme on le voit facilement.

3. L'opérateur D. — Étant donné un espace vectoriel $\mathfrak{W}_0$ sur lequel G opère par l'intermédiaire d'une représentation $R : G \to \Gamma(\mathfrak{W}_0)$ (notations du paragraphe II.1), il est commode, pour la suite, de définir un opérateur D associé à ω par l'égalité

$$D\theta = d\theta + \underline{R}(\omega)\,\theta,$$

où θ est une forme différentielle sur $\mathcal{E}$, à valeurs dans $\mathfrak{W}_0$ et où ω est, naturellement, la forme de connexion représentant la connexion donnée. Bien entendu, si θ représente une forme différentielle tensorielle de type R [section de $\mathfrak{W}(\mathcal{E})$], l'opérateur D coïncide avec la W(E)-différentiation covariante associée à ω. En outre, en reprenant les notations du paragraphe II.4, on vérifie qu'on a la formule suivante, analogue à la formule (III.4.6) :

$$D''\Lambda(\theta, \theta') = \Lambda(D\theta, \theta') + (-1)^p \Lambda(\theta, D'\theta'), \tag{V.3.1}$$

où θ, θ′, $\Lambda(\theta, \theta')$ sont des formes différentielles sur $\mathcal{E}$ à valeurs dans $\mathfrak{W}_0$, $\mathfrak{W}'_0$ et $\mathfrak{W}''_0$ respectivement et de degrés p, q, $p+q$, tandis que D D′ et D″ sont attachés à une même connexion ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.

4. Intégrabilité des champs normaux :

Théorème V.4.1. — *Pour que le champ normal* $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ *soit intégrable, il faut et il suffit que le faisceau* L', *défini par* $\mathcal{L}'^0$, *soit stable pour la* L(E)*-différentiation covariante associée à* ω *et que la courbure* $\Omega(\omega)$ *soit une section de* L'^2.

Démonstration. — Définissons $\mathcal{L}'^0$ sur un ouvert U homéomorphe à R^d, en choisissant une section $(\rho^i)(i=1, \ldots, n)$ de l'espace des repères de $\overset{*}{\mathcal{L}}{}^0(\mathcal{E})$, dual de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$, telle que, en tout point $x \in U$, les $n-p$ derniers vecteurs ρ^a $(a=p+1, \ldots, n)$ du repère (ρ^i) de projection x, soient orthogonaux à $\mathcal{L}'^0_X$. Les vecteurs appartenant à $\mathcal{L}'^0_U$ peuvent alors être caractérisés par les $n-p$ relations suivantes :

$$\langle X, \rho^a \rangle = 0 \qquad [X \in \mathcal{L}^0(\mathcal{E}) \text{ et } a=p+1, \ldots, n].$$

Le champ normal $\Gamma(\mathcal{L}^0, \omega)$ est donc défini par les égalités suivantes où φ_ω désigne le projecteur associé à la connexion ω et β, la forme définie au paragraphe II.4 :

$$\langle \beta \circ \varphi_\omega, \rho^a \rangle = 0 \qquad (a=p+1, \ldots, n).$$

Puisque, par définition, $\varphi_\omega = \beta^{-1} \circ \omega$, ce champ normal est simplement défini par le système de Pfaff :

$$\langle \omega, \rho^a \rangle = 0 \qquad (a=p+1, \ldots, n), \tag{V.4.1}$$

où ω et ρ^a désignent les formes et fonctions sur $\mathcal{E}_U$, à valeurs dans $\underline{G}$, et dans $\overset{*}{G}$ qui représentent la connexion ω et les tenseurs ρ^a.

Posons

$$\Pi = \langle \omega, \rho^{p+1} \rangle \wedge \ldots \wedge \langle \omega, \rho^n \rangle.$$

D'après le théorème de Frobenius, pour que le système de Pfaff (V.4.1) soit complètement intégrable, il faut et il suffit qu'on ait

$$d\langle \omega, \rho^a \rangle \wedge \Pi = 0 \qquad (a=p+1, \ldots, n). \tag{V.4.2}$$

La formule (V.3.1) permet de calculer le premier facteur de chacun de ces $n-$ produits extérieurs :

$$d\langle \omega, \rho^a \rangle = \langle D\omega, \rho^a \rangle - \langle \omega, \overset{*}{D}\rho^a \rangle.$$

Mais, puisque ρ^a représente un tenseur, l'opérateur $\overset{*}{D}$ coïncide avec la $\overset{*}{L}(E)$-différentiation covariante $\overset{*}{\Delta}$ associée à ω, pour laquelle on a

$$\overset{*}{\Delta}\rho^a = \sum_{i=1}^{n} 0^a{}_i \rho^i \qquad (a=p+1, \ldots, n) \tag{V.4.3}$$

où les $0^a{}_i$ sont des formes différentielles ordinaires sur U. D'autre part, la pre-

mière des formules (III.5.4), dérivée de la formule définissant la courbure au paragraphe III.2, montre qu'on peut écrire

$$D\omega = d\omega + [\omega, \omega] = \Omega(\omega) + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Au total, on a donc

$$d\langle \omega, \rho^a \rangle = \langle \Omega(\omega), \rho^a \rangle + \frac{1}{2}\langle [\omega, \omega], \rho^a \rangle + \sum_{i=1}^{n} \theta^a{}_i \langle \omega, \rho^i \rangle,$$

Il reste à exprimer que $\mathcal{L}'^0$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$. C'est sur le deuxième terme du second membre de la dernière égalité que cette hypothèse va se traduire. En effet, si θ_1 et θ_2 sont deux formes différentielles sur $\mathcal{E}_U$, à valeurs dans $\underline{G}$ et de degrés p et q respectivement, on a l'égalité

$$\text{(V.4.4)} \quad \langle [\theta_1, \theta_2], \rho^a \rangle = \sum_{b=p+1,\, i=1}^{n} \mu^a{}_{bi} \left(\langle \theta_1, \rho^b \rangle \wedge \langle \theta_2, \rho^i \rangle - (-1)^{pq} \langle \theta_2, \rho^b \rangle \wedge \langle \theta_1, \rho^i \rangle \right),$$

pour chaque valeur de $a = p+1, \ldots, n$ [17],

Appliquons (V.4.4) à $\langle [\omega, \omega], \rho^a \rangle$. On obtient

$$\frac{1}{2}\langle [\omega, \omega], \rho^a \rangle = \sum_{b=p+1,\, i=1}^{n} \mu^a{}_{bi} \langle \omega, \rho^b \rangle \wedge \langle \omega, \rho^i \rangle.$$

De telle sorte qu'en définitive, l'égalité (V.4.2) se réduit à

$$\text{(V.4.5)} \qquad \langle \Omega(\omega), \rho^a \rangle \wedge \Pi + \sum_{\alpha=1}^{p} \theta^a_\alpha \wedge \langle \omega, \rho^\alpha \rangle \wedge \Pi = 0.$$

pour $a = p+1, \ldots, n$,

---

(17) Cette formule dérive d'une formule classique que nous rappelons rapidement. Soit $\underline{G}'$ une sous-algèbre de $\underline{G}$ de dimension p et $G'' \subset \underline{G}^*$, le sous-espace orthogonal à $\underline{G}'$ dans le dual $\underline{G}^*$ de $\underline{G}$. Soit (Z^i) une base de $\underline{G}^*$ dont les $n-p$ derniers vecteurs Z^α forment une base de G''.

Les formes ε^a, définies par $\varepsilon^a(X, Y) = \langle [X, Y], Z^a \rangle$ sont bilinéaires et antisymétriques en $X, Y \in \underline{G}$. On a donc

$$\varepsilon^a = \frac{1}{2} \sum_{a,j,i} \mu^a{}_{ij} Z^i \wedge Z^j,$$

a variant de $p+1$ à n, i et j, de 1 à n.

Mais ε^a s'annule sur $\underline{G}' \wedge \underline{G}'$ puisque $X \in \underline{G}'$ et $Y \in \underline{G}'$ entraînent $[X, Y] \in \underline{G}'$ On a donc $\mu^a_{\alpha\beta} = 0$ pour $a = p+1, \ldots, n$ et $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$. Par suite

$$\varepsilon^a = \sum_{b=p+1,\, i=1}^{n} \mu^a{}_{bi} Z^b \wedge Z^i \qquad (a = p+1, \ldots, n).$$

C'est cette formule qui, antisymétrisée, transposée sur $\mathcal{E}$, et tout, et tout, donne la formule (V.4.4).

Plaçons-nous maintenant en un point $y \in \mathscr{E}_x$ et soit $(\beta^r)(r = 1, \ldots, d)$ un corepère de $\mathfrak{X}$ au point x. L'ensemble des formes β^r (ou, en toute rigueur, l'ensemble des formes induites par $p_{\mathscr{E}}$ à partir des formes β^r) et des formes $\eta^i = \langle \omega, \rho^i \rangle (i = 1, \ldots, n)$ constitue un corepère de $\mathscr{E}$ au point y puisque les unes s'annulent pour les vecteurs verticaux, les autres pour les vecteurs situés dans l'élément $c_y(\omega)$ du champ de connexion et que, dans chaque paquet, on a, par hypothèse, affaire à des formes linéairement indépendantes. On utilisera maintenant l'expression classique « formes de type (p, q) » étant entendu que les formes β^r sont de type $(1, 0)$. Dans ces conditions, (V.4.5) ne contient pas de termes de type $(0, n-p+2)$, et les seuls termes de type $(1, n-p+1)$ qui y figurent sont

$$0^a_\alpha \wedge \langle \omega, \rho^\alpha \rangle \wedge \Pi.$$

On a donc nécessairement $0^a_\alpha = 0$ quels que soient $a = p+1, \ldots, n$ et $\alpha = 1, \ldots, p$. Cette condition entraîne la stabilité de L'' pour $\overset{*}{\Delta}$ et, par suite, la stabilité de L' pour Δ.

Il ne reste plus qu'à exprimer que

$$\langle \Omega(\omega), \rho^a \rangle \wedge \Pi = 0 \qquad (a = p+1, \ldots, n).$$

Mais $\Omega(\omega)$ s'exprime en fonction des β^r exclusivement tandis que Π ne dépend que des η^i. L'égalité précédente implique donc

$$\langle \Omega(\omega), \rho^a \rangle = 0,$$

condition qui exprime que $\Omega(\omega)$ est une section de L'^2. Comme il est bien clair, d'autre part, que ces deux conditions sont suffisantes, le théorème annoncé est complètement démontré.

5, Holonomie. — Il est clair que l'intersection de deux sous-espaces fibrés de $\mathscr{L}^0(\mathscr{E})$ invariants par transport parallèle est un sous-espace fibré invariant par transport parallèle. Il est non moins clair que si deux sous-faisceaux de L(E) contiennent l'un et l'autre $\Omega(\omega)$, leur intersection contient également cette courbure. Comme le transport parallèle nous permet de toujours nous ramener à une fibre unique de $\mathscr{L}^0(\mathscr{E})$, c'est-à-dire à l'intersection de sous-espaces vectoriels de dimension finie, on peut considérer l'intersection de tous les sous-espaces $\mathscr{L}'^0 \subset \mathscr{L}^0(\mathscr{E})$ invariants par transport parallèle relativement à une même connexion et contenant la courbure de cette connexion. On obtient alors le résultat suivant :

Proposition V.5.1. — *L'intersection de tous les champs normaux intégrables relativement à une même connexion est un champ normal intégrable appelé champ d'holonomie de la connexion considérée.*

Par ailleurs, nous avons déjà remarqué que $\mathfrak{L}(\omega)$ était l'espace structural

gauche ([18]) de toute nappe d'holonomie V de ω. Posons $\mathfrak{L}^0(\omega) = k^{-1}(\underline{\mathfrak{L}(\omega)})$ où $\underline{\mathfrak{L}(\omega)}$ désigne, conformément à une notation habituelle, l'espace fibré des algèbres de Lie des fibres de $\mathfrak{L}(\omega)$. L'espace $\mathfrak{L}(\omega)$ engendré par $\mathfrak{L}^0(\omega)$ est l'espace de Lie de V. La proposition V.1.1 montre alors que toute nappe d'holonomie — définie comme lieu des points atteints par les chemins ω-horizontaux d'origine $y \in \mathcal{E}$ — est une variété intégrale du champ normal $\Gamma(\mathfrak{L}^0(\omega), \omega)$ associé à $\mathfrak{L}^0(\omega)$ et à ω.

Il est, d'autre part, bien évident que, par construction, une nappe d'holonomie est la plus petite variété possible à laquelle soit associé un champ normal intégrable. $\Gamma(\mathfrak{L}^0(\omega), \omega)$ est donc le plus petit champ normal relatif à la connexion ω qu'il soit possible d'envisager, c'est-à-dire l'intersection de tous les champs normaux intégrables associés à ω. D'où :

PROPOSITION V.5.3. — *Le champ d'holonomie, défini comme l'intersection de tous les champs normaux intégrables associés à une même connexion ω coïncide avec* $\Gamma(\mathfrak{L}^0(\omega), \omega)$.

Enfin, d'après le théorème V.4.1, le plus petit champ normal intégrable possible correspond au plus petit sous-espace $\mathfrak{L}'^0$ invariant par transport parallèle associé à ω et contenant la courbure $\Omega(\omega)$. Or, le plus petit sous-espace $\mathfrak{L}'^0$ engendré par transport parallèle et contenant $\Omega(\omega)$ contient nécessairement les vecteurs de $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$ obtenus en transportant par parallélisme les éléments de courbure, c'est-à-dire les valeurs que prend la forme différentielle $\Omega(\omega)$ [de degré 2 sur $\mathfrak{X}$, à valeurs dans $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$] pour $u \in \mathcal{C}^2$. Mais le sous-espace d'espace fibré différentiable à fibre-algèbre de Lie engendré dans $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$ à partir des vecteurs obtenus de cette façon est lui-même invariant par transport parallèle car, si X_t et Y_t se déplacent parallèlement à eux-mêmes, $[X_t, Y_t]$ se déplace aussi par parallélisme. Comme ce sous-espace contient évidemment la courbure, on peut énoncer :

PROPOSITION V.5.4. — *Le champ d'holonomie correspond, pour une connexion donnée, au sous-espace d'algèbres de Lie de $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$ engendré par les éléments de courbure transportés par parallélisme de toutes les façons possibles en tous les points de $\mathfrak{X}$* ([19]).

6. VARIÉTÉS INTÉGRALES D'UN CHAMP NORMAL INTÉGRABLE. — De l'invariance d'un champ normal $\Gamma(\mathfrak{L}'^0, \omega)$ par les translations à droite de G sur $\mathcal{E}$, on déduit immédiatement :

PROPOSITION V.6.1. — *Étant donnée une variété intégrale* V *d'un champ*

([18]) Rappelons que $\mathfrak{L}(\omega)$ est l'espace d'holonomie (*voir* § IV.1).

([19]) *Voir* Ambrose et Singer [1] ou Lichnerowicz [1], p. 122-131.

normal intégrable $\Gamma(\mathscr{L}'^0, \omega)$, *la variété* $V.s$ *obtenue en transformant* V *par la translation à droite* $s \in G$ *est encore une variété intégrale. Réciproquement on obtient de cette façon toutes les variétés intégrales de* $\Gamma(\mathscr{L}'^0, \omega)$ *à partir de l'une d'entre elles.*

On a également :

Proposition V.6.2. — *Toute variété intégrale* V *d'un champ normal intégrable est engendrée par les chemins horizontaux issus des points de l'une quelconque de ses fibres* $V_x(x \in \mathscr{X})$.

Il est en effet évident que, au-dessus d'un chemin différentiable joignant x à x', les chemins horizontaux rencontrant $V_{x'}$ rencontrent $V_{x'}$, et réciproquement.

Remarquons, d'autre part, qu'en général, si $\Gamma(\mathscr{L}'^0, \omega)$ n'est pas intégrable ou, plus précisément, si $\mathscr{L}'^0$ n'est pas invariant par transport parallèle, il n'existe pas de sous-espace fibré γ à fibre-groupe de Lie de $\mathscr{L}^0(\mathscr{E})$ tel que $k(\mathscr{L}'^0_x) = \underline{\gamma}_{\underline{x}}$ en tout point x de $\mathscr{X}$. En effet, s'il existe bien un sous-groupe connexe de chaque fibre $\mathfrak{M}_x(\mathscr{E})$ dont l'algèbre de Lie s'identifie à la sous-algèbre $\mathscr{L}'^0_x$ correspondante, il n'en résulte pas pour autant que les sous-groupes correspondant à deux fibres distinctes soient isomorphes. Par contre, si $\Gamma(\mathscr{L}'^0, \omega)$ est intégrable, $\mathscr{L}'^0$ est invariant par transport parallèle, et, dans ces conditions, étant donné un chemin différentiable l de $\mathscr{X}$, les isomorphismes

$$\mu^{l,\omega}_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})} : \quad \mathfrak{M}_x(\mathscr{E}) \to \mathfrak{M}_{x'}(\mathscr{E})$$

et

$$\mu^{l,\omega}_{\mathscr{L}^0(\mathscr{E})} : \quad \mathscr{L}^0_x(\mathscr{E}) \to \mathscr{L}^0_{x'}(\mathscr{E})$$

sont associés (*voir* § IV.6). Comme, par hypothèse, on a $\mu^{l,\omega}_{\mathscr{L}^0(\mathscr{E})}(\mathscr{L}'^0_x) = \mathscr{L}'^0_x$ on a aussi, en notant γ_x et $\gamma_{x'}$ les sous-groupes connexes de $\mathfrak{M}_x(\mathscr{E})$ et de $\mathfrak{M}_{x'}(\mathscr{E})$ dont les algèbres de Lie s'identifient à $\mathscr{L}'^0_x$ et à $\mathscr{L}'^0_{x'}$:

$$\mu^{l,\omega}_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\gamma_x) = \gamma_{x'}.$$

Il en résulte évidemment que la réunion des $\gamma_x(x \in \mathscr{X})$ est un sous-espace fibré différentiable à fibre-groupe de $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$. On note bien entendu γ ce sous-espace.

Proposition V.6.3. — *Si le champ normal* $\Gamma(\mathscr{L}'^0 \omega)$ *est intégrable, il existe un sous-espace de groupes* γ *de* $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$ *dont la fibre* $\gamma_x(x \in \mathscr{X})$ *est le sous-groupe connexe de* $\mathfrak{M}_x(\mathscr{E})$ *admettant* $k(\mathscr{L}'^0)$ *pour algèbre de Lie et tel que toute variété intégrale de* $\Gamma(\mathscr{L}'^0, \omega)$ *s'obtienne en appliquant à une nappe d'holonomie toutes les transformations de* γ [*opérant à gauche sur* $\mathscr{E}$ *comme sous-groupe de* $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$].

Pour démontrer ce résultat, nous remarquerons tout d'abord que, puisque la composante verticale de $\Gamma_y(\mathscr{L}'^0, \omega)(y \in \mathscr{E}_x)$ est $[\underline{\gamma}_x]_y$, la composante connexe

de la variété intégrale V passant par y est $\gamma_x.y$. D'autre part, comme l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie en x est nécessairement incluse dans l'algèbre de Lie de γ_x puisque le champ d'holonomie est le plus petit champ intégrable et qu'en outre, la nappe d'holonomie V′ passant par y fait évidemment partie de V, $\gamma.V'$ est localement une variété intégrale de $\Gamma(\mathfrak{L}'^0, \omega)$. Comme γ et V′ sont connexes, $\gamma.V'$ est bien une variété intégrale de notre champ normal. Enfin, comme toutes les variétés intégrales de $\Gamma(\mathfrak{L}'^0, \omega)$ se déduisent de l'une d'elles par translation à droite et que les opérations de G et $\mathfrak{M}(\mathfrak{E})$ commutent, toute variété intégrale peut être construite à partir d'une nappe d'holonomie par les opérations précédentes. Le théorème est donc démontré.

Il en résulte :

Proposition V.6.4. — *Toute variété intégrale* V *de* $\Gamma(\mathfrak{L}'^0, \omega)$ *est engendrée par les chemins* ω*-horizontaux qui rencontrent une composante connexe de* $V_x(x \in \mathfrak{X})$.

Et, puisque $\mathfrak{E}$ est une variété différentiable, donc connexe :

Corollaire. — *L'espace fibré* $\mathfrak{E}$ *est engendré par les chemins* ω*-horizontaux qui rencontrent une composante connexe de* $\mathfrak{E}_x(x \in \mathfrak{X})$.

On peut alors démontrer :

Proposition V.6.5. — *Toute variété intégrale* V *d'un champ normal intégrable est un sous-espace fibré principal différentiable à groupe structural de* $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$.

En effet, soit γ' l'espace fibré de groupes engendré par γ et $\mathfrak{T}(\omega)$. Comme γ_x contient la composante connexe du groupe d'holonomie en x, il est clair que γ'_x est simplement transitif sur V_x. Il en résulte que $G'_x = j_{\mathfrak{M}}(y)\gamma'_x$ est un sous-groupe de G indépendant de $y \in V_x$ et que G'_x est simplement transitif sur V_x. Soit alors $x' \in \mathfrak{X}$ un point relié à x par un chemin différentiable l. Le parallélisme le long de l détermine un isomorphisme appliquant G'_x sur $G'_{x'}$. Comme cet isomorphisme n'est autre que l'identité dans G, cela achève la démonstration.

En rapprochant ce dernier résultat de la proposition V.1.1 et du théorème V.4.1, on obtient ;

Théorème V.6.1. — *Pour qu'il existe un sous-espace fibré principal à groupe structural* $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, G')$ *de* $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ *admettant* $\mathfrak{L}'^0 \subset \mathfrak{L}^0(\mathfrak{E})$ *pour espace de Lie de degré* o, *il faut et il suffit qu'il existe une connexion* ω *sur* $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ *dont la courbure* $\Omega(\omega)$ *soit une section de* L'^2 *et telle que* $\Delta L' \subset L'$, Δ *étant la* $L(E)$*-différentiation covariante associée à* ω *et* L' *le sous-faisceau de* $L(E)$ *engendré par* $\mathfrak{L}'^0$.

7, Sous-espaces stables pour la différentiation covariante :

Proposition V.7.1. — *Si* $\mathfrak{L}'^0$ *est un sous-espace d'algèbres de Lie de* $\mathfrak{L}^0(\mathfrak{E})$

engendrant un faisceau L′ *stable pour la* L(E)*-différentiation covariante associée à une connexion* ω *de* $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, *on a*

$$|\mathfrak{L}^{0/0}, \mathfrak{L}^{0}(\omega)| \subset \mathfrak{L}^{0/0}.$$

En effet, un tel sous-espace est invariant par transport parallèle et, si X est un de ses éléments, la formule (III.5.2) montre que $[X, \Omega(\omega)]$ en fait également partie. La proposition résulte donc du théorème d'Ambrose (V.5.4).

Inversement, si $G' \subset G$ est le groupe structural d'une nappe d'holonomie de ω et si $\underline{G}'' \subset \underline{G}$ est une sous-algèbre de Lie telle que $[G'', \underline{G}'] \subset \underline{G}''$, les automorphismes intérieurs de G′ transforment G″ en lui-même et les automorphismes adjoints transforment $\underline{G}''$ en elle-même. On peut donc modeler $\underline{G}'' \times \mathcal{X}$ sur la nappe d'holonomie et construire ainsi un sous-espace $\mathfrak{L}^{0/0}$ de $\mathfrak{L}^{0}(\mathcal{E})$ engendrant un sous-faisceau L′ manifestement stable pour la différentiation covariante associée à ω. Comme, en général, on peut choisir $\underline{G}''$ de telle sorte que $\underline{G}'$ n'y soit pas incluse, on voit qu'il existe des sous-espaces de $\mathfrak{L}^{0}(\mathcal{E})$ invariants par transport parallèle et ne contenant pas la courbure.

CHAPITRE VI.

Homomorphismes.

Introduction. — Soient $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ deux espaces fibrés principaux différentiables de base commune $\mathcal{X}$ et de groupes structuraux G et G′ respectivement. Nous avons vu qu'à tout couple d'homomorphismes $(\psi : G \to G', g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}')$ étaient associés des homomorphismes

$$\begin{aligned} \psi^{g}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} &: \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}'), \\ \psi^{g}_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} &: \quad \mathfrak{L}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{L}'(\mathcal{E}'), \\ \psi^{g}_{C(B)} &: \quad C(E) \to C'(E'). \end{aligned}$$

Le but de ce chapitre est de chercher à construire, à partir d'homomorphismes $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$, $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}$, $\varphi_{C(E)}$, donnés à l'avance, appliquant les espaces associés à $\mathcal{E}$ dans les espaces associés à $\mathcal{E}'$ et liés par certaines relations, un couple (ψ, g) pour lequel

$$\psi^{g}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}, \qquad \psi^{g}_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} \qquad \text{et} \qquad \psi^{g}_{C(E)} = \varphi_{C(E)}.$$

Mais auparavant, et c'est l'objet du premier paragraphe, il convient de chercher si un tel couple est unique, et, s'il ne l'est pas (ce qui est évidemment le cas ainsi que le montre l'exemple des homomorphismes adjoints), de déterminer toutes les solutions à partir de l'une d'elles. On est donc amené à comparer deux couples (ψ, g) et (φ, h) pour lesquels

$$\varphi^{h}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \psi^{g}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}, \qquad \varphi^{h}_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} = \psi^{g}_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} \qquad \text{et} \qquad \varphi^{h}_{C(E)} = \psi^{g}_{C(E)}.$$

On utilise pour cela la notion de champ normal : dans les conditions indiquées, les images $h(\mathscr{E})$ et $g(\mathscr{E})$ de $\mathscr{E}$ sont les variétés intégrales d'un même champ normal. A partir de là, on montre que l'élément $s \in G'$ défini par $g(y) = h(y).s$ est indépendant du choix de y dans $\mathscr{E}$, de sorte que, en définitive, on a

$$\psi = \mathrm{Int}(s^{-1}) \circ \varphi \qquad \text{et} \qquad g = D_s \circ h.$$

Revenons au problème qui fait l'objet du reste du chapitre. Il s'agit, avons-nous dit, de construire un couple d'homomorphismes compatibles (ψ, g) liant $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$ à $\mathscr{E}'(\mathscr{X}, G')$, de telle sorte que les homomorphismes $\psi^g_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$, $\psi^g_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$, $\psi^g_{C(E)}$ coïncident avec des homomorphismes donnés *a priori*, mais satisfaisant à certaines conditions. Quelles conditions ? Il est d'abord évident que $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ et $\varphi_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$ doivent être associés, de sorte que $\varphi_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$ sera entièrement déterminé par $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$. Il convient de remarquer ensuite que, à cause des opérations de $L'^1(E')$ sur $C'(E')$, l'homomorphisme $\varphi_{C(E)}$ est complètement défini par la donnée d'une connexion ω sur $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$ et de la connexion-image $\varphi_{C(E)}(\omega) = \omega'$. Sous cette forme, la formule (III.4.1) et la proposition III.6.1 montrent que, si le couple (ψ, g) existe, les différentielles covariantes Δ, Δ' associées à ω, ω' et les courbures $\Omega(\omega)$, $\Omega(\omega')$, se correspondent par $\varphi_{L(E)}$: c'est cette propriété que nous supposerons réalisée.

En résumé, le problème se présente de la façon suivante : étant donnés deux homomorphismes associés $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ et $\varphi_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$, et deux connexions ω et ω' sur $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$ et $\mathscr{E}'(\mathscr{X}, G')$ respectivement, telles que

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta \qquad \text{et} \qquad \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)),$$

existe-t-il un couple d'homomorphismes compatibles (ψ, g) tels que

$$\psi^g_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})} = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}, \qquad \psi^g_{\mathscr{L}(\mathscr{E})} = \varphi_{\mathscr{L}(\mathscr{E})} \qquad \text{et} \qquad \psi^g_{C(E)}(\omega) = \omega', \quad ?$$

Ce problème est complètement résolu, par l'affirmative, dans le cas où G et G' sont connexes, et $\mathscr{X}$ *simplement connexe*. L'homomorphisme ψ est construit en choisissant $x_0 \in \mathscr{X}$ puis $y_0 \in \mathscr{E}_{x_0}$ et $y'_0 \in \mathscr{E}'_{x_0}$ et en posant

$$\psi = j_{\mathfrak{M}'}(y'_0) \circ \varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})} \circ i_{\mathfrak{M}}(y_0),$$

ce qui est bien un homomorphisme de G dans G'. L'homomorphisme g, d'autre part, est d'abord défini au-dessus du point x_0 choisi par l'égalité

$$g(y_0.s) = y'_0.\psi(s) \qquad (s \in G)$$

ou, ce qui revient au même :

$$g(m.y_0) = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(m).y'_0 \qquad [m \in \mathfrak{M}_{x_0}(\mathscr{E})].$$

On étend ensuite la définition de g à l'espace $\mathscr{E}$ tout entier en faisant correspondre à l'extrémité de tout chemin ω-horizontal d'origine $y = y_0.s$, l'extrémité du chemin ω'-horizontal d'origine $y' = y'_0.\psi(s)$ et de même projection.

L'essentiel de la démonstration consiste à vérifier que c'est bien un homomorphisme $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ qu'on définit ainsi et que cet homomorphisme est compatible avec $\underline{\psi}$. Le fait que $\mathcal{X}$ soit simplement connexe joue un rôle essentiel dans la démonstration que nous donnons ici. Nous verrons, dans le chapitre suivant, dans quelle mesure il est possible de se débarrasser de cette hypothèse.

1. Couples (φ, h) définissant les mêmes homomorphismes. — Nous ne faisons, dans ce paragraphe, *aucune hypothèse sur* $\mathcal{X}$.

Proposition VI.1.1. — *Soit* (φ, h) *un couple d'homomorphismes compatibles liant* $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathrm{G})$ *et* $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \mathrm{G}')$. *La translation à droite sur* $\mathcal{E}'$ *définie par* $s \in \mathrm{G}'$ *étant notée* D_s, *on pose*

$$\psi = \mathrm{Int}(s^{-1}) \circ \varphi \qquad et \qquad g = \mathrm{D}_s \circ h.$$

Le couple (ψ, g) *est alors compatible, et en notant* $\psi^g_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$, $\psi^g_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$, $\psi^g_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}$ [resp. $\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$, $\varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$, $\varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}$] *les homomorphismes associés au couple* (ψ, g) [*resp.* φ, h)], *on a*

$$\psi^g_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}, \qquad \psi^g_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} = \varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \qquad et \qquad \psi^g_{\mathrm{C}(\mathrm{E})} = \varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}.$$

Démontrons cette proposition pour $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, par exemple. On a, par définition

$$\begin{aligned}
\psi^g_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} &= i_{\mathcal{L}'}(g(y)) \circ \underline{\psi} \circ j_{\mathcal{L}}(y) \qquad (y \in \mathcal{E}) \\
&= i_{\mathcal{L}'}(h(y).s) \circ \underline{\psi} \circ j_{\mathcal{L}}(y) \\
&= i_{\mathcal{L}'}(h(y)) \circ \mathrm{Adj}(s) \circ \mathrm{Adj}(s^{-1}) \circ \underline{\varphi} \circ j_{\mathcal{L}}(y) \\
&= \varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}.
\end{aligned}$$

Proposition VI.1.2. — *Le champ normal* $\Gamma(\varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E})), \varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega))$ *est intégrable, quelle que soit la connexion* ω *choisie sur* $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathrm{G})$.

Ce résultat est une conséquence de la formule

$$\Delta' \circ \varphi^h_{\mathrm{L}(\mathrm{E})} = \varphi^h_{\mathrm{L}(\mathrm{E})} \circ \Delta$$

qui entraîne la stabilité du faisceau-image $\varphi^h_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\mathrm{L}(\mathrm{E}))$ pour la différentiation covariante Δ' associée à $\varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega)$, et de

$$\Omega(\varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{F})}(\omega)) = \varphi^h_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\Omega(\omega)),$$

qui nous place définitivement dans les conditions d'application du théorème V.4.1.

Avant d'aborder la réciproque de la proposition VI.1.1, nous démontrerons :

Proposition VI.1.3. — *L'image de l'espace* $\mathcal{E}$ *par l'homomorphisme* h *est une variété intégrale du champ normal*

$$\Gamma = \Gamma(\varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E})), \varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega)).$$

Plaçons-nous en effet, tout d'abord, en un point $x \in \mathfrak{X}$. La compatibilité du diagramme

Fig. 9.

entraîne, en notant $\mathscr{E}_{x,0}$ une composante connexe de la fibre $\mathscr{E}_x$ et $\mathfrak{M}_{x,0}(\mathscr{E})$ la composante connexe de l'identité dans $\mathfrak{M}_x(\mathscr{E})$:

$$h(\mathscr{E}_{x,0}) = \varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\mathfrak{M}_{x,0}(\mathscr{E})).h(y),$$

où y est un point de $\mathscr{E}_{x,0}$ choisi une fois pour toutes.

Soit, d'autre part, V la variété intégrale de Γ passant par $h(y)$. La composante connexe de $h(y)$ dans V_x est, d'après la proposition V.6.3 :

$$\mathrm{V}_{x,0} = \varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\mathfrak{M}_{x,0}(\mathscr{E})).h(y)$$

car $\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\mathfrak{M}_{x,0}(\mathscr{E}))$ est le sous-groupe connexe de $\mathfrak{M}'_{x'}(\mathscr{E}')$ admettant $h(\varphi^h_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})}(\mathfrak{L}_0(\mathscr{E})))$ pour algèbre de Lie puisque les homomorphismes $\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ et $\varphi^h_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})}$ sont associés. On en déduit

$$\mathrm{V}_{x,0} = h(\mathscr{E}_{x,0}).$$

La démonstration s'achève alors en rappelant que V et $\mathscr{E}$ sont engendrés par les chemins respectivement ω- et $\varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega)$-horizontaux issus des points de $\mathrm{V}_{x,0}$ et $\mathscr{E}_{x,0}$ (*voir* prop. V.6.4), et que les images par h des chemins ω-horizontaux sont des chemins $\varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega)$-horizontaux (prop. VI.1.1).

Abordons maintenant la réciproque de la proposition VI.1.1.

Proposition VI.1.4. — *Si deux couples d'homomorphismes compatibles liant* $\mathscr{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ *et* $\mathscr{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ *et notés* (φ, h) *et* (ψ, g), *sont tels que*

$$\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})} = \psi^g_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}, \qquad \varphi^h_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})} = \psi^g_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})} \qquad \text{et} \qquad \varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{E})} = \psi^g_{\mathrm{C}(\mathrm{E})},$$

le couple (ψ, g) *est du type défini par la proposition* VI.1.1, *c'est-à-dire qu'il existe* $s \in \mathrm{G}'$ *tel que*

$$\psi = \mathrm{Int}(s^{-1}) \circ \varphi \qquad \text{et} \qquad g = \mathrm{D}_s \circ h.$$

Donnons-nous, en effet, une connexion ω sur $\mathscr{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ et posons

$$\omega' = \varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega) = \psi^g_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega).$$

Les images de $\mathscr{E}$ par h et g sont, d'après la proposition précédente, deux variétés intégrales du champ normal $\Gamma(\mathfrak{L}'^0, \omega')$ où l'on a posé

$$\mathfrak{L}'^0 = \varphi^h_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})}(\mathfrak{L}^0(\mathscr{E})) = \psi^g_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})}(\mathfrak{L}^0(\mathscr{E})).$$

Choisissons d'abord un point y de la fibre $\mathscr{E}_x$ et définissons $s \in G'$ par la relation

$$g(y) = h(y).s.$$

Étant donné maintenant un point y' variable de $\mathscr{E}_x$ il existe $\sigma \in G$ tel que $y' = y.\sigma$ et réciproquement. Or, par définition, $\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ et $\psi^g_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ vérifient les deux relations suivantes :

$$\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(j_{\mathfrak{M}}(y)\sigma) = i_{\mathfrak{M}'}(h(y))\,\varphi(\sigma),$$
$$\psi^g_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(j_{\mathfrak{M}}(y)\sigma) = i_{\mathfrak{M}'}(g(y))\,\psi(\sigma).$$

Comme, par hypothèse, $\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ et $\psi^g_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ coïncident, on a successivement

$$\begin{aligned} i_{\mathfrak{M}'}(h(y))\,\varphi(\sigma) &= i_{\mathfrak{M}'}(g(y))\,\psi(\sigma) \\ &= i_{\mathfrak{M}'}(h(y).s)\,\psi(\sigma) \\ &= i_{\mathfrak{M}'}(h(y))\,\mathrm{Int}(s)\,\psi(\sigma). \end{aligned}$$

D'où

$$\psi(\sigma) = \mathrm{Int}(s^{-1})\,\varphi(\sigma)$$

et, sur $\mathscr{E}_x$:

$$\begin{aligned} g(y') &= g(y.\sigma) \\ &= g(y).\psi(\sigma) \\ &= g(y).(s^{-1}\varphi(\sigma)s) \\ &= h(y).\varphi(\sigma)s \\ &= h(y').s. \end{aligned}$$

Ce qui montre que s ne dépend pas du choix de y dans la fibre de $\mathscr{E}$ de projection x et que, au-dessus de ce même point x, on a bien $g = D_s \circ h$.

Il ne reste plus qu'à montrer que cette dernière relation s'étend à l'espace $\mathscr{E}$ tout entier. Considérons donc un point y_1 n'appartenant pas à la fibre $\mathscr{E}_x$ mais à $\mathscr{E}_{x_1}$ et relions x_1 à x par un chemin différentiable l. Soient

$$\mu : \quad \mathscr{E}_x \to \mathscr{E}_{x_1} \qquad \text{et} \qquad \mu' : \quad \mathscr{E}'_x \to \mathscr{E}'_{x_1},$$

les homéomorphismes définis par les transports parallèles relatifs aux connexions ω et ω'. L'invariance de l'ensemble des chemins ω'-horizontaux par les translations à droite montre que

$$D_s \circ \mu' = \mu' \circ D_s,$$

tandis que la conservation des chemins horizontaux par h et g permet d'écrire

$$\mu' \circ h = h \circ \mu \qquad \text{et} \qquad \mu' \circ g = g \circ \mu,$$

de sorte que si

$$g(\mu^{-1}(y_1)) = h(\mu^{-1}(y_1)).s,$$

on a d'abord

$$\mu'(g(\mu^{-1}(y_1))) = \mu'(h(\mu^{-1}(y_1))).s$$

puis

$$g(y_1) = h(y_1).s,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque. — La proposition II.3.1 montre que, par changement de base dans $\mathfrak{W}_0$, on obtient tous les homomorphismes $[G \to Gl(m, R),\ \mathcal{E} \to \mathcal{R}]$ auxquels sont associés les homomorphismes $R_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$, $R_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ et $R_{C(E)}$. C'est en particulier le cas pour les homomorphismes adjoints.

2. Détermination de (ψ, g). — Nous reprenons maintenant le problème exposé dans l'introduction. Nous supposons que $\mathfrak{X}$ est de dimension d, comme d'habitude, et que G et G′ sont respectivement de dimensions n et n'. Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

Théorème VI.2.1. — *Étant donné un homomorphisme*

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$$

auquel est associé

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}'(\mathcal{E}'),$$

s'il existe d'autre part deux connexions ω et ω', sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$ respectivement auxquelles correspondent les L(E)- et L′(E′)-différentiations covariantes Δ et Δ', si l'on a, de plus

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta \qquad \text{et} \qquad \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)),$$

enfin si G et G′ sont connexes et si $\mathfrak{X}$ est simplement connexe, il existe un couple d'homomorphismes compatibles

$$g : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \qquad \text{et} \qquad \psi : \quad G \to G',$$

pour lesquels on a

$$\psi^g_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} \qquad \text{et} \qquad \psi^g_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})},$$

tandis que

$$\psi^g_{C(E)}(\omega) = \omega'.$$

Nous démontrerons tout d'abord un résultat relatif au cas où la base de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$ est homéomorphe à R^d. Supposons donc, provisoirement, que $\mathfrak{X} = R^d$ et désignons par O l'origine de R^d.

Lemme. — *$\tau_\omega(l_0)$ et $\tau_{\omega'}(l_0)$ notant comme d'habitude les transformations [éléments de $\mathfrak{M}_0(\mathcal{E})$ et de $\mathfrak{M}'_0(\mathcal{E}')$ respectivement] associées à un lacet l_0 en O, on a, dans les conditions du théorème énoncé :*

$$\tau_{\omega'}(l_0) = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\tau_\omega(l_0)).$$

En effet, choisissons tout d'abord deux points $y_0 \in \mathcal{E}_0$ et $y'_0 \in \mathcal{E}'_0$. Soient $\rho(x)$

et $\rho'(x)$ les extrémités des chemins ω-horizontaux et ω'-horizontaux d'origine y_0 et y'_0 respectivement et se projetant l'un et l'autre sur le rayon vecteur $Ox (x \in \mathbb{R}^l)$. Soit alors

$$h : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

l'application définie par les deux égalités

$$h \circ \rho = \rho' \qquad \text{et} \qquad h(m.\rho(x)) = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m).h(\rho(x)).$$

Posons également

$$\psi = j_{\mathfrak{M}'}(y'_0) \circ \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} \circ i_{\mathfrak{M}}(y_0).$$

On définit ainsi un homomorphisme de G dans G' et l'on va voir que ψ et h sont compatibles. En effet, l'égalité

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta$$

montre que $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ applique tout d-élément du champ $c_{\mathcal{L}^0(\mathcal{E})}(\omega)$ qui définit le transport parallèle dans $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ sur un d-élément du champ $c_{\mathcal{L}'^0(\mathcal{E}')}(\omega')$ ([20]). Il en est donc de même pour $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$ et, si $m \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$ se déplace par parallélisme, $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m)$ se déplace également par parallélisme ([21]). Or, si x décrit un rayon vecteur à partir de O et si m_x se déplace parallèlement à lui-même $[p(m_x) = x]$, on sait que $s = j_{\mathfrak{M}}(\varphi(x))m_x$ est indépendant de x. Il en est de même de $s' = j_{\mathfrak{M}'}(\rho'(x))m'_x$ lorsque $m'_x \in \mathfrak{M}'_x(\mathcal{E}')$ se déplace parallèlement à lui-même et lorsque x décrit le même vecteur. Si de plus, on a, à l'origine :

$$m'_0 = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m_0),$$

on a aussi, d'après ce qui précède, $m'_x = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m_x)$ et, comme $m'_0 = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m_0)$ équivaut, d'après la définition de ψ à $s' = \psi(s)$, on peut écrire

$$j_{\mathfrak{M}'}(\rho'(x))\,(\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m_x)) = \psi(s).$$

D'autre part,

$$m_x.\rho(x) = \rho(x).j_{\mathfrak{M}}(\rho(x))\,m_x = \rho(x).s$$

et

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m_x).\rho'(x) = \rho'(x).j_{\mathfrak{M}'}(\rho'(x))\,(\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m_x)) = \rho'(x).\psi(s).$$

De sorte qu'en tenant compte, en outre, de l'égalité

$$h(m.\rho(x)) = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m).\rho'(x),$$

([20]) Pour s'en assurer, on peut, par exemple, utiliser des sections locales de l'espace des repères de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ ou encore, en tenant compte du paragraphe III.8, on peut examiner ce qui se passe sur les espaces induits par une application différentiable $l : I \to \mathcal{X}$. Dans le premier cas, on se reportera au paragraphe IV.6.

([21]) Se reporter à la fin du paragraphe IV.6.

qui sert à définir h, on a la relation

$$h(\rho(x).s) = h(\rho(x)).\psi(s) \qquad (s \in G).$$

La compatibilité de (ψ, h) sera démontrée lorsque nous aurons vérifié qu'on a une relation de même type lorsqu'on remplace $\rho(x)$ par un point quelconque de $\mathcal{E}$. Soit $y = \mu.\rho(x)$ un tel point $[\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})]$. On a successivement

$$\begin{aligned} h(y.s) = h((\mu.\rho(x)).s) &= h(\mu.(\rho(x).s)) \\ &= \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\mu).(h(\rho(x).s)) \\ &= \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\mu).(h(\rho(x)).\psi(s)) \\ &= (\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\mu).h(\rho(x))).\psi(s) \\ &= h(y).\psi(s). \end{aligned}$$

h est donc bien un ψ-homomorphisme. De plus, par définition même de h et de ψ, l'homomorphisme $\psi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ associé au couple (ψ, h) est $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$. Soit alors $\underline{\omega}'$ la connexion-image de ω par le couple (ψ, h) ou, plus précisément, par $\psi^h_{C(E)}$:

$$\underline{\omega}' = \psi^h_{C(E)}(\omega).$$

Il n'est pas évident, *a priori*, que la connexion ainsi obtenue coïncide avec ω'. Cependant, puisque $\psi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$, on a également $\psi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ et, en notant $\underline{\Delta}'$ la $L'(E')$-différentiation covariante associée à $\underline{\omega}'$, on sait qu'on a les égalités suivantes :

$$\psi^h_{L(E)} \circ \Delta = \underline{\Delta}' \circ \psi^h_{L(E)} \qquad \text{et} \qquad \psi^h_{L(E)}(\Omega(\omega)) = \Omega(\underline{\omega}').$$

En comparant ces égalités à celles qui sont vérifiées par hypothèse par Δ et Δ', il vient

$$\underline{\Delta}' = \Delta \qquad \text{et} \qquad \Omega(\underline{\omega}') = \Omega(\omega').$$

Il en résulte que $\underline{\omega}' = \omega' + \theta$ où θ est une action du centre $K'^1(E')$ de $L'^1(E')$ et que $\Delta'\theta = 0$ [conséquence immédiate de la formule (IV.5.1)]. La proposition IV.5.3 montre alors que

$$\tau_{\omega'}(l_0) = \tau_{\underline{\omega}'}(l_0).$$

Or, la définition de $\underline{\omega}'$ montre que

$$\tau_{\underline{\omega}'}(l_0) = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\tau_\omega(l_0)).$$

Par suite

$$\tau_{\omega'}(l_0) = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\tau_\omega(l_0)),$$

ce qui achève la démonstration du lemme. A partir de là, il serait facile de vérifier que $\omega' = \underline{\omega}'$, mais la méthode utilisée ne serait qu'un cas particulier de celle qui va nous servir à établir le théorème VI.2.1 dans le cas général et nous ne ferons pas cette vérification.

Nous revenons donc maintenant au cas général, en nous contentant de supposer, bien entendu, que $\mathfrak{X}$ est simplement connexe. Choisissons arbitrai-

rement un point $x_0 \in \mathfrak{X}$, puis deux points $y_0 \in \mathcal{E}_{x_0}$ et $y'_0 \in \mathcal{E}'_{x_0}$. Définissons comme ci-dessus un homomorphisme $\psi : G \to G'$ par

$$\psi = j_{\mathfrak{M}'}(y'_0) \circ \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} \circ i_{\mathfrak{M}}(y_0)$$

et $g : \mathcal{E}_{x_0} \to \mathcal{E}'_{x_0}$, par

$$g(y_0 . s) = y'_0 . \psi(s) \qquad (s \in G),$$

ce qui équivaut à poser

$$g(m . y_0) = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m) . y'_0 \qquad [m \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})].$$

Nous déterminerons ensuite $g(y)$ pour un point y quelconque de l'espace $\mathcal{E}$ en joignant $x = p(y)$ à x_0 par un chemin différentiable $l_1 : I \to \mathfrak{X}$ défini par

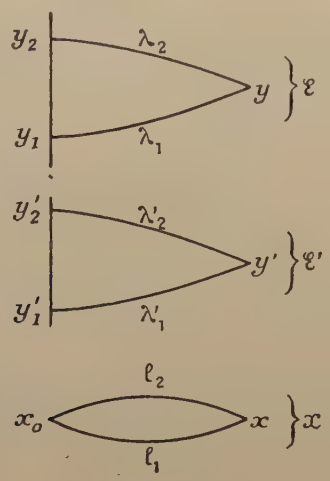


Fig. 10.

une représentation amortie (c'est-à-dire dont toutes les dérivées s'annulent pour 0 et 1), en reliant y à un point y_1 de $\mathcal{E}_{x_0}$ par le chemin ω-horizontal λ_1 de projection l_1, en posant $y'_1 = g(y_1)$ (ce qui a un sens puisque g est déjà défini sur $\mathcal{E}_{x_0}$), en définissant $g(y)$ comme l'extrémité du chemin ω'-horizontal λ'_1 d'origine y'_1 et de projection l_1, en vérifiant, enfin, que $g(y)$ ne dépend pas du choix du chemin l_1. Nous utiliserons pour cela le lemme précédent et le fait que $\mathfrak{X}$ est simplement connexe.

Soit $l_2 : I \to \mathfrak{X}$ un deuxième chemin différentiable joignant x à x_0 et défini également par une représentation amortie. Recommençons, avec l_2, les opérations effectuées avec l_1, les notations se déduisant des précédentes par substitution de l'indice 2 à l'indice 1. Soit S^1 le cercle orienté, muni d'une origine O et paramétré par une application différentiable régulière

$$\alpha : \quad I \to S^1 \qquad [\alpha(0) = O, \ \alpha(1) = O].$$

On déduit de l_1 et l_2 une application différentiable

$$\mu : \quad S^1 \to \mathfrak{X}.$$

en posant

$$\mu(\alpha(t)) = l_1(1-2t) \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right),$$
$$\mu(\alpha(t)) = l_2(2t-1) \qquad \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right).$$

Puisque $\mathfrak{X}$ est simplement connexe, il est possible d'étendre μ en une application différentiable μ de R^2 dans $\mathfrak{X}$ dont la restriction à S^1, plongé dans R^2, est μ.

Il résulte maintenant du paragraphe III.8 que les hypothèses faites au sujet de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$ se retrouvent dans les espaces induits par $\bar{\mu}$. Plus précisément, si $\mathcal{E}_{\bar{\mu}} = \bar{\mu}^{-1}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{E}'_{\bar{\mu}} = \bar{\mu}^{-1}(\mathcal{E}')$ sont munis des connexions $\omega_{\bar{\mu}}$, $\omega'_{\bar{\mu}}$ induites par $\bar{\mu}$ à partir de ω, ω' et si l'on note $\varphi_{\mathfrak{M}_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})}$ l'homomorphisme de l'espace structural gauche $\mathfrak{M}_{\mu}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})$ de $\mathcal{E}_{\bar{\mu}}$ dans l'espace structural gauche $\mathfrak{M}'_{\mu}(\mathcal{E}'_{\bar{\mu}})$ induit à partir de $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$, l'homomorphisme $\varphi_{\mathfrak{L}_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})}$ des espaces de Lie de $\mathcal{E}_{\bar{\mu}}(R^2, G)$ et $\mathcal{E}'_{\bar{\mu}}(R^2, G')$, associé à $\varphi_{\mathfrak{M}_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})}$, vérifie les relations

$$\Delta'_{\bar{\mu}} \circ \varphi_{L_{\bar{\mu}}(E_{\bar{\mu}})} = \varphi_{L_{\bar{\mu}}(E_{\bar{\mu}})} \circ \Delta_{\bar{\mu}}$$

et

$$\Omega\left(\omega'_{\bar{\mu}}\right) = \varphi_{L_{\bar{\mu}}(E_{\bar{\mu}})}\left(\Omega\left(\omega_{\bar{\mu}}\right)\right),$$

où Δ_{μ} désigne la $L_{\bar{\mu}}(E_{\bar{\mu}})$-différentiation covariante associée à $\omega_{\bar{\mu}}$ et Δ'_{μ}, la $L'_{\bar{\mu}}(E'_{\bar{\mu}})$-différentiation covariante associée à ω'_{μ}. Nous sommes donc exactement dans les conditions d'application du lemme précédent. En considérant S^1 comme un lacet en O dans R^2, on a donc

$$\tau_{\omega'_{\bar{\mu}}}(S^1) = \varphi_{\mathfrak{M}_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})}\left(\tau_{\omega_{\bar{\mu}}}(S^1)\right).$$

En revenant à $\mathfrak{X}$ à l'aide des homomorphismes induits, et en considérant maintenant $\mu : S^1 \to \mathfrak{X}$ comme un lacet en x_0, on a

$$\tau_{\omega'}(\mu) = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\tau_{\omega}(\mu)). \tag{VI.2.1}$$

Or, comme μ se compose de l_1 et de l_2, on a

$$y_2 = \tau_{\omega}(\mu) \cdot y_1$$

et y'_2, défini par $y'_2 = g(y_2)$, est donc, par définition de g sur la fibre $\mathcal{E}_{x_0}$, le point

$$y'_2 = \varphi_{(\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\tau_{\omega}(\mu)) \cdot y_1.$$

Il résulte alors de l'égalité (VI.2.1) que l'extrémité du chemin horizontal d'origine y'_2 et de projection l_2 coïncide avec l'extrémité du chemin horizontal d'origine y'_1 et de projection l_1. En d'autres termes, la définition de $g(y)$ est bien indépendante du chemin choisi pour relier x à x_0.

Il reste maintenant à montrer, d'une part, que les homomorphismes ψ et g que nous venons de construire sont compatibles, d'autre part, que le couple (ψ, g) constitue une solution du problème.

La compatibilité de ψ et g résulte immédiatement du procédé de construction de ces homomorphismes : en reprenant les notations précédentes, si $z = y.s$ est un point de $\mathscr{E}_x$, le chemin horizontal d'origine z et de projection l_1 se déduit de λ_1 par la translation à droite s. Son extrémité z_1 de projection x_0 se déduit donc de y_1 par la même translation à droite : $z_1 = y_1.s$. Or, sur $\mathscr{E}_{x_0}$, on a

$$g(z_1) = g(y_1).\psi(s)$$

comme le montre la définition de g et un calcul effectué au cours du lemme précédent. En procédant de façon semblable sur $\mathscr{E}'(\mathfrak{X}, G')$, on aboutit à

$$g(z) = g(y.s) = g(y).\psi(s) \qquad (y \in \mathscr{E},\ s \in G).$$

Par construction également, on a

$$\psi^g_{C(E)}(\omega) = \omega'$$

puisque l'image par g d'un chemin ω-horizontal est un chemin ω'-horizontal et que, par suite, le champ de connexion $c(\omega)$ est projetable par g et son image, $c(\omega')$.

Quant à l'égalité $\psi^g_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})} = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ qui entraîne $\psi^g_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})} = \varphi_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})}$, elle résulte simplement du fait qu'elle est vérifiée pour les fibres de projection x_0. En effet, comme l'image de $c^{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\omega)$ est $c^{\mathfrak{M}'(\mathscr{E}')}(\omega')$, et cela, par l'un ou l'autre des homomorphismes $\psi^g_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ ou $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$, on peut la transporter par parallélisme en tout point de $\mathfrak{X}$.

Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Dans le cas où G est simplement connexe, l'existence de $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})}$ entraîne celle de $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$. On peut donc énoncer un théorème où les espaces de Lie interviennent seuls.

CHAPITRE VII.

Homomorphismes. Condition d'existence lorsque la base n'est pas simplement connexe.

Introduction. — Nous ne supposons plus, dans ce chapitre, que la base des deux espaces fibrés principaux $\mathscr{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathscr{E}'(\mathfrak{X}, G')$ est simplement connexe. Dans ces conditions, il n'est pas possible, en général, de trouver un couple d'homomorphismes compatibles (ψ, h) tels que

$$\psi^h_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})} = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}, \qquad \psi^h_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})} = \varphi_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})} \qquad \text{et} \qquad \psi^h_{C(E)}(\omega) = \omega',$$

où $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}$ sont deux homomorphismes associés, liés aux connexions ω et ω' par les deux relations habituelles

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta \qquad \text{et} \qquad \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)).$$

On s'en convaincra facilement en considérant le cas d'un cylindre de révolution (espace fibré principal de base S^1 et de groupe, le groupe additif R) muni successivement de deux connexions intégrables dont l'une admet pour variétés intégrales les parallèles du cylindre, tandis que les variétés intégrales de l'autre sont des hélices.

Cependant, à condition de supposer que $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ est un *homomorphisme sur*, on peut construire un couple d'homomorphismes compatibles

$$\psi_\gamma : \quad G \to G'_\gamma = G'/H', \qquad h_\gamma = \mathcal{E} \to \mathcal{E}'_\gamma = \mathcal{E}'/H'$$

(H' étant le centre de G'), ainsi qu'un homomorphisme $\psi : G \to G'$, induisant ψ_γ par passage au quotient et déterminant $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ par modelage sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'_\gamma$. C'est là l'objet du paragraphe 1.

Après l'examen du cas particulier où le centre de G' se réduit à l'identité (§ 2), on montre, au troisième paragraphe, comment, moyennant une hypothèse assez large concernant l'holonomie de ω', on peut se ramener du cas où $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ est un *homomorphisme dans*, au cas où c'est un *homomorphisme sur*. Le paragraphe suivant est consacré à la recherche des conditions d'existence de h. Grâce aux résultats du 1°, on peut supposer, sans perte de généralité, que les deux espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ ont même groupe structural et l'on peut même se permettre d'identifier $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$. On simplifie ainsi les notations et il devient possible de comparer, pour un même lacet l_x, les éléments $\tau_\omega(l_x)$ et $\tau_{\omega'}(l_x)$. Plus précisément, on forme

$$\tau_{\omega'}(l_x)\,(\tau_\omega(l_x))^{-1}$$

qui, faisant partie du centre de la fibre de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ de projection x, peut être considéré comme appartenant au centre H de G. On vérifie alors que cet élément ne dépend que de la classe d'homotopie de l_x et qu'on définit ainsi un homomorphisme

$$\chi_x : \quad \Pi_x^1(\mathfrak{X}) \to H$$

du premier groupe d'homotopie de $\mathfrak{X}$ en x, dans H. Le résultat essentiel de ce chapitre est que la trivialité de cet homomorphisme est une condition nécessaire et suffisante d'existence de l'homomorphisme h cherché.

Si l'image γ de $\Pi_x^1(\mathfrak{X})$ par l'homomorphisme χ_x est fermée dans G, on peut substituer à $\mathcal{E}'$ son quotient par γ; le problème est alors résoluble. Dans d'autres cas, on peut agir sur ω'. En particulier, si γ est un sous-groupe de la composante connexe de l'identité dans H, le problème peut être résolu en substituant à ω' une connexion $\omega' + \theta$ où θ est un forme différentielle sur $\mathfrak{X}$, fermée, à valeurs dans $\underline{H}$ et admettant sur des cycles donnés des périodes dépendant

de χ. Lorsque $\mathfrak{X}$ est compacte, on peut combiner les deux procédés, le premier servant à éliminer la partie de χ provenant de la torsion du premier groupe d'homologie de $\mathfrak{X}$ à coefficients entiers, le second, à réduire ce qui reste.

Enfin, dans un dernier paragraphe, on cherche à élargir les hypothèses et l'on donne quelques résultats valables lorsque l'égalité portant sur les courbures n'est plus nécessairement réalisée.

1. Cas des homomorphismes sur. Résultat intermédiaire. — Nous considérons donc, dans ce paragraphe, deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, G')$ de groupes connexes G et G' et de même base $\mathfrak{X}$. Nous nous servirons des notations utilisées au paragraphe II.5, c'est-à-dire que nous noterons :

$$\gamma : G \to G_\gamma = G/H, \qquad \gamma' : G' \to G'_\gamma = G'/H',$$
$$\gamma_{\mathfrak{E}} : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}_\gamma = \mathfrak{E}/H, \qquad \gamma_{\mathfrak{E}'} : \mathfrak{E}' \to \mathfrak{E}'_\gamma = \mathfrak{E}'/H',$$

les homomorphismes canoniques appliquant $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ d'une part, G et G' d'autre part, sur leurs quotients respectifs par les centres H et H' de G et de G'. De plus, les espaces de Lie [resp. espaces structuraux gauches, faisceaux des connexions de $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, G')$] seront notés $\mathfrak{L}_\gamma(\mathfrak{E}_\gamma)$ et $\mathfrak{L}'_\gamma(\mathfrak{E}'_\gamma)$ [resp. $\mathfrak{M}_\gamma(\mathfrak{E}_\gamma)$ et $\mathfrak{M}'_\gamma(\mathfrak{E}'_\gamma)$, $C_\gamma(E_\gamma)$ et $C'_\gamma(E'_\gamma)$]. Enfin les homomorphismes canoniques correspondant à ces différents espaces et faisceaux, seront :

$$\gamma_{\mathfrak{L}(\mathfrak{E})} : \mathfrak{L}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{L}_\gamma(\mathfrak{E}_\gamma), \qquad \gamma_{\mathfrak{L}'(\mathfrak{E}')} : \mathfrak{L}'(\mathfrak{E}') \to \mathfrak{L}'_\gamma(\mathfrak{E}'_\gamma),$$
$$\gamma_{\mathfrak{M}(\mathfrak{E})} : \mathfrak{M}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{M}_\gamma(\mathfrak{E}_\gamma), \qquad \gamma_{\mathfrak{M}'(\mathfrak{E}')} : \mathfrak{M}'(\mathfrak{E}') \to \mathfrak{M}'_\gamma(\mathfrak{E}'_\gamma),$$
$$\gamma_{C(E)} : C(E) \to C_\gamma(E\gamma), \qquad \gamma_{C'(E')} : C'(E') \to C'_\gamma(E'_\gamma).$$

On a alors le théorème suivant qui constitue le premier pas dans la résolution du problème qui nous occupe :

Théorème VII.1.1. — *Étant donnés deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, G')$ de même base $\mathfrak{X}$ et de groupes structuraux G et G' connexes, s'il existe un homomorphisme*

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathfrak{E})} : \mathfrak{M}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathfrak{E}')$$

de l'espace structural gauche du premier sur l'espace structural gauche du second, et si l'homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{L}(\mathfrak{E})} : \mathfrak{L}(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{L}'(\mathfrak{E}')$$

de l'espace de Lie de $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ sur l'espace de Lie de $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, G')$, associé à $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathfrak{E})}$, est lié à deux connexions ω et ω' sur $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, G')$ respectivement dont les L(E)- et L'(E')-différentiations covariantes sont notées Δ et Δ', par la relation

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta, \tag{VII.1.1}$$

alors, il existe un couple d'homomorphismes compatibles sur

$$h_\gamma : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}'_\gamma \qquad \text{et} \qquad \psi_\gamma : \quad \mathrm{G} \to \mathrm{G}'_\gamma,$$

déterminant, par modelage sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathrm{G})$ *et* $\mathcal{E}'_\gamma(\mathcal{X}, \mathrm{G}'_\gamma)$, *les homomorphismes*

$$\gamma_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}, \qquad \gamma_{\mathcal{L}'(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \qquad \text{et} \qquad \gamma_{\mathrm{C}'(\mathrm{E}')} \circ \varphi_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}$$

($\varphi_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}$ *étant naturellement défini par* $\varphi_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega) = \omega'$ *et par les opérations de* $\mathrm{L}^1(\mathrm{E})$ [*resp.* $\mathrm{L}'^1(\mathrm{E}')$] *sur* $\mathrm{C}(\mathrm{E})$ [*resp.* $\mathrm{C}'(\mathrm{E}')$]).

Remarque. — Avant de commencer la démonstration de ce théorème, remarquons que, dans les hypothèses, il ne figure aucune condition portant sur les courbures. Cependant, si l'égalité (VII.1.1) n'entraîne évidemment pas $\Omega(\omega') = \varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\Omega(\omega))$, elle implique néanmoins une égalité de ce type lorsqu'on remplace $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \mathrm{G}')$ par $\mathcal{E}'_\gamma(\mathcal{X}, \mathrm{G}'_\gamma)$. Plus précisément, si l'on pose

$$\omega'_\gamma = \gamma_{\mathrm{C}'(\mathrm{E}')}(\omega'),$$

on a

$$\Omega(\omega'_\gamma) = \gamma_{\mathrm{L}'(\mathrm{E}')}(\varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\Omega(\omega))).$$

En effet, en appliquant deux fois de suite l'égalité (VII.1.1), on a, quel que soit $\theta \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$:

$$\Delta'^2(\varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\theta)) = \varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\Delta^2\theta).$$

Mais,

$$\Delta^2\theta = [\Omega(\omega), \theta],$$

et par suite,

$$\Delta'^2(\varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\theta)) = \varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}([\Omega(\omega), \theta]) = [\varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\Omega(\omega)), \varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\theta)].$$

Puis en passant de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \mathrm{G}')$ à $\mathcal{E}'_\gamma(\mathcal{X}, \mathrm{G}'_\gamma)$ et en continuant à noter par le crochet les opérations de $\mathcal{L}'_\gamma(\mathcal{E}'_\gamma)$ sur $\mathcal{L}'(\mathcal{E}'_\gamma) = \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$ on a

$$\Delta'^2(\varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\theta)) = [\gamma_{\mathrm{L}'(\mathrm{E}')}(\varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\Omega(\omega)), \varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\theta)].$$

Or,

$$\Delta'^2(\varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\theta)) = [\Omega(\omega'_\gamma), \varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\theta)]$$

comme ces égalités sont vérifiées quel que soit $\theta \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ et que les homomorphismes $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ et $\gamma_{\mathcal{L}'(\mathcal{E}')}$ sont des homomorphismes *sur*, on en déduit

$$\Omega(\omega'_\gamma) = \gamma_{\mathrm{L}'(\mathrm{E}')}(\varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\Omega(\omega))).$$

Venons-en maintenant à la démonstration de notre théorème. Elle repose essentiellement sur le lemme suivant où $\tau_\omega(l_x)$ désigne, rappelons-le, l'élément de l'espace structural gauche associé à la connexion ω et au lacet l_x de $\mathcal{X}$.

Lemme. — *Quel que soit le lacet* l_x *de* $\mathcal{X}$, *on a*

$$\tau_{\omega'_\gamma}(l_x) = \gamma_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')}\big(\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\tau_\omega(l_x))\big).$$

Nous considérons donc un lacet en x, $l_x : \mathrm{I} \to \mathfrak{X}[l_x(0) = l_x(1) = x]$. L'égalité (VII.1.1) montre alors que le champ $c^{\mathcal{L}^0(\mathcal{E})}(\omega)$ qui définit le transport parallèle dans $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$, relativement à ω, est projetable par $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ et que son image n'est autre que le champ $c^{\mathcal{L}'^0(\mathcal{E}')}(\omega')$ qui définit le transport parallèle dans $\mathcal{L}'^0(\mathcal{E}')$, relativement à ω'. Nous avons vu qu'il en était alors de même de $c^{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\omega)$ et de $c^{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')}(\omega')$ et que, en notant comme d'habitude,

$$\mu^{l_x,\omega}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}_x(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}_x(\mathcal{E}), \qquad \mu^{l_x,\omega'}_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')} : \quad \mathfrak{M}'_x(\mathcal{E}') \to \mathfrak{M}'_x(\mathcal{E}')$$

les isomorphismes des fibres de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ et de $\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$ de projection $l_x(0)$ sur les fibres de projection $l_x(1)$ de ces mêmes espaces, on avait le diagramme compatible (c'est-à-dire commutatif) suivant :

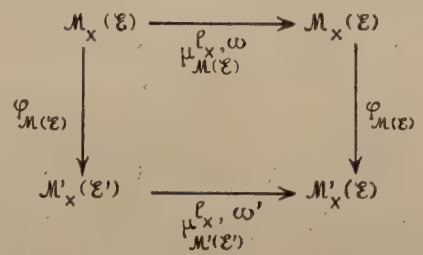


Fig. 11.

Mais, comme l_x est un lacet en x, on a

$$\mu^{l_x,\omega}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \mathrm{Int}(\tau_\omega(l_x)) \qquad \text{et} \qquad \mu^{l_x,\omega'}_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')} = \mathrm{Int}(\tau_{\omega'}(l_x)).$$

Le diagramme précédent se traduit alors par l'égalité ci-dessous, valable quel que soit le point x de $\mathfrak{X}$, et où m est un élément quelconque de la fibre de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ de projection x :

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\mathrm{Int}(\tau_\omega(l_x))m) = \mathrm{Int}(\tau_{\omega'}(l_x))\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m).$$

Comme, par hypothèse, $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ applique $\mathfrak{M}_x(\mathcal{E})$ *sur* $\mathfrak{M}'_x(\mathcal{E}')$, cette dernière relation est équivalente à

$$\gamma_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')}(\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\tau_\omega(l_x))) = \gamma_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')}(\tau_{\omega'}(l_x)).$$

Mais on a aussi

$$\gamma_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')}(\tau_{\omega'}(l_x)) = \tau_{\omega'_\gamma}(l_x),$$

et par suite

$$\tau_{\omega'_\gamma}(l_x) = \gamma_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')}(\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\tau_\omega(l_x))),$$

ce qui est bien la formule annoncée.

On définit alors ψ_γ et h_γ en utilisant le procédé qui nous a servi dans le cas simplement connexe et que nous rappelons rapidement :

1° On choisit un point $x_0 \in \mathfrak{X}$ et, dans les fibres de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'_\gamma$ de projection x_0,

deux points $y_0 \in \mathscr{E}_{x_0}$, $y'_0 \in \mathscr{E}'_{\gamma, x_0}$. Cela, de façon absolument arbitraire. On pose ensuite

$$\psi_\gamma = j_{\mathfrak{M}'_\gamma}(y'_0) \circ \gamma_{\mathfrak{M}'(\mathscr{E}')} \circ \varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})} \circ i_{\mathfrak{M}}(y_0),$$

et l'on définit la restriction de h_γ à $\mathscr{E}_{x_0}$ par l'égalité

$$h_\gamma(y_0 . s) = y'_0 . \psi_\gamma(s) \qquad (s \in \mathrm{G}),$$

ce qui revient à poser

$$h_\gamma(m . y_0) = \gamma_{\mathfrak{M}'(\mathscr{E}')}(\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(m)) . y'_0 \qquad [m \in \mathfrak{M}_{x_0}(\mathscr{E})].$$

2° On étend la définition de h_γ à l'espace $\mathscr{E}$ tout entier, en faisant correspondre à tout chemin ω-horizontal λ d'origine $y \in \mathscr{E}_{x_0}$ et de projection $l : \mathrm{I} \to \mathfrak{X}[l(0) = x_0]$, le chemin ω'_γ-horizontal d'origine $h_\gamma(y)$ et de projection l. Plus précisément, on pose, en notant ce dernier chemin λ_γ :

$$h_\gamma(\lambda(\mathrm{I})) = \lambda_\gamma(\mathrm{I}).$$

Il résulte immédiatement du lemme ci-dessus que, si l et l' sont deux chemins d'origine x_0 et d'extrémité commune x_1, et si les chemins ω-horizontaux λ et λ' de projections l et l' et d'origines y, $y' \in \mathscr{E}_{x_0}$ ont également même extrémité, alors, les chemins ω'_γ-horizontaux λ_γ et λ'_γ d'origines $h_\gamma(y)$ et $h_\gamma(y')$ et de projections l et l' respectivement, aboutissent au même point de $\mathscr{E}'_\gamma$. On a donc défini ainsi un homomorphisme h_γ d'espaces fibrés différentiables. Il est facile de vérifier ensuite que ψ_γ et h_γ sont compatibles et que, par modelage sur $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'_\gamma$, ils déterminent les homomorphismes annoncés. Explicitement, si l'on ne recule pas devant les notations, on a

$$\psi^{h_\gamma}_{\gamma, \mathfrak{M}(\mathscr{E})} = \gamma_{\mathfrak{M}'(\mathscr{E}')} \circ \varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}, \qquad \psi^{h_\gamma}_{\gamma, \mathfrak{L}(\mathscr{E})} = \gamma_{\mathfrak{L}'(\mathscr{E}')} \circ \varphi_{\mathfrak{L}(\mathscr{E})}$$

et

$$\psi^{h_\gamma}_{\gamma, \mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega) = \omega'_\gamma.$$

Le théorème VII.1.1 est donc démontré, mais on peut aller plus loin : de l'existence de l'homomorphisme $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})} : \mathfrak{M}(\mathscr{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathscr{E}')$ (existence que nous n'avons pas complètement utilisée puisque seul l'homomorphisme $\gamma_{\mathfrak{M}'(\mathscr{E}')} \circ \varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ nous a servi) et de celle du couple compatible (ψ_γ, h_γ) que nous venons de déterminer, on peut déduire un homomorphisme $\psi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ déterminant $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ par modelage et ψ_γ, par passage au quotient. Comme le fait que $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$ et $\mathfrak{M}'(\mathscr{E}')$ sont les espaces structuraux gauches de $\mathscr{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ et $\mathscr{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ n'intervient pas dans ce résultat, nous élargirons le problème en le posant de la façon suivante ([22]).

Soient $\mathscr{E}_\gamma(\mathfrak{X}, \mathrm{G}_\gamma)$ et $\mathscr{E}'_\gamma(\mathfrak{X}, \mathrm{G}'_\gamma)$ deux espaces fibrés principaux différentiables de même base $\mathfrak{X}$ et dont les groupes structuraux G_γ et G'_γ sont les quotients de

([22]) Il ne s'agit pas d'une généralisation gratuite. Le problème se posera plus loin sous cette forme.

deux groupes de Lie connexes G et G′ par leurs centres respectifs H et H′. Par modelage de $\mathfrak{M} = G \times \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{M}' = G' \times \mathfrak{X}$ sur $\mathcal{E}_\gamma$ et $\mathcal{E}'_\gamma$ (G_γ et G'_γ opérant sur G et G′ par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs), on construit $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathfrak{M}'(\mathcal{E}'_\gamma)$. De même, $\mathfrak{L}(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathfrak{L}'(\mathcal{E}'_\gamma)$ s'obtiennent par modelage des espaces $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ des formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\underline{G}$ et $\underline{G}'$. Soient alors ω_γ et ω'_γ deux connexions sur $\mathcal{E}_\gamma$ et $\mathcal{E}'_\gamma$. Nous noterons Δ et Δ' les $L(E_\gamma)$- et $L'(E'_\gamma)$-différentiations covariantes qui leurs sont associées et Δ_γ, Δ'_γ les $L_\gamma(E_\gamma)$- et $L'_\gamma(E'_\gamma)$-différentiations covariantes également associées à ω_γ et ω'_γ,

Nous supposerons d'abord qu'il existe un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}'_\gamma)$$

auquel est associé

$$\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E}_\gamma)} : \quad \mathfrak{L}(\mathcal{E}_\gamma) \to \mathfrak{L}'(\mathcal{E}'_\gamma).$$

De plus, soit

$$\Phi : \quad G_\gamma \to G'_\gamma \qquad \text{et} \qquad h : \quad \mathcal{E}_\gamma \to \mathcal{E}'_\gamma$$

un couple d'homomorphismes compatibles tels que :

1° L'homomorphisme $\varphi_{\mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}$, déduit de $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}$ par passage au quotient coïncide avec $\Phi^h_{\mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}$:

$$\varphi_{\mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)} = \Phi^h_{\mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)},$$

ce qui entraîne

$$\varphi_{\mathfrak{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)} = \Phi_{\mathfrak{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}.$$

2° On ait l'égalité

$$\Phi^h_{G_\gamma(E_\gamma)}(\omega_\gamma) = \omega'_\gamma$$

qui entraîne

$$\Delta'_\gamma \circ \varphi_{L_\gamma(E_\gamma)} = \varphi_{L_\gamma(E_\gamma)} \circ \Delta_\gamma.$$

3° La relation suivante, qui est compatible avec le 2°, mais ne s'en déduit pas, soit vérifiée :

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E_\gamma)} = \varphi_{L(E_\gamma)} \circ \Delta.$$

Ce dernier point étant équivalent au fait que le champ $c^{\mathfrak{L}^0(\mathcal{E}_\gamma)}(\omega_\gamma)$ est projetable par $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E}_\gamma)}$ et que son image est $c^{\mathfrak{L}'^0(\mathcal{E}'_\gamma)}(\omega'_\gamma)$, il en résulte que le champ $c^{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}(\omega_\gamma)$ est lui-même projetable par $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}$ et que son image est $c^{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}'_\gamma)}(\omega'_\gamma)$.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}$ résulte, par modelage, d'un homomorphisme

$$\psi : \quad G \to G'.$$

En effet, il est clair, tout d'abord, que l'homomorphisme $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}$ et h sont compatibles, par hypothèse, avec $\varphi_{\mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}$. Autrement dit, les relations du type (I.4.1) et (I.4.2) sont vérifiées :

$$h(m.y) = \varphi_{\mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}(m).h(y) \qquad [m \in \mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma),\ y \in \mathcal{E}_\gamma],$$

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}(\mathrm{Int}(m)\mu) = \mathrm{Int}(\varphi_{\mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}(m))\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}(\mu) \qquad [\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)].$$

En revenant à $\mathfrak{M}$, on voit donc que $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}$ résulte, par modelage, d'un homomorphisme

$$\psi_{\mathfrak{M}} : \quad \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}',$$

c'est-à-dire que l'homomorphisme $j_{\mathfrak{M}'}(h(y)) \circ \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)} \circ i_{\mathfrak{M}}(y)$ [qui définit $\psi_{\mathfrak{M}}$ sur la fibre de $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)$ de projection $p(y)(y \in \mathcal{E}_\gamma)$] ne dépend que de la projection de y sur $\mathfrak{X}$. Il reste à montrer que, étant donné $s \in G$ considéré comme un élément de $\mathfrak{M}$, l'élément $j_{\mathfrak{M}'}(h(y))\left[\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}(i_{\mathfrak{M}}(y)s)\right]$ de $\mathfrak{M}'(\mathcal{E}'_\gamma)$, considéré comme appartenant à G', ne dépend pas de $x = p(y)$. Pour cela, il suffira de choisir $x' \in \mathfrak{X}$ et distinct de x, puis de joindre x à x' par un chemin différentiable $l[l(0) = x, l(1) = x']$. Si $s \in G$ reste invariant lorsque y_t se déplace sur un chemin ω_γ-horizontal de projection l, l'élément $m_t = i_{\mathfrak{M}}(y_t)s$ se déplace parallèlement à lui-même. D'après ce qui précède, il en est alors de même de $m'_t = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}(m_t)$. Il en résulte que $j_{\mathfrak{M}'}(h(y_t))m'_t$, considéré comme un élément de G', reste invariant, puisque $h(y_t)$ reste également sur un chemin ω'_γ-horizontal. $\psi_{\mathfrak{M}}$ résulte donc bien d'un homomorphisme

$$\psi : \quad G \to G'.$$

D'autre part, de l'hypothèse que $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}$ induit $\Phi^h_{\mathfrak{M}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}$ par passage au quotient, on déduit que ψ induit $\Phi : G \to G'$. Nous pouvons donc énoncer :

Proposition VII.1.1. — *Dans les conditions énoncées ci-dessus, il existe un homomorphisme tel que le diagramme*

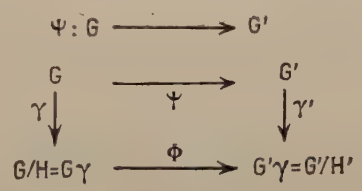


Fig. 12.

soit commutatif et que, par modelage, ψ détermine $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)}$:

$$i_{\mathfrak{M}'}(h(y)) \circ \psi = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)} \circ i_{\mathfrak{M}}(y).$$

Remarque. — La proposition précédente s'étend sans difficulté au cas où G_γ et G'_γ opèrent sur deux groupes de Lie quelconques G et G' et où ces opérations sont des automorphismes de G et de G'.

En nous replaçant dans le contexte du théorème VII.1.1, nous voyons immédiatement qu'on a :

Complément au théorème VII.1.1. — *En plus du couple d'homomorphismes*

compatibles (ψ_γ, h_γ), *il existe un homomorphisme*

$$\psi : \quad G \to G'$$

tel que

$$\gamma' \circ \psi = \psi_\gamma$$

et que, par modelage sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ *et sur* $\mathcal{E}'_\gamma(\mathcal{X}, G'_\gamma)$, ψ *détermine* $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$. *Il en résulte que l'homomorphisme associé* $\underline{\psi} : \underline{G} \to \underline{G}'$ *détermine* $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}$.

Le problème qui se pose donc maintenant est celui de la détermination, dans le cas où $\mathcal{X}$ n'est pas simplement connexe, d'un homomorphisme

$$h : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

compatible avec ψ et répondant aux conditions du problème. Nous aborderons cette question après l'examen, au paragraphe suivant, d'une application directe de ce qui précède.

2. Cas particulier. — Si, tout en conservant les hypothèses du théorème VII.1.1, nous supposons de plus que le centre de G' se réduit à l'identité (c'est-à-dire que $G'_\gamma = G'$), il est inutile de supposer que l'homomorphisme $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ existe car il résulte de l'existence de $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}$. On transpose en effet sans difficulté au cas des espaces fibrés à fibre-groupe de Lie la démonstration du résultat correspondant, dans le cas d'un simple groupe de Lie. Considérons un revêtement simplement connexe $[R(G), \rho : R(G) \to G]$ de G et construisons $\mathfrak{M}_R(\mathcal{E})$ par modelage de $\mathfrak{M}_R = R(G) \times \mathcal{X}$ sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, G opérant sur R(G) par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs. On note

$$\rho_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}_R(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}(\mathcal{E})$$

l'homomorphisme déduit de ρ. Comme les algèbres de Lie des fibres de $\mathfrak{M}_R(\mathcal{E})$ s'identifient (grâce à $\rho_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$) à celles des fibres de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ et, par suite, aux fibres de $\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})$, il existe, au-dessus de tout point $x \in \mathcal{X}$, un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{M}_R(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}_{R,x}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'_{x'}(\mathcal{E}')$$

auquel $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}$ est associé. Il faut alors vérifier que c'est bien un homomorphisme d'espaces fibrés qu'on a ainsi défini, c'est-à-dire qu'il est localement trivial. Cela se fait facilement, soit en utilisant des sections locales de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, soit en se servant de la formule (VII.1.1) et du transport parallèle.

Dans ces conditions, comme le noyau de $\varphi_{\mathfrak{M}_R(\mathcal{E})}$ contient nécessairement le centre de $\mathfrak{M}_R(\mathcal{E})$, et, par suite, le noyau de $\rho_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$, on déduit évidemment de $\varphi_{\mathfrak{M}_R(\mathcal{E})}$, un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}').$$

Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION VII.2.1. — *Étant donnés deux espaces fibrés principaux différentiables* $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ *et* $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ *de groupes* G *et* G′ *connexes, si le centre de* G′ *se réduit à l'élément neutre et s'il existe un homomorphisme sur*

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

de leurs espaces de Lie, ainsi que deux connexions ω *et* ω' *liées à* $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ *par la relation*

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta,$$

il existe alors un couple d'homomorphismes compatibles

$$\psi : \quad G \to G' \qquad et \qquad h : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

tels que

$$\psi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \qquad et \qquad \psi^h_{C(E)}(\omega) = \omega'.$$

3. CAS GÉNÉRAL. — Nous commençons maintenant l'examen du problème sous sa forme la plus générale, c'est-à-dire que, en admettant simplement que G et G′ sont connexes, nous supposons qu'il existe un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ *dans* l'espace structural gauche de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, auquel est associé l'homomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

de leurs espaces de Lie.

Nous supposons, bien entendu, qu'il existe en outre deux connexions ω et ω' de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ dont les L(E)- et L′(E′)- différentiations covariantes sont Δ et Δ', et qu'on a

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta, \tag{VII.3.1}$$

ainsi que

$$\Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)). \tag{VII.3.2}$$

Nous proposons de donner d'abord une condition nécessaire d'existence d'un couple d'homomorphismes compatibles (ψ, h) déterminant $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et tels que $\psi^h_{C(E)}(\omega) = \omega'$.

PROPOSITION VII.3.1. — *Dans les conditions ci-dessus, pour qu'il existe un couple d'homomorphismes* (ψ, h) *tels que* $\psi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ *et* $\psi^h_{C(E)}(\omega) = \omega'$, *il est nécessaire qu'on ait l'inclusion*

$$\mathfrak{R}(\omega') \subset \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\mathfrak{M}(\mathcal{E})),$$

où $\mathfrak{R}(\omega')$ *désigne, rappelons-le, l'espace d'holonomie de* ω'.

En effet, si un tel couple existe, il est clair que $h(\mathscr{E})$ est une variété intégrale du champ normal $\Gamma(\varphi_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}(\mathscr{L}^0(\mathscr{E})), \omega')$ et que son espace structural gauche est $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\mathfrak{M}(\mathscr{E}))$. Or, dans les hypothèses faites, ce champ normal est effectivement intégrable. En effet, la stabilité du faisceau $\varphi_{\mathrm{L}\,\mathrm{E}}(\mathrm{L}(\mathrm{E}))$ pour la différentiation covariante Δ' associée à ω' résulte de (VII.3.1), tandis que (VII.3.2) montre que la condition portant sur la courbure est vérifiée. Une condition nécessaire d'existence de (ψ, h) est donc que les variétés intégrales de ce champ soient à fibres connexes, puisque G est connexe. Or, l'espace structural gauche d'une telle variété s'obtient, d'après la proposition V.6.3, à partir de $\mathfrak{R}(\omega')$ et du sous-espace de $\mathfrak{M}'(\mathscr{E}')$ à fibres connexes, admettant $\varphi_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}(\mathscr{L}^0(\mathscr{E}))$ pour espace d'algèbres de Lie. Autrement dit, cet espace structural gauche est engendré par $\mathfrak{R}(\omega')$ et $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\mathfrak{M}(\mathscr{E}))$. Il est donc bien nécessaire que $\mathfrak{R}(\omega') \subset \varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\mathfrak{M}(\mathscr{E}))$.

On a alors :

Proposition VII.3.2. — *Dans les conditions exposées au début de ce paragraphe, si, en outre, l'inclusion de la proposition précédente est vérifiée :*

$$\mathfrak{R}(\omega') \subset \varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\mathfrak{M}(\mathscr{E})),$$

on peut ramener la recherche du couple (ψ, h) à celle d'un couple (ψ', h') d'homomorphismes sur, en remplaçant $\mathfrak{M}'(\mathscr{E}')$ par l'image $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\mathfrak{M}(\mathscr{E}))$ de $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$ par $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$, $\mathscr{L}'(\mathscr{E}')$ par l'image de $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ par $\varphi_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$, $\mathscr{E}'(\mathscr{X}, \mathrm{G}')$ par une variété intégrale quelconque du champ normal $\Gamma(\varphi_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}(\mathscr{L}_0(\mathscr{E})), \omega')$ et ω', par sa restriction à V.

Cette proposition est une conséquence immédiate des résultats du paragraphe VI.1 et de la proposition VII.3.1.

Nous nous proposons maintenant de montrer qu'après nous être ramené au cas où $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ est un *homomorphisme sur*, nous pouvons nous ramener à celui où $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ est un *isomorphisme sur*.

Proposition VII.3.3. — *Le noyau $\mathfrak{I}$ de $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ est un espace fibré de sous-groupes distingués de $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$ qui s'obtient en modelant sur $\mathscr{E}(\mathscr{X}, \mathrm{G})$ le produit $\mathfrak{M}_{\mathscr{G}} = \mathscr{G} \times \mathscr{X}$ d'un sous-groupe distingué $\mathscr{G}$ de G par $\mathscr{X}$, G opérant sur $\mathscr{G}$ par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs.*

Il est évident, tout d'abord, que le noyau $\mathfrak{I}$ de $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ est constitué de sous-groupes distingués des fibres de $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$. De plus, la relation (VII.3.1) montre, comme d'habitude, que le champ définissant le transport parallèle dans $\mathscr{L}^0(\mathscr{E})$ relativement à ω est projetable par $\varphi_{\mathscr{L}(\mathscr{E})}$ et que son image est le champ définissant le transport parallèle dans $\mathscr{L}'^0(\mathscr{E}')$, relativement à ω'. Il en résulte qu'il en est de même de $c^{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\omega)$ et de $c^{\mathfrak{M}'(\mathscr{E}')}(\omega')$. Par suite, le noyau de $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ est

invariant par parallélisme. Cela signifie que, si les deux points y et y' de $\mathscr{E}$ sont reliés par un chemin différentiable ω-horizontal, on a l'égalité

$$j_{\mathfrak{M}}(y)\mathfrak{I}_x = j_{\mathfrak{M}}(y')\mathfrak{I}_{x'} \qquad [p(y)=x,\ p'(y')=x']$$

valable dans G, et non dans $\mathfrak{M}$, bien entendu.

Si, au contraire, y et y' appartiennent à la même fibre $\mathscr{E}_x$ de $\mathscr{E}$, sans être nécessairement reliés par un chemin ω-horizontal, il existe $s \in G$ tel que $y' = y.s$ et l'égalité (I.3.1) s'écrit

$$j_{\mathfrak{M}}(y.s)\mathfrak{I}_x = \mathrm{Int}(s^{-1})\,(j_{\mathfrak{M}}(y)\mathfrak{I}_x).$$

Comme $\mathfrak{I}_x$ est distingué, on a donc

$$j_{\mathfrak{M}}(y.s)\mathfrak{I}_x = j_{\mathfrak{M}}(y)\mathfrak{I}_x.$$

En combinant ces deux résultats, on voit que le sous-groupe $j_{\mathfrak{M}}(y)\mathfrak{I}_x$ de G est indépendant du choix de y dans $\mathscr{E}$. Si l'on pose $\mathscr{G} = j_{\mathfrak{M}}(y)\mathfrak{I}_x$, on a donc bien $\mathfrak{I} = \mathfrak{M}_{\mathscr{G}}(\mathscr{E})$, avec $\mathfrak{M}_{\mathscr{G}} = \mathscr{G} \times \mathscr{X}$.

Cette proposition montre qu'il est possible, en effectuant le quotient de $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$ par $\mathfrak{I} = \mathfrak{M}_{\mathscr{G}}(\mathscr{E})$, de $\mathscr{E}$ par $\mathscr{G}$ [ou, ce qui revient au même, par $\mathfrak{I} = \mathfrak{M}_{\mathscr{G}}(\mathscr{E})$]; et de G par $\mathscr{G}$ également, de transformer $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ en isomorphisme ([23]).

Plus précisément, le cas exposé au début du paragraphe se transforme successivement de la façon suivante :

1° En supposant que la condition nécessaire d'existence des homomorphismes (ψ, h) soit réalisée [c'est-à-dire $\mathfrak{R}(\omega') \subset \varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}(\mathfrak{M}(\mathscr{E}))$], la proposition VII.3.2 montre qu'on peut remplacer $\mathscr{E}'(\mathscr{X}, G')$ par un de ses sous-espaces fibrés principaux différentiable à groupe structural $\mathscr{E}'_1(\mathscr{X}, G'_1)$ déterminé à une translation à droite près et choisi de telle sorte que $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ devienne un homomorphisme $\varphi^1_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ de $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$ *sur* l'espace structural gauche $\mathfrak{M}'_1(\mathscr{E}'_1)$ de $\mathscr{E}'_1(\mathscr{X}, G'_1)$. Les conditions (VII.3.1) et (VII.3.2) restent évidemment réalisées.

2° On effectue ensuite le quotient de $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$ par le noyau de l'homomorphisme $\varphi^1_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ et l'on transforme ainsi $\mathscr{E}(\mathscr{X}, G)$ en $\mathscr{E}_1(\mathscr{X}, G_1)$ et $\varphi^1_{\mathfrak{M}(\mathscr{E})}$ en un *isomorphisme* de l'espace structural gauche $\mathfrak{M}_1(\mathscr{E}_1)$ de $\mathscr{E}_1(\mathscr{X}, G_1)$ *sur* l'espace structural gauche de $\mathscr{E}'_1(\mathscr{X}, G'_1)$. Pour cet isomorphisme, on a toujours des relations du type (VII.3.1) et (VII.3.2).

Il reste à voir ce qu'on peut obtenir dans ces conditions, du théorème VII.1.1 et de son complément. C'est ce point que nous examinerons au début du paragraphe suivant.

([23]) $\mathscr{G}$ est évidemment fermé dans G.

Remarque. — La condition $\mathfrak{X}(\omega') \subset \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\mathfrak{M}(\mathcal{E}))$ est évidemment toujours réalisée lorsque $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ est, par hypothèse, un homomorphisme sur, ou encore, lorsque $\mathfrak{X}$ est simplement connexe.

4. Condition nécessaire et suffisante d'existence de h. — Nous supposons tout de suite que les opérations décrites au cours du paragraphe précédent ont été effectuées, c'est-à-dire que nous avons affaire à deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$ dont les espaces structuraux gauches sont liés par un *isomorphisme sur*

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}'),$$

tel que l'isomorphisme $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}$ associé satisfasse aux conditions (VII.3.1) et (VII.3.2).

Nous savons alors, grâce au théorème VII.1.1, qu'il existe un couple d'isomorphismes compatibles

$$h_\gamma : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}'_\gamma \qquad \text{et} \qquad \psi_\gamma : \quad G \to G'_\gamma$$

de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ sur le quotient $\mathcal{E}'_\gamma$ de $\mathcal{E}'$ par le centre H′ de G′ et de G sur $G' = G'/H'$.

Enfin, le complément au théorème VII.1.1 montre qu'il existe un isomorphisme $\psi : G \to G'$ induisant ψ_γ par passage au quotient et $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ par modelage. Nous allons profiter de ces résultats pour modifier les notations et poser le problème sous une forme légèrement différente.

Nous identifierons d'abord G et G′ par ψ et G_γ, G'_γ par passage au quotient. $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$ deviennent alors deux espaces fibrés principaux différentiables de même base $\mathfrak{X}$ et de même groupe structural G. Nous les noterons donc $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G)$. De même, $\mathcal{E}_\gamma(\mathfrak{X}, G_\gamma)$ et $\mathcal{E}'_\gamma(\mathfrak{X}, G'_\gamma)$ deviennent $\mathcal{E}_\gamma(\mathfrak{X}, G_\gamma)$ et $\mathcal{E}'_\gamma(\mathfrak{X}, G_\gamma)$. Mais le G_γ-isomorphisme

$$h'_\gamma : \quad \mathcal{E}_\gamma \to \mathcal{E}'_\gamma,$$

déduit de h_γ, permet d'identifier à leur tour $\mathcal{E}_\gamma$ et $\mathcal{E}'_\gamma$. Il n'y a plus lieu alors de distinguer les espaces structuraux gauches (resp. espaces de Lie) de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ qui, notés évidemment $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ et $(\mathfrak{M}(\mathcal{E}')$ [resp. $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{L}(\mathcal{E}')$], seront confondus avec $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)$ [resp. $\mathfrak{L}(\mathcal{E}_\gamma)$]. Les faisceaux de connexions, C(E) et C(E′), par contre, restent distincts, mais la formule (VII.3.1) et le fait que la sous-algèbre de $\underline{G}_\gamma$ laissant $\underline{G}$ invariant soit nulle, montrent que les images de ω et ω' par les homomorphismes appliquant canoniquement C(E) et C(E′) sur le faisceau des connexions $C_\gamma(E_\gamma)$ de $\mathcal{E}_\gamma(\mathfrak{X}, G_\gamma)$, coïncident. Nous noterons ω_γ cette image commune, de sorte que Δ et Δ' peuvent être considérés comme les $L(E_\gamma)$-différentiations covariantes associées à ω_γ. Il reste l'hypothèse (VII.3.2) qui se traduira par une simple égalité entre deux sections $\Omega(\omega)$ et $\Omega(\omega')$ de $L^2(E_\gamma)$.

En résumé, le problème se pose désormais de la façon suivante. Nous considérons deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ de même groupe structural connexe G, liés à un troisième espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}_\gamma(\mathcal{X}, G_\gamma)$ de groupe structural $G_\gamma = G/H$, par deux homomorphismes.

$$\gamma_{\mathcal{E}} : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}_\gamma \qquad \text{et} \qquad \gamma_{\mathcal{E}'} : \quad \mathcal{E}' \to \mathcal{E}_\gamma$$

compatibles l'un et l'autre avec l'homomorphisme canonique $\gamma : G \to G_\gamma$. Nous supposons de plus qu'il existe sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux connexions ω et ω' dont les images par les homomorphismes $\gamma_{C(E)}$ et $\gamma_{C(E')}$ associés respectivement aux couples $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}})$, $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}'})$, coïncident :

(VII.4.1) $$\gamma_{C(E)}(\omega) = \gamma_{C(E')}(\omega') = \omega_\gamma$$

et telles que, en identifiant $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$, $\mathfrak{L}(\mathcal{E}')$, $\mathfrak{L}(\mathcal{E}_\gamma)$ [resp. $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$, $\mathfrak{M}(\mathcal{E}')$, $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)$], grâce à $\gamma_{\mathcal{E}}$, $\gamma_{\mathcal{E}'}$, on ait

(VII.4.2) $$\Omega(\omega) = \Omega(\omega').$$

Il s'agit alors de construire un G-isomorphisme (c'est-à-dire un isomorphisme compatible avec l'identité sur G)

$$h : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}',$$

induisant l'identité sur $\mathcal{E}_\gamma$ et transformant ω en ω'.

C'est ce problème qui occupe la fin du chapitre. Nous commencerons par établir une condition nécessaire et suffisante d'existence.

Avant toutes choses, rappelons que, lorsque nous considérons le cercle S^1, nous le supposons orienté, muni d'une origine et paramétré. En toute précision, nous l'identifierons ici au quotient des nombres réels modulo 1 et nous noterons $\alpha : R \to S^1$ l'application canonique qui résulte de cette opération. L'origine choisie sur S^1 est $O = \alpha(o)$.

Considérons maintenant un lacet en $x_0 \in \mathcal{X}$, défini par une application différentiable

$$l_{x_0} : \quad S^1 \to \mathcal{X} \qquad [l_{x_0}(o) = x_0]$$

et soit

$$\bar{l} : \quad S^1 \times I' \to \mathcal{X}$$

une homotopie différentiable de l_{x_0} (I' est un intervalle ouvert contenant I). On pose

$$\bar{l}(x, t) = l_{x_t}(x) \qquad (x \in S^1 \text{ et } t \in I')$$

ou, plus simplement

$$l(x, t) = l^t(x).$$

$l^t = l_{x_t}$ est un lacet en $x_t = l(o, t) = l^t(o)$, et l'on a par hypothèse, $l^0 = l_{x_0}$.

Nous poserons

$$m_0 = \tau_\omega(l_{x_0}), \qquad m'_0 = \tau_{\omega'}(l_{x_0}), \qquad m_1 = \tau_\omega(l_{x_1}), \qquad m'_1 = \tau_{\omega'}(l_{x_1}).$$

Nous nous proposons de démontrer le

LEMME 1. — *Dans les conditions précédentes, si* $m_0 = m'_0$, *alors,* $m_1 = m'_1$.

Soient, $\mathcal{E}_{\bar{l}} = \bar{l}^{-1}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}'_{\bar{l}} = l'^{-1}(\mathcal{E}')$, $\mathcal{E}^{\gamma}_{\bar{l}} = \bar{l}^{-1}(\mathcal{E}_\gamma)$ les espaces fibrés principaux de base $S^1 \times I'$ induits par $\bar{l}$ et $\omega_{\bar{l}}$, $\omega'_{\bar{l}}$, $\omega^{\gamma}_{\bar{l}}$ les connexions induites par $\bar{l}$ également sur ces différents espaces. Les espaces et connexions induits par l' [ou, si l'on préfère, les restrictions à (S^1, t) des espaces et connexions induits par $\bar{l}$] seront notés $\mathcal{E}_{l'}$, $\mathcal{E}'_{l'}$, $\mathcal{E}^{\gamma}_{l'}$, $\omega_{l'}$, $\omega'_{l'}$, $\omega^{\gamma}_{l'}$. D'autre part, pour simplifier le langage, nous appliquerons à $S^1 \times I'$ le vocabulaire des cylindres de révolution : génératrices, parallèles, etc.

A tout point $y \in \mathcal{E}_{\bar{l}}$ (resp. $\mathcal{E}'_{\bar{l}}$, $\mathcal{E}^{\gamma}_{\bar{l}}$) de projection (x, t) sur $S^1 \times I'$, on fait correspondre le point $\xi(y) \in \mathcal{E}_{l'_0}$ [resp. $\xi'(y) \in \mathcal{E}'_{l'_0}$, $\xi^{\gamma}(y) \in \mathcal{E}^{\gamma}_{l'_0}$] défini comme la trace sur $\mathcal{E}_{l'_0}$ (resp. $\mathcal{E}'_{l'_0}$, $\mathcal{E}^{\gamma}_{l'_0}$) du chemin $\omega_{\bar{l}}$-horizontal (resp. $\omega'_{\bar{l}}$, $\omega_{\bar{l}}$) passant par y et se projetant sur la génératrice (x, I') qui passe par la projection de y. En posant

$$\mu(y) = (\xi(y), t) \qquad [y \in \mathcal{E}_{\bar{l}},\ p(y) = (x, t)]$$
$$\mu'(y) = (\xi'(y), t) \qquad [y \in \mathcal{E}'_{\bar{l}},\ p(y) = (x, t)]$$
$$\mu^{\gamma}(y) = (\xi^{\gamma}(y), t) \qquad [y \in \mathcal{E}^{\gamma}_{\bar{l}},\ p(y) = (x, t)]$$

on définit des G-isomorphismes

$$\mu : \mathcal{E}_{\bar{l}} \to \mathcal{E}_{l'_0} \times I',$$
$$\mu' : \mathcal{E}'_{\bar{l}} \to \mathcal{E}'_{l'_0} \times I,$$
$$\mu^{\gamma} : \mathcal{E}^{\gamma}_{\bar{l}} \to \mathcal{E}^{\gamma}_{l'_0} \times I',$$

pour lesquels on a les deux relations

$$\text{(VII.4.3)} \qquad \begin{cases} \gamma_{\mathcal{E}_{l'_0} \times I'} \circ \mu = \mu^{\gamma} \circ \gamma_{\mathcal{E}_{\bar{l}}}, \\ \gamma_{\mathcal{E}'_{l'_0} \times I'} \circ \mu' = \mu^{\gamma} \circ \gamma_{\mathcal{E}'_{\bar{l}}}, \end{cases}$$

où les homomorphismes γ sont, comme d'habitude, les homomorphismes canoniques appliquant les espaces figurant en indices sur leurs quotients par H. Ces égalités résultent du fait que l'image d'un chemin ω-horizontal par un γ-homomorphisme est un chemin $\gamma_{c(E)}(\omega)$-horizontal. Précisons tout de suite que nous n'avons choisi ces homomorphismes μ que parce qu'ils satisfont naturellement aux relations (VII.4.3) qui seules nous serviront par la suite. On pourrait les remplacer par tout autre trio d'homomorphismes vérifiant (VII.4.3).

Considérons maintenant les deux chemins ω_{l^0}- et ω'_{l^0}-horizontaux

$$\lambda_y : \ \mathrm{I} \to \mathscr{E}_{l^0} \qquad \text{et} \qquad \lambda'_{y'} : \ \mathrm{I} \to \mathscr{E}'_{l^0},$$

issus respectivement de deux points y et y' choisis dans les fibres $\mathscr{E}_{l^0,0}$ et $\mathscr{E}'_{l^0,0}$ de telle sorte que $\gamma_{\mathscr{E}_{l^0}}(y) = \gamma_{\mathscr{E}'_{l^0}}(y')$, et se projetant sur S_1, paramétré par $\alpha(t)$ comme il a été dit plus haut [c'est-à-dire qu'on a $p(\lambda_y(t)) = p(\lambda'_{y'}(t)) = \alpha(t)$]. La condition $m_0 = m'_0$ permet de définir un isomorphisme

$$h_{l^0} : \ \mathscr{E}_{l^0} \to \mathscr{E}'_{l^0},$$

en posant

$$h_{l^0}(m.\lambda_y(t)) = m.\lambda'_{y'}(t) \qquad [t \in \mathrm{I},\ m \in \mathfrak{M}_{l^0}(\mathscr{E}^{\gamma}_{l^0})].$$

La condition $m_0 = m'_0$ montre que cette définition est bien cohérente au-dessus de O et le fait que les images de y et y' sur $\mathscr{E}^{\gamma}_{l^0}$ coïncident entraîne que les images de $\lambda_y(t)$ et de $\lambda'_{y'}(t)$ coïncident également, et par suite, en utilisant la proposition I.6.2 :

$$h_{l^0}(z.s) = h_{l^0}(z).s \qquad (z \in \mathscr{E}_{l^0},\ s \in \mathrm{G}),$$

h_{l^0} est donc un G-isomorphisme.

Grâce à μ et à μ' on étend de façon évidente h_{l^0} en un isomorphisme

$$h_{\bar{l}} : \ \mathscr{E}_{\bar{l}} \to \mathscr{E}'_{\bar{l}}$$

qui est un G-isomorphisme puisque h_{l^0}, μ, μ' sont compatibles avec l'identité sur G. De plus, $h_{\bar{l}}$ induit l'identité sur $\mathscr{E}^{\gamma}_{\bar{l}}$, comme le montrent les égalités (VII.4.3). D'autre part, les espaces structuraux gauches de $\mathscr{E}_{\bar{l}}$ et $\mathscr{E}'_{\bar{l}}$ s'identifient à $\bar{l}^{-1}(\mathfrak{M}(\mathscr{E}^{\gamma}))$ de la même façon que $\mathfrak{M}(\mathscr{E})$ et $\mathfrak{M}(\mathscr{E}')$ s'identifient à $\mathfrak{M}(\mathscr{E}^{\gamma})$. Compte tenu de cette identification, il résulte de ce qui précède que l'isomorphisme de ces espaces structuraux gauches défini par $h_{\bar{l}}$ n'est autre que l'identité. Il en est évidemment de même pour les espaces de Lie.

Les égalités (VII.4.1) et (VII.4.2) montrent alors que si l'on désigne par $\underline{\omega}_{\bar{l}}$ la connexion-image de $\omega_{\bar{l}}$ par $h_{\bar{l}}$, on a

$$\Omega(\underline{\omega}_{\bar{l}}) = \Omega(\omega'_{\bar{l}})$$

et

$$\underline{\omega}_{\bar{l}} = \omega'_{\bar{l}} + \theta,$$

où θ est une forme différentielle à valeurs dans $\underline{\mathrm{H}}$. La formule (IV.5.1) montre qu'on a $\Delta\theta = d\theta = 0$. Il en résulte que le champ défini dans $\mathrm{H} \times (S^1 \times \mathrm{I}')$ par l'égalité

$$X^0 = \theta,$$

équivalente à

$$\mathrm{C}(s)\omega'_{\bar{l}} = \underline{\omega}_{\bar{l}}.$$

est complètement intégrable (*voir* prop. IV.5.2, IV.5.3 et IV.5.4). Toute variété intégrale de ce champ est donc un revêtement de $S^1 \times I'$, Soit $\underline{\sigma}$ une de ces variétés. Comme le premier groupe d'homotopie de $S^1 \times I'$ est engendré par le parallèle (S^1, o) considéré comme un lacet en (O, o), le sous-groupe de H engendré par $\tau_0^0(S^1, o)$ opère de façon simplement transitive sur toute fibre de $\underline{\sigma}$, Or, en tenant compte de la proposition IV.5.4 et de l'hypothèse $m_0 = m'_0$, on voit qu'on a $\tau_0^0(S^1, o) =$ élément neutre. Autrement dit, $\underline{\sigma}$ se réduit à une section de $S^1 \times I'$. En se plaçant alors sur le parallèle $(S^1, 1)$, on voit qu'on a également $\tau_0^0(S^1, 1) =$ élément neutre. On en déduit immédiatement

$$\tau_{\omega_{\overline{l}}}(S^1, 1) = \tau_{\omega'_{\overline{l}}}(S^1, 1).$$

Mais on a vu que l'isomorphisme des espaces structuraux gauches défini par $h_{\overline{l}}$ était l'identité. On a donc également

$$\tau_{\omega_{\overline{l}}}(S^1, 1) = \tau_{\omega_{\overline{l}}}(S^1, 1).$$

En revenant à $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$, il résulte de la comparaison de ces deux dernières égalités que $m_1 = m'_1$. Le lemme 1 est donc démontré et nous passons au

LEMME 2. — *En reprenant les notations du lemme* 1, *si* $m'_0 m_0^{-1} = s$:

1° *s appartient au centre* H *de* G ;
2° *On a également* $m'_1 m_1^{-1} = s$ ([24]).

Le 1° est une conséquence immédiate des égalités (VII.4.1) et (VII.4.2). Quant au 2°, il signifie simplement que $(\tau_{\omega'}(l_x))(\tau_{\omega}(l_x))^{-1}$ ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet l_x (au sens large : le point marqué pouvant se déplacer). Sa démonstration va consister, en gros, à fendre l'espace $\mathcal{E}_{\overline{l}}$ le long d'une génératrice de la base et à recoller la cassure après un décalage correspondant à la translation à droite s : on se ramènera ainsi au cas précédent.

Considérons pour cela un nombre réel ε compris entre o et 1 et soit I'' l'inter-

---

([24]) Dans le cas où le sous-groupe $H(s)$ de H engendré par $s = m'_0 m_0^{-1}$ est fermé dans G, on démontre rapidement ce lemme en formant les quotients $\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{X}, \hat{G})$ et $\hat{\mathcal{E}}'(\mathcal{X}, \hat{G})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ par $H(s)$. En notant $\hat{m}_0$, $\hat{m}'_0$, $\hat{m}_1$, $\hat{m}'_1$ les éléments obtenus en substituant $\hat{\mathcal{E}}$ et $\hat{\mathcal{E}}$ 'à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, on a donc

$$\hat{m}_0 = \hat{m}'_0,$$

et par suite, d'après le lemme précédent,

$$\hat{m}_1 = \hat{m}'_1.$$

Cela entraîne en revenant aux espaces initiaux, $m'_1 m_1^{-1} \in H(s)$. Mais il est clair que $m_t = \tau_\omega(l_{x_t})$ et $m'_t = \tau_{\omega'}(l_{x_t})$ sont des fonctions différentiables de t. Il en est donc de même de $s_t = m'_t m_t^{-1}$ et, comme $H(s)$ est discret dans G, on a $s_t =$ Cte.

Autrement dit :

$$m'_1 m_1^{-1} = m'_0 m_0^{-1}.$$

valle ouvert $]-\varepsilon;\ 1+\varepsilon[$. Nous définissons une application différentiable

$$\eta : \quad I'' \times I' \to S^1 \times I',$$

en posant

$$\eta(t'', t') = (\alpha(t''), t') \qquad (t'' \in I'' \text{ et } t' \in I').$$

Considérons l'espace fibré principal $\eta^{-1}(\mathscr{E}_{\bar{l}})$ de base $I'' \times I'$, induit à partir de $\mathscr{E}_{\bar{l}}$ par l'application différentiable η, et désignons par $U \subset S^1 \times I'$ l'ouvert compris entre les génératrices $(\alpha(\varepsilon), I')(\alpha(1-\varepsilon), I')$ et contenant la génératrice $(0, I')$. Enfin, U_0 et U_1 seront les deux composantes connexes de $\eta^{-1}(U)$, la première contenant le point de coordonnées $(0, 0)$, la deuxième contenant le point $(1, 0)$. Choisissons alors un point $y \in \mathscr{E}_{\bar{l}}$ de projection $(0, 0)$ et soient

$$\nu_1 : \quad I' \to \mathscr{E}_{\bar{l}} \qquad \text{et} \qquad \nu_2 : \quad I' \to \mathscr{E}_{\bar{l}},$$

les chemins $\omega_{\bar{l}}$-horizontaux d'origine $\underline{m}_0 . y$ et $\underline{m}'_0 . y$ respectivement, de projection commune $(0, I')$, avec

$$\underline{m}_0 = \tau_{\omega_{\bar{l}}}(S^1, 0) \qquad \text{et} \qquad m'_0 = \tau_{\omega_{\bar{l}}}(S^1, 0).$$

Par tout point $\nu_1(t)$ ou $\nu_2(t)$ de projection $(0, t)$, passe un chemin $\omega_{\bar{l}}$-horizontal se projetant sur l'arc de parallèle $\overbrace{(\alpha(\varepsilon)(\alpha(1-\varepsilon)}, t)$ qui contient $(0, t)$. Ces chemins engendrent manifestement deux sections différentiables de $\mathscr{E}_{\bar{l}}$ sur l'ouvert U. Nous noterons

$$\Sigma_1 : \quad U \to \mathscr{E}_{\bar{l}},$$

celle qui est définie à partir de ν_1 et

$$\Sigma_2 : \quad U \to \mathscr{E}_{\bar{l}}.$$

celle qui est définie à partir de ν_2. Comme $\underline{m}'_0 \underline{m}_0^{-1} = m'_0 m_0^{-2} = s$, comme tout point de Σ_1 (resp. Σ_2) est relié horizontalement à l'origine de ν_1 (resp. ν_2) et qu'enfin l'origine de ν_2 se déduit de celle de ν_1 par $\underline{m}'_0 \underline{m}_0^{-1}$, on a

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 . s.$$

D'autre part, chacune de ces sections en induit deux sur $\nu^{-1}(\mathscr{E}_{\bar{l}})$: l'une au-dessus de U_0, l'autre au-dessus de U_1. Les premières seront notées Σ_1^0 et Σ_2^0, les deuxièmes Σ_1^1 et Σ_2^1. Il est clair qu'on obtient $\mathscr{E}_{\bar{l}}$ en identifiant Σ_1^0 et Σ_1^1. Au lieu de procéder ainsi, identifions Σ_2^0 avec $\Sigma_2^1 = \Sigma_1^1 . s$. Plus précisément, tout point $y^0 = \Sigma_1^0(t'', t')[-\varepsilon < t'' < \varepsilon,\ t' \in I']$ est identifié à $y^1 = \Sigma_2^1(1 + t'', t')$ puis, évidemment, $y^0 . g$ est identifié à $y^1 . g$, quel que soit $g \in \underline{G}$. On obtient ainsi un espace fibré principal différentiable $\mathscr{E}_{\bar{l}}^1$ de base $S^1 \times I'$ et de groupe G. Du fait que s appartienne au centre de G, on déduit :

1° Que le quotient de $\mathscr{E}_{\bar{l}}^1$ par H est $\mathscr{E}_{\bar{l}}^{\gamma}$ puisqu'en effectuant cette opération sur $\nu^{-1}(\mathscr{E}_{\bar{l}})$, on identifie Σ_1^0 et Σ_2^0 d'une part, Σ_1^1 et Σ_2^1 d'autre part.

2° Que les restrictions de $\omega_{\bar{l}}$ à Σ_1 et Σ_2 sont égales et que, par suite, la connexion $\omega^0_{\bar{l}}$, induite sur $\nu^{-1}(\mathscr{E}_{\bar{l}})$ à partir de $\omega_{\bar{l}}$, est compatible avec l'identification précédente. Il en résulte qu'elle donne naissance à une connexion $\omega^1_{\bar{l}}$ sur $\mathscr{E}^1_{\bar{l}}$.

3° Que, de même, les espaces structuraux gauches de $\mathscr{E}^1_l$ et $\mathscr{E}_{\bar{l}}$ s'identifient car

$$j_{\mathfrak{M}_{\bar{l}}}(\Sigma_1(x))m = j_{\mathfrak{M}_{\bar{l}}}(\Sigma_2(x))m \qquad [m \in \mathfrak{M}_{\bar{l}}(\mathscr{E}_{\bar{l}}),\ x \in \mathrm{U}].$$

Il en est donc de même des espaces de Lie et le 2° montre que les différentiations covariantes associées à $\omega^1_{\bar{l}}$ et à $\omega_{\bar{l}}$ coïncident et qu'on a

$$\Omega\left(\omega^1_{\bar{l}}\right) = \Omega\left(\omega_{\bar{l}}\right).$$

D'autre part, par construction même de l'espace $\mathscr{E}^1_{\bar{l}}$, il est clair qu'on a l'égalité

$$\underline{m}^1_t = s\underline{m}_t,$$

où l'on a posé

$$\underline{m}^1_t = \tau_{\omega^1_{\bar{l}}}(\mathrm{S}^1.\ t) \qquad \text{et} \qquad \underline{m}_t = \tau_{\omega_{\bar{l}}}(\mathrm{S}^1,\ t),$$

(S^1, t) étant bien entendu considéré comme un lacet en (O, t). Comme on a, par ailleurs,

$$\underline{m}'_0 = s\underline{m}_0,$$

on en déduit

$$\underline{m}^1_0 = \underline{m}'_0.$$

En posant alors $\underline{m}'_1 = \tau_{\omega'_{\bar{l}}}(\mathrm{S}^1,\ 1)$ et en appliquant le lemme 1 à $\mathscr{E}^1_{\bar{l}}$ et à $\mathscr{E}'_{\bar{l}}$, il vient

$$\underline{m}^1_1 = \underline{m}'_1.$$

Par conséquent,

$$s\underline{m}_1 = \underline{m}'_1,$$

et, en revenant à $\mathscr{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ et à $\mathscr{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$:

$$sm_1 = m'_1.$$

Cela achève la démonstration.

Enfin, si l^2_x est le produit de l^1_x et de l_x, et si m, m', m_1, m'_1, m_2, m'_2 sont associés à l_x, l'_x, l^2_x dans les espaces $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ munis des connexions ω et ω', on a

$$\begin{aligned} m_2 &= m_1 m, \qquad s = m' m^{-1}, \\ m'_2 &= m'_1 m', \qquad s_1 = m'_1 m_1^{-1}; \\ s_2 &= (m'_1 m')(m_1 m)^{-1} \\ &= m'_1 s m_1^{-1} \\ &= s_1 s. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION VII.4.1. — *Étant donnés* $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$, $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G)$, ω, ω' *satisfaisant aux conditions exposées ci-dessus, il existe un homomorphisme*

$$\chi_x : \Pi_x^1(\mathfrak{X}) \to H$$

du premier groupe d'homotopie en x *de* $\mathfrak{X}$ *dans le centre* H *de* G, *défini par*

$$\chi_x(\alpha) = \tau_{\omega'}(l_x)\tau_{\omega}^{-1}(l_x),$$

où l_x *est un représentant de la classe d'homotopie* $\alpha \in \Pi_x^1(\mathfrak{X})$. *En outre, si* l_x *et* $l'_{x'}$ *sont deux lacets distincts* $(x \neq x')$; *homotopes, on a*

$$\tau_{\omega'}(l_x)\tau_{\omega}^{-1}(l_x) = \tau_{\omega'}(l'_{x'})\tau_{\omega}^{-1}(l'_{x'}).$$

Il en résulte que

$$\chi = \chi_x(\Pi_x^1(\mathfrak{X}))$$

est un sous-groupe de H *indépendant de* $x \in \mathfrak{X}$.

Comme le premier groupe d'homotopie de $\mathfrak{X}$ rendu abélien est isomorphe au premier groupe d'homologie à coefficients entiers et que H est lui-même abélien, χ_x induit un homomorphisme

$$\mathfrak{X}' : H^1(\chi) \to H$$

du premier groupe d'homologie de $\mathfrak{X}$ à coefficients entiers, dans le centre H de G. On a donc le :

COROLLAIRE. — *Il existe un homomorphisme*

$$\chi' : H^1(\mathfrak{X}) \to H,$$

induit par χ_x.

Remarque. — Si l'on remplace ω et ω' par $\omega + \eta$ et $\omega' + \eta$ où η est une section quelconque de $L(E_\gamma)$, on ne modifie pas χ_x. Il suffit, pour s'en rendre compte de procéder de façon parallèle aux lemmes 1 et 2 dont nous reprenons les notations :

1° Si $m_0 = m'_0$ avec ω et ω', il est clair qu'il en est de même (mais avec des m différents) lorsqu'on leur substitue $\omega + \eta$ et $\omega' + \eta$ car l'isomorphisme h_{l_0} applique $(\omega + \eta)_{l_0}$ sur $(\omega' + \eta)_{l_0}$ aussi bien que ω_{l_0} sur ω'_{l_0}.

2° Si $m_0 \neq m'_0$, on se ramène au cas précédent en utilisant le procédé du lemme 2.

On a alors la proposition suivante qui précise le rôle de χ.

PROPOSITION VII.4.2. — *Étant donnés deux espaces fibrés principaux différentiables* $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ *et* $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G)$ *satisfaisant aux conditions exposées au début de ce*

paragraphe, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un G*-isomorphisme*

$$h : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

induisant l'identité sur $\mathcal{E}_\gamma$ *et appliquant* ω *sur* ω'*, est que le sous-groupe* χ *de* H*, défini par la proposition* VII.4.1 *se réduise à l'identité.*

Il est bien clair, en effet, que la condition est nécessaire : si h existe, il applique tout chemin ω-horizontal sur un chemin ω'-horizontal et induit l'identité sur $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)$ puisqu'il induit l'identité sur $\mathcal{E}_\gamma$. On a donc

$$\tau_\omega(l_x) = \tau_{\omega'}(l_x),$$

quel que soit le lacet l_x. En revenant à la définition de χ' il est clair que cet homomorphisme est trivial et que χ se réduit à l'élément neutre.

Réciproquement, on peut construire h comme d'habitude, en choisissant $y_0 \in \mathcal{E}_{x_0}$ et $y'_0 \in \mathcal{E}'_{x_0}$, non pas arbitrairement, mais de telle sorte que

$$\gamma_{\mathcal{E}}(y_0) = \gamma_{\mathcal{E}'}(y'_0).$$

Comme, par hypothèse, χ est trivial, on a

$$\tau_\omega(l_x) = \tau_{\omega'}(l_x).$$

On peut alors définir h sur la fibre $\mathcal{E}_{x_0}$ en posant $h(y_0 . g) = y'_0 . g \; (g \in \mathrm{G})$ et étendre cette définition en joignant tout point $z \in \mathcal{E}$ à un point $z_0 \in \mathcal{E}_{x_0}$ par un chemin ω-horizontal de projection l et en posant $h(z) = z'$ où z' est l'extrémité du chemin ω'-horizontal d'origine $h(z_0)$ et de projection l (décrit à partir de x_0). On vérifie sans difficulté qu'on a ainsi construit un G-isomorphisme satisfaisant aux conditions indiquées.

On a aussi le :

Corollaire. — *Étant donnés deux espaces fibrés principaux différentiables* $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ *et* $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ *satisfaisant aux conditions exposées au début de ce paragraphe, si le sous-groupe* χ *de* H *défini par la proposition* VII.4.1 *est fermé dans* G *et si* $\hat{\mathcal{E}}$, $\hat{\mathcal{E}}'$ *et* $\hat{\mathrm{G}}$ *désignent les quotients de* $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, G *respectivement, par* χ*, il existe un* $\hat{\mathrm{G}}$*-isomorphisme*

$$\hat{h} = \hat{\mathcal{E}} \to \hat{\mathcal{E}}',$$

de $\hat{\mathcal{E}}$ *sur* $\hat{\mathcal{E}}'$*, induisant l'identité sur* $\mathcal{E}_\gamma$ *et appliquant la connexion-quotient* $\hat{\omega}$ *sur la connexion-quotient* $\hat{\omega}'$.

Rapprochons maintenant ces derniers résultats de ceux du paragraphe précédent et considérons deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ possédant les propriétés suivantes :

1° Leurs groupes structuraux G et G′ sont connexes.

2° Il existe un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace structural gauche $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ sur l'espace structural gauche $\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$ de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, auquel est associé l'homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{L}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{L}'(\mathcal{E}')$$

de leurs espaces de Lie.

3° Il existe deux connexions ω et ω' sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ dont les L(E)- et L'(E')-différentiations covariantes sont notées Δ et Δ', et qui sont liées à $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ par les deux relations

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta,$$
$$\Omega(\omega') = \varphi_{L)E)}(\Omega(\omega)).$$

On peut alors énoncer :

Théorème VII.4.1. — A. *Dans les conditions ci-dessus, il existe un homomorphisme*

$$\chi' : \quad H^1(\mathcal{X}) \to H'$$

du premier groupe d'homologie de $\mathcal{X}$ à coefficients entiers, dans le centre H' *de* G', *défini par l'égalité*

$$\tau_{\omega'}(l_x)\left[\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\tau_{\omega}(l_x))\right]^{-1} = \chi'(\alpha),$$

où l_x est un lacet appartenant à la classe d'homologie α et où le premier membre, appartenant au centre de $\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$ est considéré comme un élément de H'.

B. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un couple d'homomorphismes compatibles*

$$\psi : \quad G \to G' \qquad \text{et} \qquad h : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}',$$

tels que

$$\psi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}, \qquad \psi^h_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} \qquad \text{et} \qquad \psi^h_{L(E)}(\omega) = \omega',$$

est que l'homomorphisme χ' soit trivial.

Remarques. — 1° Si G est simplement connexe, l'existence de $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}$ entraîne celle de $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$. On peut donc énoncer dans ce cas un théorème où ce dernier homomorphisme ne figure pas.

2° Si $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ est un homomorphisme *dans*, on peut énoncer un théorème analogue au théorème VII.4.1, à condition de faire intervenir la condition portant sur l'espace d'holonomie de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ muni de la connexion ω', à savoir

$$\mathfrak{L}(\omega') \subset \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\mathfrak{M}(\mathcal{E})).$$

3° En utilisant les homomorphismes induits, on peut étendre ces résultats au cas où les bases des deux espaces fibrés principaux sont distinctes et où $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ induit une application différentiable de l'une dans l'autre.

Corollaire. — *Si χ' n'est pas trivial mais si le sous-groupe $\chi = \chi'(H^1(\mathfrak{X}))$ est fermé dans G', on note $\hat{\mathcal{E}}'(\mathfrak{X}, \hat{G}')$ l'espace fibré principal quotient de $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$ par χ, et il existe un couple d'homomorphismes compatibles*

$$\hat{\psi} : G \to \hat{G}' \qquad \text{et} \qquad \hat{h} : \mathcal{E} \to \hat{\mathcal{E}}',$$

tels que

$$\hat{\psi}^{\hat{h}}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \hat{\varphi}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}, \qquad \hat{\psi}^{\hat{h}}_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} = \hat{\varphi}_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} \qquad \text{et} \qquad \hat{\psi}^{\hat{h}}_{C(E)}(\omega) = \hat{\omega}',$$

$\hat{\varphi}_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$, $\hat{\varphi}_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}$ *et* $\hat{\omega}'$ *désignant les homomorphismes et la connexion obtenue par passage au quotient.*

5. Cas particuliers. — Reprenons maintenant les notations, hypothèses et identifications de la proposition VII.4.1 pour nous occuper du cas où χ est un sous-groupe de la composante connexe de l'identité de H. Soit H_0 cette composante.

Comme en effectuant les quotients de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ par H_0, on élimine χ, il est clair que ces quotients sont G/H_0-isomorphes. Réciproquement, s'il en est ainsi, χ est un sous-groupe de H_0. Plus précisément, on peut énoncer :

Proposition VII.5.1. — *Pour que χ soit un sous-groupe de H_0, il faut et il suffit qu'il existe un G/H_0-isomorphisme appliquant le quotient $\mathcal{E}/H_0$ sur $\mathcal{E}'/H_0$, transformant la connexion déduite de ω en la connexion déduite de ω' et induisant l'identité sur $\mathcal{E}_\chi$.*

Nous allons chercher, dans ce cas-là, s'il existe sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ une connexion ω^1 avec laquelle il soit possible de déterminer un G-isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ satisfaisant aux conditions habituelles.

Soit donc $\omega^1 = \omega + \theta$ une connexion obtenue en ajoutant à ω une forme différentielle θ sur $\mathfrak{X}$, à valeurs dans $\underline{H}$ et fermée [c'est-à-dire une section du centre de $L^1(E)$ telle que $\Delta\theta = d\theta = 0$]. On a alors

$$\gamma_{C(E)}(\omega^1) = \gamma_{C(E)}(\omega) = \gamma_{C(E')}(\omega'),$$
$$\Omega(\omega^1) = \Omega(\omega) = \Omega(\omega').$$

Aux connexions ω^1 et ω' correspond donc un groupe χ^1, de même qu'à ω et ω' correspond χ. Le problème revient donc à trouver une connexion ω^1 telle que χ^1 se réduise à l'identité.

Soit $R(H_0)$ un revêtement simplement connexe de H_0, muni d'une structure de groupe qu'un isomorphisme

$$\rho : R(H_0) \to H_0$$

applique sur $H_0 . R(H_0)$ est isomorphe à R^p et un isomorphisme

$$\underline{\rho} : \underline{R(H_0)} \to \underline{H_0}$$

associé à ρ applique l'algèbre de Lie de $R(H_0)$ sur celle de H_0.

Donnons-nous maintenant un lacet

$$l_x : \quad S^1 \to \mathfrak{X},$$

auquel correspondent, d'une part

$$s = \tau_{\omega'}(l_x)\,(\tau_{\omega}(l_x))^{-1}$$

et d'autre part

$$s^1 = \tau_{\omega'}(l_x)\,(\tau_{\omega^1})\,(l_x))^{-1}.$$

On a donc

$$s^1 = s(\tau_\theta^0(l_x))^{-1},$$

où $\tau_0^0(l_x)$ est associé à l_x dans la connexion (Γ) définie dans $H_0 \times \mathfrak{X}$ par l'égalité (*voir* § IV.5) :

(VII.5.1) $$X^0 = \theta.$$

Mais ρ détermine un ρ-homomorphisme

$$\bar{\rho} : \quad R(H_0) \times \mathfrak{X} \to H_0 \times \mathfrak{X}$$

et l'équation (VII.5.1) appliquée à $R(H_0) \times \mathfrak{X}$ définit une connexion dont l'image par $\bar{\rho}$ n'est autre que (Γ). Si $\bar{\tau}_0^0(l_x)$ est associé au lacet l_x dans $R(H_0) \times \mathfrak{X}$, on a donc

$$\rho(\bar{\tau}_\theta^0(l_x)) = \tau_\theta^0(l_x).$$

Comme, d'autre part, $R(H_0)$ est isomorphe à R^p, on a tout simplement

$$\bar{\tau}_\theta^0(l_x) = \int_{l_x} \underline{\bar{\rho}}^{-1}\theta.$$

On en déduit :

Proposition VII.5.2. — *Soit l_x^i un ensemble de lacets engendrant $H^1(\mathfrak{X})$ et θ une forme différentielle linéaire fermée sur $\mathfrak{X}$. Le groupe χ^1 associé aux connexions $\omega^1 = \omega + \theta$, ω' se réduit à l'identité lorsque les périodes de θ relatives aux cycles l_x^i sont telles que*

$$\rho\left(\int_{l_x^i} \underline{\bar{\rho}}^{-1}\theta\right) = \chi'(\alpha^i),$$

où α^i désigne la classe d'homologie de l_x^i.

Soit T^1 le sous-groupe de torsion de $H^1(\mathfrak{X})$. Si la classe d'homologie de l_x fait partie de T^1, on a

(VII.5.2) $$\int_{l_x} \underline{\bar{\rho}}^{-1}\theta = 0.$$

D'où :

Proposition VII.5.3. — *Pour qu'il existe une connexion $\omega^1 = \omega + \theta$ (θ fermée à valeurs dans $\underline{H}$) telle que χ^1 se réduise à l'identité, il est nécessaire que l'image par χ' du sous-groupe de torsion de $H^1(\mathfrak{X})$ se réduise elle-même à l'identité.*

Supposons maintenant que $\mathfrak{X}$ soit compacte et posons

$$\chi_{\Gamma} = \chi'(\mathrm{T}^1).$$

χ_{Γ} est fini, donc fermé dans G. D'autre part, il existe une forme différentielle θ, fermée, à valeurs dans $\underline{\mathrm{H}}$ qui admet des périodes arbitrairement données sur des cycles l^r_x, si ces derniers forment une base de $\mathrm{H}^1(\mathfrak{X})/\mathrm{T}^1$. En tenant compte de la proposition VII.5.3 et de l'égalité (VII.5.2), on peut alors énoncer :

Proposition VII.5.4. — *Si la variété $\mathfrak{X}$ est compacte, $\mathfrak{E}/\chi_{\Gamma}$ et $\mathfrak{E}'/\chi_{\Gamma}$ sont G/χ_{Γ}-isomorphes. On peut construire un tel isomorphisme à partir d'une connexion $\omega^1 = \omega + \theta$, où θ est une forme différentielle linéaire fermée à valeurs dans $\underline{\mathrm{H}}$, dont les périodes relatives aux cycles l^r_x sont des éléments g^r de $\mathrm{R}(\mathrm{H}_0)$ choisis de telle sorte que*

$$\rho(g^r) = \chi'(\alpha^r) \qquad (\alpha^r = \textit{classe de } l^r_x).$$

Nous laissons au lecteur le soin de transcrire ces divers résultats dans le cas plus général où $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ est un simple homomorphisme sur, et, en tenant compte alors de la condition portant sur l'holonomie, dans le cas où c'est un homomorphisme dans.

6. Modifications des hypothèses. — Il s'agit de donner ici quelques sous-produits des théorèmes précédents obtenus en modifiant ou en élargissant les hypothèses faites précédemment. Nous considérons toujours des espaces fibrés principaux différentiables $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ et $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ munis de connexions ω et ω' dont les L(E)- et L'(E')-différentiations covariantes sont notées Δ et Δ'. Les groupes structuraux de $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ et $(\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ sont toujours supposés connexes. On donne d'abord un cas où il est possible de se passer de la condition qui fait intervenir les courbures $\Omega(\omega)$ et $\Omega(\omega')$:

Proposition VII.6.1. — *S'il existe un homomorphisme*

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace structural gauche de $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ sur l'espace structural gauche de $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G})$ auquel est associé l'homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{L}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{L}'(\mathcal{E}')$$

tel que

(VII.6.1) $$\Delta' \circ \varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})} = \varphi_{\mathrm{L}(\mathrm{E})} \circ \Delta$$

si, de plus, $\mathfrak{X}$ est simplement connexe et si son deuxième groupe d'homologie à coefficients dans l'algèbre de Lie $\underline{\mathrm{H}}$ de H, est nul, il existe alors un couple d'homomorphismes compatibles :

$$\psi : \quad \mathrm{G} \to \mathrm{G}' \qquad et \qquad h : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}'.$$

liant $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ *à* $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$, *et tels que*

$$\psi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}, \qquad \psi^h_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} \qquad \text{et} \qquad \psi^h_{\mathbb{C}(\mathrm{E})}(\omega) = \omega' + \theta,$$

où θ *est une section du centre* $K'^1(E')$ *de* $L'^1(E')$ *c'est-à-dire une forme différentielle linéaire sur* $\mathfrak{X}$, *à coefficients dans* $\underline{H}$.

Pour démontrer cette proposition, Il convient d'abord de reprendre partiellement un calcul donné en remarque, à l'occasion du théorème VII.1.1.

La formule

$$\Delta^2\eta = [\Omega(\omega), \eta] \qquad [\eta \in L(E)],$$

transformée par $\varphi_{L,E}$ en tenant compte de (VII.6.1) et du fait que $\varphi_{L(E)}$ est, par hypothèse, un homomorphisme *sur*, montre qu'on a

$$[\varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)), \eta'] = [\Omega(\omega'), \eta'],$$

où η' est un élément quelconque de $L'(E')$. Il en résulte immédiatement que

$$\Theta = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)) - \Omega(\omega')$$

est une section du centre $K^2(E)$ de $L^2(E)$. On peut donc la considérer comme une forme différentielle sur $\mathfrak{X}$, de degré 2 et à valeurs dans $\underline{H}$. Mais on a d'une part

$$\Delta'\varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)) = \varphi_{L(E)}(\Delta(\Omega(\omega))) = 0,$$

à cause de (VII.6.1), et d'autre part

$$\Delta'(\Omega(\omega')) = 0.$$

Il en résulte qu'on a aussi

$$\Delta'\Theta = 0.$$

Cela montre que Θ, considérée comme une forme différentielle sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\underline{H}$, est fermée. D'après nos hypothèses, il existe donc une forme différentielle θ à valeurs dans $\underline{H}$ telle que

$$d\theta = \Theta.$$

En remplaçant ω' par $\omega' + \theta$, la formule (IV.5.1) montre que

$$\Omega(\omega' + \theta) = \Omega(\omega')$$

et, par suite

$$\Omega(\omega' + \theta) = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)).$$

Comme, par ailleurs, les $L'(E')$-différentiations covariantes associées à ω' et à $\omega' + \theta$ coïncident, nous pouvons appliquer le théorème VI.2.1. Notre proposition en résule immédiatement.

Remarque. — Dans le cas où G est abélien, où $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ est un isomorphisme sur, et où l'un des espaces $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}'$ est trivial, on retrouve un résultat signalé

à propos de la proposition IV.5.5 : tout espace fibré principal de groupe abélien sur une base dont le deuxième groupe d'homologie à coefficients dans $\underline{G}$ est nul, est trivial.

Signalons, dans cet ordre d'idées, la proposition suivante, légèrement plus générale :

PROPOSITION VII.6.2, — *Si $\mathfrak{X}$ est simplement connexe, G abélien et s'il existe sur l'espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ une connexion ω telle que*

$$\Omega(\omega) = \Delta\theta,$$

où θ est une forme différentielle tensorielle linéaire de type adjoint, $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ est trivial.

En effet, la formule (IV.5.1) montre que $\Omega(\omega+\theta)=0$. La connexion $\omega+\theta$ est donc intégrable. La proposition résulte alors du fait que $\mathfrak{X}$ est simplement connexe et que, par suite, toute variété intégrale du champ connexe $c(\omega+\theta)$ est une section de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$. Ce dernier, possédant une section globale est bien trivial.

Abordons enfin le cas plus général suivant :

Nous supposons qu'il existe deux homomorphismes associés $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ et que $\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta$, sans faire d'hypothèse supplémentaire. Il n'existe pas alors de couple (ψ, h) satisfaisant aux conditions habituelles, du moins en général. On a cependant les résultats suivants faciles à vérifier :

1° Il existe toujours un homomorphisme d'espaces fibrés différentiables

$$h^0 : \mathcal{E} \to \overset{n-p}{\mathcal{R}'}$$

de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ dans l'espace fibré $\overset{n-p}{\mathcal{R}'}$ des $(n-p)$-repères de $\mathcal{L}^{r0}(\mathcal{E}')$, où n est la dimension de G et où p est la dimension des fibres du noyau de $\varphi_{\mathcal{L}^0(\mathcal{E})}$. On construit en effet un tel homomorphisme h^0 en remarquant qu'on peut obtenir le noyau de $\varphi_{\mathcal{L}^0(\mathcal{E})}$ en modelant sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ le produit de $\mathfrak{X}$ par un idéal $\underline{\mathcal{G}}$ de $\underline{G}$ (*voir* prop. VII.3.3). On choisit alors un repère $f=(f_i)$ $(i=1, \ldots, n)$ de $\underline{G}$ dont les p premiers vecteurs constituent un repère de l'idéal $\underline{\mathcal{G}}$ et l'on considère

$$\rho = (\rho_i) = a^f_{\mathcal{E}}(\gamma) \qquad (\gamma \in \mathcal{E}_x).$$

Comme, par définition même de l'homomorphisme adjoint $a^f_{\mathcal{E}}$, on a

$$a^f_{\mathcal{E}}(\gamma) = (i_{\mathcal{L}}(\gamma) f_i) \qquad (i=1, \ldots, n),$$

il est clair que, d'une part, l'image de chacun des p premiers vecteurs de $a^f(\gamma)$ par $\varphi_{\mathcal{L}^0(\mathcal{E})}$ est nulle :

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\rho_\alpha) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, p)$$

et que, d'autre part, l'ensemble des vecteurs $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}(\rho_a)(a=p, \ldots, n)$ forme un $(n-p)$-repère de $\mathfrak{L}'^0(\mathcal{E}')$. Nous poserons donc

$$h^0(y)=\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}(\rho_a), \qquad \text{avec} \qquad (\rho_i)=a^f_{\mathcal{E}}(y).$$

On vérifie alors que, si y_t décrit un chemin ω-horizontal, $h^0(y_t)$ se déplace par parallélisme relativement à ω'. De plus, on a

$$h^0(m.y)=a_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')}\left(\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(m)\right).h^0(y) \qquad [m\in\mathfrak{M}(\mathcal{E}), y\in\mathcal{E}].$$

mais, en général, $a_{\mathfrak{M}'(\mathcal{E}')}\left(\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\mathfrak{M}(\mathcal{E}))\right)$ n'est pas simplement transitif. Cependant, on peut, à partir de h^0, obtenir le théorème VII.1.1. Nous renvoyons pour cela à Aragnol [3] et [4] où il convient de supposer que $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ est un homomorphisme sur. Les démonstrations indiquées dans ces Notes sont d'ailleurs des transpositions de celles données au début de ce chapitre, les repères étant interprétés comme des homomorphismes.

2° L'ensemble $\mathfrak{L}''^0$ des centralisateurs des fibres de $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}(\mathfrak{L}^0(\mathcal{E}))$ dans les fibres de $\mathfrak{L}'^0(\mathcal{E}')$ est un sous-espace fibré de $\mathfrak{L}'^0(\mathcal{E}')$ invariant par transport parallèle relativement à ω'.

3° Si $\mathfrak{X}$ est simplement connexe, le groupe structural de $\mathcal{E}'$ peut être réduit à un sous-groupe connexe G'' de G' dont l'algèbre de Lie est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathfrak{L}'^0_x(\mathcal{E}')$ engendré par $\mathfrak{L}''^0_x$ et $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}(\mathfrak{L}^0(\mathcal{E}))$. C'est donc une conséquence du 2° et du fait que le sous-espace de $\mathfrak{L}'^0(\mathcal{E}')$ engendré par $\mathfrak{L}''^0$ et $\varphi_{\mathfrak{L}(\mathcal{E})}(\mathfrak{L}^0(\mathcal{E}))$ contient la courbure de ω' comme on peut le vérifier facilement à l'aide de la formule $\Delta'^2\theta=[\Omega(\omega'], \theta]$.

4° Si le centre de G est nul et si $\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ est un isomorphisme dans, le groupe G'' défini ci-dessus est un produit direct.

CHAPITRE VIII.

Théorèmes d'existence.

Introduction. — On considère, dans ce chapitre, un espace fibré $\tilde{\mathcal{E}}$ de base $\mathfrak{X}$ possédant les propriétés algébriques d'un espace de Lie, sans être cependant, *a priori*, l'espace de Lie d'un espace fibré principal différentiable à groupe structural. Dans le faisceau $\tilde{\mathrm{L}}$, déduit de $\tilde{\mathcal{E}}$, on se donne en outre un opérateur $\tilde{\Delta}$ et une section $\tilde{\Omega}$ de $\tilde{\mathrm{L}}^2$, liés à $\tilde{\mathcal{E}}$ par les axiomes énoncés au paragraphe 1 et soumis, entre eux, à l'identité de Bianchi :

$$\tilde{\Delta}\tilde{\Omega}=0.$$

Le problème qui se pose alors est celui de la construction d'un espace fibré

principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de groupe G (connexe), donné, dont l'espace de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ soit isomorphe à $\tilde{\mathcal{L}}$:

$$J : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \tilde{\mathcal{L}},$$

et qui possède de plus une connexion ω telle que

$$J \circ \Delta = \tilde{\Delta} \circ J \qquad \text{et} \qquad J(\Omega(\omega)) = \tilde{\Omega},$$

où Δ est, bien entendu, la L(E)-différentiation covariante associée à ω. Si ces conditions sont réalisées, nous dirons, pour simplifier que $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ admet $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$.

Les propriétés de $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ conduisent d'abord à définir une connexion $\underline{\underline{\omega}}$ dans l'espace $\mathcal{R}$ des repères de $\tilde{\mathcal{L}}^0$ ainsi qu'un homomorphisme P de $\tilde{\mathcal{L}}$ dans l'espace de Lie de $\mathcal{R}$ (§ 2, 3, 4 et 5). Lorsque le centre de G se réduit à l'élément neutre, on construit immédiatement l'espace cherché comme variété intégrale du champ normal $\Gamma(P(\tilde{\mathcal{L}}^0), \underline{\underline{\omega}})$ dont l'intégrabilité résulte des hypothèses faites sur $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Omega}$ (§ 6). Le problème se résout de la même façon pour le quotient de $\tilde{\mathcal{L}}$ par son centre.

Dans le cas général (§ 7), en utilisant le résultat précédent et en supposant $\mathcal{X}$ simplement connexe, on transforme le problème en la recherche d'un espace fibré principal $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ admettant $(\mathcal{L}(\mathcal{E}'), \Delta, \Omega)$, où $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ est obtenu en modelant l'espace fibré des formes différentielles à valeurs dans $\underline{G}$, sur un espace fibré principal $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_\gamma)$ dont le groupe structural est le quotient G_γ de G par son centre H et où Δ est la L(E')-différentiation covariante associée à une connexion ω' de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_\gamma)$. On détermine alors un homomorphisme σ du deuxième groupe d'homologie de $\mathcal{X}$ à coefficients entiers dans H. Pour donner une idée intuitive de cet isomorphisme, disons que, lorsqu'on considère une application différentiable :

$$\psi : S^2 \to \mathcal{X},$$

on ramène le problème à des espaces fibrés induits dont la base commune est la sphère S^2. En partageant cette dernière en deux hémisphères, on peut résoudre le problème sur chacun d'eux, mais il est en général impossible de trouver un G-isomorphisme permettant de raccorder les espaces et les connexions ainsi obtenus. Or la recherche d'un tel G-isomorphisme est précisément l'objet du chapitre VII. On peut en utiliser les résultats et déterminer de cette façon un élément du centre de G dont la trivialité est une condition nécessaire et suffisante de raccordement et qui, de plus, ne dépend que de la classe d'homotopie de ψ. On détermine alors σ en considérant toutes les applications ψ possibles et l'on montre que, pour que l'espace $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ existe, il faut et il suffit que σ soit trivial.

Pour terminer, et d'une façon comparable au paragraphe 5 du chapitre VII, on considère le cas où l'image du second groupe d'homologie de $\mathcal{X}$ par σ est un

sous-groupe de la composante connexe de l'identité de H et l'on cherche à modifier Ω pour se ramener à un cas résoluble. Comme au chapitre VII, on est amené à chercher une forme différentielle sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\underline{H}$ et admettant des périodes données dépendant de σ. Le cas où $\mathfrak{X}$ est compacte est évidemment le plus important.

Avant de développer ce que nous venons d'exposer, et tout à fait indépendamment, remarquons qu'étant donné un espace fibré principal topologique $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ muni successivement de deux structures d'espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}^1(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}^2(\mathfrak{X}, G)$, on passe d'une structure à l'autre par une translation à gauche G_m correspondant à une section continue de l'espace structural gauche $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$. En effet, soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des isomorphismes différentiables

$$a_x : \quad \mathcal{E}^1_x \to \mathcal{E}^2_x \qquad (x \in \mathfrak{X}),$$

tels que

$$a_x(y.s) = a_x(y).s \qquad (y \in \mathcal{E}^1_x,\ s \in G).$$

Comme, localement, on sait reconnaître un G-isomorphisme différentiable $a_U : \mathcal{E}^1_U \to \mathcal{E}^2_U$, on peut munir $\mathfrak{A}$ d'une structure d'espace fibré différentiable compatible avec sa structure d'espace fibré topologique. Mais $\mathfrak{A}$ est topologiquement isomorphe à $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ ([25]). Comme ce dernier possède une section continue (l'identité), il en est de même de $\mathfrak{A}$ et, en approchant cette dernière par une section différentiable, on détermine un G-isomorphisme différentiable de $\mathcal{E}^1$ sur $\mathcal{E}^2$ qui est bien une translation gauche.

1. Définition. — Soit $\tilde{\mathcal{L}}^0$ un espace fibré différentiable de base $\mathfrak{X}$ à fibre-algèbre de Lie. Nous supposons donc que $\mathcal{L}^0_x (x \in \mathfrak{X})$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\underline{G}$ d'un groupe de Lie connexe G, de dimension n et de centre H.

L'espace $\tilde{\mathcal{L}}$ des formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\tilde{\mathcal{L}}^0$ est muni des structures algébriques énumérées au paragraphe II.4. On peut d'ailleurs se ramener formellement aux notations qui y sont utilisées en considérant $\tilde{\mathcal{L}}^0$ comme associé à l'espace fibré principal $\mathcal{S}$ constitué par les isomorphismes

$$\tilde{\mathcal{L}}^0_x \to \underline{G} \qquad (x \in \mathfrak{X}),$$

espace fibré dont le groupe structural est le groupe des automorphismes de $\underline{G}$.

([25]) En effet, si l'on pose

$$a_x(y) = m_c.y \qquad (y \in \mathcal{E}_x,\ a_x \in \mathfrak{A} \text{ et } s \in G),$$

on a

$$\begin{aligned} a_x(y.s) &= a_x(y).s \\ &= m_x.(y.s), \end{aligned}$$

ce qui montre que la correspondance définie par la première égalité ($a_x \to m_c$) est un isomorphisme d'espaces fibrés topologiques entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$.

En d'autres termes, on peut poser $\tilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}(\mathfrak{S})$, $\mathfrak{L}$ étant alors l'espace fibré des formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\underline{G}$.

Définition VIII.1.1. — *Un opérateur de différentiation covariante* $\tilde{\Delta}$ *sera défini axiomatiquement dans le faisceau* $\tilde{L}$ *des sections différentiables de* $\tilde{\mathfrak{L}}$ *par la donnée d'un endomorphisme*

$$\tilde{\Delta} : \tilde{L} \to \tilde{L}$$

du faisceau d'espaces vectoriels sous-jacent à $\tilde{\mathfrak{L}}$, *et par la donnée d'une section* $\tilde{\Omega}$ *de* $\tilde{L}^2$, *lorsque cet endomorphisme et cette section possèdent les propriétés suivantes :*

1. $\tilde{\Delta}\tilde{L}^q \subset \tilde{L}^{q+1}$;
2. $\tilde{\Delta}[\theta, \theta'] = [\tilde{\Delta}\theta, \theta'] + (-1)^q[\theta, \tilde{\Delta}\theta']$ $\quad (\theta \in \tilde{L}^q$ et $\theta' \in \tilde{L})$;
3. $\tilde{\Delta}\alpha \wedge \theta = d\alpha \wedge \theta + (-1)^r \alpha \wedge \tilde{\Delta}\theta$ $\quad (\alpha \in F^r)$ [26];
4. $\tilde{\Delta}^2\theta = [\tilde{\Omega}, \theta]$ et $\tilde{\Delta}\tilde{\Omega} = 0$ (identités de Bianchi).

2. La connexion linéaire associée à $\tilde{\Delta}$. — Soit $\mathcal{R}$ l'espace des n-repères de $\tilde{\mathfrak{L}}^0$. Donnons-nous une section locale différentiable

$$\sigma : U \to \mathcal{R}$$

de $\mathcal{R}$ sur un ouvert $U \subset \mathfrak{X}$ homéomorphe à R^d, d étant comme d'habitude la dimension de $\mathfrak{X}$. Soit $\sigma(x) = (\rho_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ pour $x \in U$. Il résulte de la définition VIII.1.1 qu'on a

$$\tilde{\Delta}\rho_i = \sum_{j=1}^{n} \overline{\omega}^j{}_i \rho_j \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{VIII.2.1}$$

puisque, d'une part, $\tilde{\Delta}\rho_i$ est une section locale de $\tilde{L}^1$ d'après l'axiome 1 et que, d'autre part, toute section de $\tilde{L}^1$ peut se mettre sous la forme (VIII.2.1), où les $\overline{\omega}^i{}_j$ sont des formes différentielles ordinaires de degré 1, sur U (*voir* § II.1, rappel 2°). Considérons alors la matrice $(\overline{\omega}^i{}_j)$ comme une forme différentielle linéaire sur U à valeurs dans l'algèbre de Lie $\underline{Gl(n, R)}$ du groupe linéaire. Nous nous proposons d'exprimer, en fonction de cette matrice, celle qu'on obtient en substituant à σ une section locale

$$\sigma' : U \to \mathcal{R}$$

telle que

$$\sigma'(x) = \sigma(x).\mu(x) \qquad (x \in U),$$

avec

$$\mu(x) = (\mu^i{}_j) \in Gl(n, R).$$

---

[26] D'après les notations du chapitre II, F^r est le faisceau des formes différentielles ordinaires sur $\mathfrak{X}$.

Si l'on pose, dans ces conditions, $\sigma'(x)=(\rho'_i)(i=1,\ldots,n)$, on a

$$\rho'_i=\sum_{j=1}^{n}\mu^j{}_i\rho_j \qquad \text{ou} \qquad \rho_i=\sum_{j=1}^{n}\overset{-1}{\mu}{}^j{}_i\rho'_j.$$

Nous posons de plus

$$\tilde{\Delta}\rho'_i=\sum_{j=1}^{n}\bar{\omega}^{\prime j}{}_i\rho'_j.$$

En vertu de l'axiome 3 on a alors

$$\tilde{\Delta}\rho'_i=\sum_{j=1}^{n}(d\mu^j{}_i\rho_j+\mu^j{}_i\tilde{\Delta}\rho_j)=\sum_{j,h=1}^{n}(d\mu^h{}_i+\mu^j{}_i\bar{\omega}^h{}_j)\rho_h=\sum_{j,h,k=1}^{n}\left(d\mu^h{}_i\overset{-1}{\mu}{}^j{}_h+\mu^h{}_i\bar{\omega}^k{}_h\overset{-1}{\mu}{}^j{}_k\right)\rho'_j.$$

En comparant ce résultat à l'expression de $\tilde{\Delta}\rho'_i$, il vient

$$\bar{\omega}^{\prime j}{}_i=\sum_{h,k=1}^{n}\left(d\mu^h{}_i\overset{-1}{\mu}{}^j{}_h+\mu^h{}_i\bar{\omega}^k{}_h\overset{-1}{\mu}{}^j{}_k\right) \qquad (i,j=1,\ldots,n).$$

Il suffit alors de se reporter au paragraphe III.1 et plus spécialement à la formule (III.1.3) pour voir que :

1° Il existe sur $\mathcal{R}$ une forme différentielle linéaire à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathrm{Gl}(n,\mathrm{R})$, notée $(\omega^i{}_j)$, dont la restriction à une section locale quelconque $\sigma=(\rho_i)$ de $\mathcal{R}$ coïncide avec la matrice $(\bar{\omega}^i{}_j)$ définie par l'égalité (VIII.2.1).

2° Que la matrice $\underline{\underline{\omega}}=(\omega^i{}_j)$ définit une connexion linéaire sur $\mathcal{R}$. Cette connexion $\underline{\underline{\omega}}$ sera dite associée $\tilde{\Delta}$.

Remarquons que nous n'avons pas, pour l'instant, fait usage des axiomes 2 et 4, et que ce que nous venons de faire n'est pas essentiellement différent des méthodes anciennement utilisées pour définir les connexions linéaires (par exemple E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*). Ce qui précède est donc valable pour un espace fibré différentiable à fibre uniquement vectorielle satisfaisant à 1 et à 3.

On notera $\mathfrak{L}_n(\mathcal{R})$ l'espace de Lie de $\mathcal{R}$ et $\mathrm{L}_n(\mathrm{R})$ sera le faisceau des sections différentiables de $\mathfrak{L}_n(\mathcal{R})$. La $\mathrm{L}_n(\mathrm{R})$-différentiation covariante associée à $\underline{\underline{\omega}}$ sera notée $\underline{\underline{\Delta}}$. Quant à la $\tilde{\mathrm{L}}$-différentiation covariante également associée à $\underline{\underline{\omega}}$, elle coïncide avec $\tilde{\Delta}$ d'après la formule (VIII.2.1), nous n'introduirons donc pas de nouveau symbole pour la désigner.

3. Le tenseur fondamental. — A tout repère $\rho=(\rho_i)\in\mathcal{R}_x$ correspondent des constantes de structure de la fibre $\mathfrak{L}^0_x$ correspondante. Ces « constantes » sont d'ailleurs des fonctions $c^i{}_{jk}$ sur $\mathcal{R}$ qui se transforment par un changement de repère comme les composantes d'un tenseur deux fois covariant et une fois

contravariant sur $\mathcal{R}$. Ce tenseur, noté c, sera appelé le *tenseur fondamental* de $\tilde{\mathcal{L}}$. Ses principales propriétés sont liées à l'axiome 2. En effet, par rapport à une section locale (ρ_i) de $\mathcal{R}$, on a

$$[\rho_i, \rho_j] = \sum_{k=1}^{n} c^k{}_{ij}\rho_k \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

L'application de la deuxième règle de différentiation covariante à cette égalité donne, quelles que soient les valeurs des indices i et $j (i, j = 1, \ldots, n)$:

$$\tilde{\Delta}[\rho_i, \rho_j] = [\tilde{\Delta}\rho_i, \rho_j] + [\rho_i, \tilde{\Delta}\rho_j] = \sum_{h=1}^{n} ([\overline{\omega}^h{}_i\rho_h, \rho_j] + [\rho_i, \overline{\omega}^h{}_j\rho_h])$$

$$= \sum_{h=1}^{n} (\overline{\omega}^h{}_i[\rho_h, \rho_j] + \overline{\omega}^h{}_j[\rho_i, \rho_h]) = \sum_{h,k=1}^{n} (c^k{}_{hj}\overline{\omega}^h{}_i + c^k{}_{ih}\overline{\omega}^h{}_j)\rho_k.$$

La règle 3 donne, par ailleurs

$$\tilde{\Delta}[\rho_i, \rho_j] = \sum_{h,k=1}^{n} (dc^k{}_{ij} + c^h{}_{ij}\overline{\omega}^k{}_h)\rho_k.$$

En rapprochant ces deux dernières égalités, il vient

$$dc^k{}_{ij} + \sum_{h=1}^{n} c^h{}_{ij}\overline{\omega}^k{}_h - \sum_{h=1}^{n} c^k{}_{hj}\overline{\omega}^h{}_i - \sum_{h=1}^{n} c^k{}_{ih}\overline{\omega}^h{}_j = 0, \tag{VIII.3.1}$$

avec $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Notons alors $\mathcal{L}_{2,1}(\mathcal{R})$ l'espace fibré des formes différentielles tensorielles sur $\mathcal{R}$ une fois covariante et deux fois contravariantes. La formule (VIII.3.1) montre que le tenseur de composantes $c^i{}_{jk}$ est à différentielle covariante nulle pour la $\mathrm{L}_{2,1}(\mathrm{R})$-différentiation covariante associée à la connexion $\underline{\underline{\omega}}$.

Proposition VIII.3.1. — *Le tenseur fondamental de $\tilde{\mathcal{L}}$ est à différentielle covariante nulle.*

4. Le centre de $\tilde{\mathcal{L}}^0$. — Soit $\tilde{\mathcal{K}}^0$ le centre de $\tilde{\mathcal{L}}^0$ et $\tilde{\mathcal{K}}^p$ le sous-espace de $\mathcal{L}^p$ engendré par $\tilde{\mathcal{K}}^0$. Le faisceau des sections différentiables de $\tilde{\mathcal{K}}^p$ étant naturellement noté $\tilde{\mathrm{K}}^p$, le faisceau $\tilde{\mathrm{K}} = \bigcup_{p=1,\ldots,d} \tilde{\mathrm{K}}^p$ est stable pour $\tilde{\Delta}$ car la formule $\tilde{\Delta}[\theta, \theta'] = [\tilde{\Delta}\theta, \theta'] + (-1)^p[\theta, \tilde{\Delta}\theta']$ montre que si $\theta \in \tilde{\mathrm{K}}$ (ce qui entraîne $[\theta, \theta'] = [\theta, \tilde{\Delta}\theta'] = 0$), on a également $[\tilde{\Delta}\theta, \theta'] = 0$. Il en résulte que $\mathcal{K}^0$ est invariant par le transport parallèle associé à $\underline{\underline{\omega}}$ et que, par suite, le champ définissant le transport parallèle dans $\tilde{\mathcal{L}}_0$ induit, dans $\tilde{\mathcal{K}}^0$, un champ (Γ) transversal aux fibres. Soit $(\rho_a)(a = 1, \ldots, p)$ une section locale de l'espace des

p-repères de $\tilde{\mathcal{K}}^0$, dont les fibres sont supposées de dimension p. Par rapport à ces repères, tout vecteur γ de $\tilde{\mathcal{K}}^0$ s'écrit

$$\gamma = \sum_{a=1}^{p} \gamma^a \rho_a.$$

et, en posant

$$\tilde{\Delta}\rho_a = \sum_{b=1}^{p} \bar{\omega}^b{}_a \rho_b,$$

il vient

$$\tilde{\Delta}\gamma = \sum_{a,b=1}^{n} (d\gamma^a + \gamma^b \bar{\omega}^a{}_b)\rho_a.$$

Le champ (Γ) est alors défini par le système de Pfaff :

$$\eta_i{}^a = d\gamma_i{}^a + \sum_{b=1}^{p} \gamma^b \bar{\omega}^a{}_b = 0 \qquad (a = 1, \ldots, p).$$

Nous allons voir que ce champ est complètement intégrable. Dans ce but, nous allons calculer la différentielle de $\eta_i{}^a$:

$$d\eta_i{}^a = \sum_{b=1}^{p} (d\gamma^b \wedge \bar{\omega}^a{}_b + \gamma^b\, d\bar{\omega}^a{}_b).$$

Mais, comme ρ_a est une section de K^0, la quatrième condition de la définition VIII.1.1 montre qu'on a

$$\tilde{\Delta}^2 \rho_a = [\tilde{\Omega}.\rho_a] = 0.$$

Un calcul rapide permet alors de transformer cette égalité en

$$d\bar{\omega}^a{}_b - \sum_{c=1}^{p} \bar{\omega}^c{}_b \wedge \bar{\omega}^a{}_c = 0.$$

En revenant alors à $d\eta_i{}^a$, il vient

$$d\eta_i{}^a = \sum_{b=1}^{p} (d\gamma^b \wedge \bar{\omega}^a{}_b + \sum_{c=1}^{p} \gamma^b \bar{\omega}^c{}_b \wedge \bar{\omega}^a{}_c) = \sum_{b=1}^{p} (d\gamma^b + \sum_{c=1}^{p} \gamma^c \bar{\omega}^b{}_c) \wedge \bar{\omega}^a{}_b.$$

Et, en définitive

$$d\eta_i{}^a = \sum_{b=1}^{p} \eta_i{}^b \wedge \bar{\omega}^a{}_b,$$

égalité qui montre que la condition d'intégrabilité de Frobenius est vérifiée. Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION VIII.4.1. — *Le centre $\tilde{\mathcal{K}}^0$ de $\tilde{\mathcal{L}}^0$ est invariant par transport*

parallèle relativement à $\underline{\underline{\omega}}$. *Le champ définissant de transport parallèle dans* $\tilde{\mathcal{K}}^0$ *est intégrable. Il en résulte que si* $\mathfrak{X}$ *est simplement connexe,* $\tilde{\mathcal{K}}^0$ *est un espace fibré trivial.*

Il résulte en particulier de cette proposition qu'il est possible de faire le quotient de $\tilde{\mathcal{L}}$ par $\tilde{\mathcal{K}}$. Nous poserons $\tilde{\mathcal{L}}' = \tilde{\mathcal{L}}/\tilde{\mathcal{K}}$ et nous noterons

$$\gamma_{\tilde{\mathcal{L}}} : \quad \tilde{\mathcal{L}} \to \tilde{\mathcal{L}}'.$$

l'homomorphisme canonique qui en résulte. $\tilde{\Delta}$ passe au quotient sous la notation $\tilde{\Delta}'$ et l'on pose $\tilde{\Omega}' = \gamma_{\tilde{\mathcal{L}}}(\tilde{\Omega})$.

5. Homomorphisme adjoint. — Soit $\eta \in \tilde{\mathcal{L}}_x$ et $\mathrm{P}(\eta)$ l'application linéaire de $\tilde{\mathcal{L}}_x$ dans lui-même qui fait correspondre la forme $[\eta, \theta]$ à tout élément $\theta \in \tilde{\mathcal{L}}_x$. Explicitement, si pour un repère $(\rho_i) \in \mathcal{R}_x$, on a

$$\eta = \sum_{j=1}^{n} \eta^j \rho_j,$$

on pose

$$\mathrm{P}(\eta) = \sum_{i,j,k=1}^{n} c^k{}_{ij} \eta^i (\rho^j \otimes \rho_k),$$

de sorte que P applique $\tilde{\mathcal{L}}$ dans l'espace de Lie $\mathfrak{L}_n(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$.

Proposition VIII.5.1. — *On a les deux égalités*

$$\mathrm{P} \circ \tilde{\Delta} = \underline{\underline{\Delta}} \circ \mathrm{P} \qquad \text{et} \qquad \Omega(\underline{\underline{\omega}}) = \mathrm{P}(\tilde{\Omega}).$$

En effet, d'une part

$$\underline{\underline{\Delta}}\,\mathrm{P}(\eta_l) = \sum_{j,k=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{n} (dc^k{}_{lj} \eta^l + c^k{}_{lj}\, d\eta^l) + \sum_{i,h=1}^{n} \overline{\omega}^k{}_h c^h{}_{ij} \eta^i - \sum_{i,h=1}^{n} \overline{\omega}^h{}_j c^k{}_{ih} \eta^i \right] (\rho^j \otimes \rho_k)$$

et, d'autre part

$$\mathrm{P}(\tilde{\Delta}\eta_l) = \sum_{j,k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} c^k{}_{ij}\, d\eta^l + \sum_{i,l=1}^{n} \overline{\omega}^i{}_l c^k{}_{ij} \eta^l \right] (\rho^j \otimes \rho_k).$$

La démonstration de la première formule de la proposition se transforme donc en la vérification de l'égalité suivante :

$$\sum_{i,l=1}^{n} c^k{}_{ij}\, d\eta^i + c^k{}_{ij} \overline{\omega}^i{}_l \wedge \eta^l) = \sum_{i,h=1}^{n} (dc^k{}_{ij} \wedge \eta^i + c^k{}_{ij}\, d\eta^i + \overline{\omega}^k{}_h c^h{}_{ij} \wedge \eta^i - \overline{\omega}^h{}_i c^k{}_{jh} \wedge \eta^j),$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{n} \eta^i \wedge \left(dc^k{}_{ij} + \sum_{h=1}^{n} \overline{\omega}^k{}_h c^h{}_{ij} - \sum_{h=1}^{n} \overline{\omega}^h{}_i c^k{}_{hj} - \sum_{h=1}^{n} \overline{\omega}^h{}_j c^k{}_{ih} \right) = 0.$$

Or, les seconds facteurs de cette égalité sont nuls d'après (VIII.3.1). La première partie de la proposition est donc démontrée. Reste la deuxième formule. Or, en notant comme d'habitude A.Z le transformé de $Z \in \tilde{\mathcal{L}}_x$ par $A \in \mathcal{L}_n(\mathcal{R})$, on a d'une part

$$\tilde{\Delta}^2 X = [\tilde{\Omega}, X] = P(\tilde{\Omega}).X \qquad (X \in \tilde{L}),$$

à cause de la condition 4 à laquelle $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Omega}$ sont soumis, et d'autre part

$$\tilde{\Delta}^2 X = \Omega(\underline{\underline{\omega}}).X$$

parce que $\tilde{\Delta}$ est la $\tilde{L}$-différentiation covariante associée à la connexion $\underline{\underline{\omega}}$ comme nous l'avons vu au paragraphe VIII.2. De ces deux égalités, on déduit immédiatement :

$$P(\tilde{\Omega}) = \Omega(\underline{\underline{\omega}}).$$

On peut alors énoncer :

Proposition VIII.5.1. —*Le champ normal* $\Gamma\big(P(\tilde{\mathcal{L}}^0), \underline{\underline{\omega}}\big)$ *est intégrable.*

En effet, la proposition VIII.5.1 montre que $P(\tilde{L})$ est stable pour $\underline{\underline{\Delta}}$ et contient la courbure $\Omega(\underline{\underline{\omega}})$.

6. Existence d'un espace fibré principal admettant $(\tilde{\mathcal{L}}', \tilde{\Delta}', \tilde{\Omega}')$. — Rappelons que nous nous sommes donnés un groupe de Lie G dont l'algèbre est isomorphe à la fibre-type de $\tilde{\mathcal{L}}^0$. Lorsque $\mathcal{X}$ est simplement connexe, l'existence d'un espace fibré principal différentiable de groupe structural $G_x = G/H$ (H = centre de G) admettant $(\tilde{\mathcal{L}}', \tilde{\Delta}', \tilde{\Omega}')$ est une conséquence immédiate de la proposition VIII.5.1. Pour obtenir un résultat plus précis, il est cependant nécessaire de fixer quelques notations.

Choisissons un point x de $\mathcal{X}$ et un isomorphisme $j : \tilde{\mathcal{L}}^0_x \to \underline{G}$. Soit $\mathcal{E}'$ la variété intégrale de $\Gamma\big(P(\tilde{\mathcal{L}}^0), \underline{\underline{\omega}}\big)$ qui passe par un repère ρ appartenant à la fibre $\mathcal{R}_x$ de $\mathcal{R}$. Nous désignerons par $f = (f_i)(i = 1, \ldots, n)$ le repère de $\underline{G}$, image de ρ par j, c'est-à-dire, si $\rho = (\rho_i)(i = 1, \ldots, n)$, le repère constitué par les vecteurs $f_i = j(\rho_i)(i = 1, \ldots, n)$.

Nous savons que $\mathcal{E}'$ est un sous-espace fibré différentiable de $\mathcal{R}$ et que son groupe structural G′ est un sous-groupe de $Gl(n, R)$ (groupe structural de $\mathcal{R}$) dont l'algèbre de Lie $\underline{G'}$ est la sous-algèbre $j_{\mathcal{L}_n}(\rho)P(\tilde{\mathcal{L}}^0_x)$ de $\underline{Gl(n, R)}$. Or, le diagramme

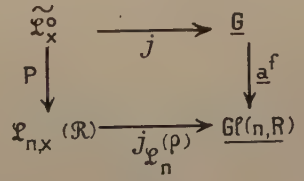


Fig. 13.

est commutatif à cause du choix de f, On a donc

$$j_{\mathcal{L}_n}(\rho)\mathrm{P}(\tilde{\mathcal{L}}^0_x) = \underline{a}'(\underline{\mathrm{G}}). \tag{VIII.6.1}$$

Soit G'_0 la composante connexe de l'élément neutre de G'. Puisque G est connexe par hypothèse et que $\underline{\mathrm{G}}' = j_{\mathcal{L}_n}(\rho)\mathrm{P}(\tilde{\mathcal{L}}^0_x)$, l'égalité (VIII.6.1) montre que $\mathrm{G}'_0 = a'(\mathrm{G})$. Isomorphe au groupe adjoint, G'_0 opère donc sur $\underline{\mathrm{G}}$ comme groupe d'automorphisme. D'autre part, l'espace d'holonomie $\mathfrak{T}(\underline{\underline{\omega}})$ laisse le tenseur c invariant parce que ce dernier est à dérivée covariante nulle. Il en résulte que le groupe $j_{\mathcal{H}_n}(\rho)\mathfrak{R}_x(\underline{\underline{\omega}})$ opère sur $\underline{\mathrm{G}}$ comme groupe d'automorphismes également. Comme G' est d'après la proposition V.6.3, engendré par G'_0 et par $j_{\mathcal{H}_n}(\rho)\mathfrak{R}_x(\underline{\underline{\omega}})$, ses opérations sur l'algèbre de Lie $\underline{\mathrm{G}}$ sont des automorphismes. En notant $\mathcal{C}$ l'espace fibré des formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\underline{\mathrm{G}}$, on peut donc former $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ qui est évidemment isomorphe à $\tilde{\mathcal{C}}$ tandis que l'espace de Lie de $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ est isomorphe au quotient de $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ par son centre, c'est-à-dire à $\tilde{\mathcal{L}}/\tilde{\mathcal{K}}$. D'autre part, on a vu que $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Delta}'$ étaient associées, l'une et l'autre, à $\underline{\underline{\omega}}$. Cette dernière induit donc sur $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ une connexion ω' à laquelle $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Delta}'$ continuent à être associées. Nous résumerons ce qui précède dans le théorème :

Théorème VIII.6.1. — *Étant donnés $\tilde{\mathcal{C}}$, $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Omega}$ satisfaisant aux conditions de la définition* VIII.1.1, *il existe un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ de groupe structural* G' *et de base $\mathfrak{X}$, possédant les propriétés suivantes :*

1° G' *est un groupe d'automorphismes de* $\underline{\mathrm{G}}$ *dont la composante connexe est isomorphe à* G/H (H = centre de G).

2° $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ *est isomorphe à* $\tilde{\mathcal{C}}$ *et l'espace de Lie* $\mathcal{L}'(\mathcal{E}')$ *de* $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ *est isomorphe au quotient de* $\tilde{\mathcal{C}}$ *par son centre.*

3° $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}')$ *admet une connexion* ω' *telle que les* L(E')- *et* L'(E')-*différentiations covariantes associées à* ω' *s'identifient à* $\tilde{\Delta}$ *et à* $\tilde{\Delta}'$ *respectivement, tandis que la courbure* $\Omega(\omega')$ *s'indentifie à* $\tilde{\Omega}'$.

Remarque. — Si la variété $\mathfrak{X}$ est simplement connexe, $\mathfrak{T}(\underline{\underline{\omega}})$ est à fibres connexes, G' est donc connexe et isomorphe à G/H.

7. Cas général. — Nous supposons essentiellement dans ce paragraphe que la variété $\mathfrak{X}$ est simplement connexe. En tenant compte à la fois du théorème VIII.6.1 et de la remarque précédente, on peut alors envisager la question de la façon suivante :

Soit $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}_\gamma)$ un espace fibré principal différentiable de groupe structural $\mathrm{G}_\gamma = \mathrm{G}/\mathrm{H}$, où G est un groupe de Lie connexe de centre H. Nous considérons une connexion ω' sur $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, \mathrm{G}_\gamma)$ à laquelle sont associées les L(E')- et L'(E')-

différentiations covariantes Δ et Δ'. Enfin, soit Ω une section de $L^2(E')$ telle qu'on ait

$$\text{(VIII.7.1)} \qquad \begin{cases} \gamma_{L(E')}(\Omega) = \Omega(\omega'), \\ \Delta\Omega = 0, \end{cases}$$

où $\gamma_{L(E')}$ est l'homomorphisme canonique de $L(E')$ sur $L'(E')$. Existe-t-il, dans ces conditions, un espace fibré principal différentiable de base $\mathfrak{X}$ et de groupe G, admettant $(\mathfrak{L}(\mathfrak{E}'), \Delta, \Omega)$. En d'autres termes, existe-t-il un espace fibré principal différentiable $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$, un homomorphisme

$$\gamma_{\mathfrak{E}} : \quad \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}'$$

compatible avec l'homomorphisme canonique $\gamma : G \to G_{\cdot\cdot} = G/H$, et une connexion ω de $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ tels que

$$\gamma_{C(E)}(\omega) = \omega' \qquad \text{et} \qquad \Omega(\omega) = \Omega,$$

expressions qui ont un sens parce que le couple d'homomorphismes compatibles $(\gamma, \gamma_{\mathfrak{E}})$ détermine un homomorphisme $\gamma_{C(E)} : C(E) \to C'(E')$, tandis que $\gamma_{\mathfrak{E}}$ permet d'*identifier* $\mathfrak{L}(\mathfrak{E})$ *et* $\mathfrak{L}(\mathfrak{E}')$.

Le cas abélien montre qu'en général, ce problème n'admet pas de solution. En effet, supposons que G soit le groupe abélien simplement connexe de dimension n, c'est-à-dire R^n. Si $\mathfrak{E}$ existe, il est donc trivial et, quelle que soit la connexion choisie sur $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$, sa courbure, considérée comme une forme différentielle sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\underline{G}$, est homologue à o. On le vérifie immédiatement en considérant une section de $\mathfrak{E}$ et la restriction à cette section de la forme de connexion et de la forme de courbure (réciproquement, *voir* prop. VII.6.2). Or, toute 2-forme différentielle fermée à valeurs dans $\underline{G}$ est à différentielle covariante nulle mais n'est pas nécessairement homologue à o. Même dans le cas abélien, si le deuxième groupe d'homologie de $\mathfrak{X}$ n'est pas nul le problème n'admet donc pas de solution en général.

Aussi est-ce une condition d'existence que nous allons chercher à exprimer. Dans ce but, nous nous proposerons tout d'abord d'essayer, à l'aide des données précédentes, d'associer à tout lacet de $\mathfrak{X}$, un élément de $\mathfrak{M}(\mathfrak{E}')$.

Soit $l_x : S^1 \to \mathfrak{X}$ un lacet en $x \in \mathfrak{X}$, c'est-à-dire une application différentiable du cercle S^1, muni d'une origine $O[l_x(O) = x]$ et paramétré régulièrement par $\alpha : I \to S^1[\alpha(o) = \alpha(1) = O]$, dans $\mathfrak{X}$.

Plongeons S^1 dans une variété Q différentiablement homéomorphe à R^2, et soit

$$\nu : \quad Q \to \mathfrak{X},$$

une extension différentiable de l_x, extension dont l'existence résulte du fait que $\mathfrak{X}$ a été supposée simplement connexe, Dans ces conditions, nous dirons que le lacet l_x est obturé par ν, ou encore, que l'application ν est une obturation de l_x.

Nous définirons alors un élément $m(l_x, \nu) \in \mathfrak{M}_x(\mathscr{E}')$ en posant $\mathscr{E}_Q = \mathrm{R}^2 \times \mathrm{G}$ et en choisissant :

1° Un γ-homomorphisme

$$\gamma_{\mathscr{E}_Q} : \quad \mathscr{E}_Q \to \mathscr{E}'_\nu = \nu^{-1}(\mathscr{E}'),$$

dont l'existence est assurée puisque $\mathscr{E}'_\nu$, de base Q, est trivial.

2° Une connexion ω_Q de $\mathscr{E}_Q$ telle que

$$\text{(VIII.7.2)} \qquad \begin{cases} \gamma_{c_Q(\mathrm{E}_Q)}(\omega_Q) = \omega'_\nu, \\ \Omega(\omega_Q) = \Omega_\nu, \end{cases}$$

où $\gamma_{c_Q(\mathrm{E}_Q)}$ est l'homomorphisme associé à $(\gamma, \gamma_{\mathscr{E}_Q})$, où ω'_ν est la connexion induite par ν à partir de ω' et où Ω_ν est la section de $\mathscr{L}^2_\nu(\mathscr{E}'_\nu)$ induite à partir de Ω[27]. En considérant S^1 comme un lacet en O dans Q, on pose alors

$$m(l_x, \nu) = \nu^{\#}_{\mathfrak{M}(\mathscr{E}')}(\tau_{\omega_Q}(\mathrm{S}^1)).$$

En d'autres termes, $m(l_x, \nu)$ est l'élément de $\mathfrak{M}_x(\mathscr{E}')$, image par l'homomorphisme induit $\nu^{\#}_{\mathfrak{M}(\mathscr{E}')}$ de la transformation associée au lacet S^1. Cette dernière est un élément de l'espace structural gauche $\mathfrak{M}_Q(\mathscr{E}_Q)$ de $\mathscr{E}_Q$, mais le γ-homomorphisme $\gamma_{\mathscr{E}_Q}$ permet d'identifier $\mathfrak{M}_Q(\mathscr{E}_Q)$ à l'espace induit $\mathfrak{M}_\nu(\mathscr{E}'_\nu) = \nu^{-1}(\mathfrak{M}(\mathscr{E}'))$. C'est cette identification qui donne un sens à l'expression de $m(l_x, \nu)$. Remarquons tout de suite que $m(l_x, \nu)$ ne dépend pas de l'extension de ν à l'extérieur du cercle S^1. De plus, on a le :

Lemme 1. — *$m(l_x, \nu)$ ne dépend ni du choix de $\gamma_{\mathscr{E}_Q}$, ni de celui de la connexion ω_Q vérifiant les conditions* (VIII.7.2).

En effet, soit

$$\bar{\gamma}_{\mathscr{E}_Q} : \quad \mathscr{E}_Q \to \mathscr{E}'_\nu,$$

un autre γ-homomorphisme et soit $\bar{\omega}_Q$ une connexion sur $\mathscr{E}_Q$ satisfaisant aux deux égalités

$$\text{(VIII.7.2')} \qquad \begin{cases} \bar{\gamma}_{c_Q(\mathrm{E}_Q)}(\bar{\omega}_Q) = \omega'_\nu, \\ \Omega(\bar{\omega}_Q) = \Omega_\nu. \end{cases}$$

Compte tenu des identifications liées à $\gamma_{\mathscr{E}_Q}$ et à $\bar{\gamma}_{\mathscr{E}_Q}$, il résulte des identités (VIII.7.2) et (VIII.7.2') que l'identité sur $\mathfrak{M}_\nu(\mathscr{E}'_\nu)$, à laquelle est associée l'identité sur $\mathscr{L}^2_\nu(\mathscr{E}'_\nu)$, est un automorphisme de l'espace structural gauche de $\mathscr{E}_Q(\mathrm{Q}, \mathrm{G})$ satisfaisant aux conditions du théorème VI.2.1. Le lemme 1 de ce

---

(27) $\mathscr{L}^2_\nu(\mathscr{E}'_\nu)$ est défini soit comme le modelé sur $\mathscr{E}'_\nu$ de l'espace fibré des formes différentielles sur Q à valeurs dans G, soit comme l'espace fibré des formes différentielles sur Q à valeurs dans $\mathscr{L}^0_\nu(\mathscr{E}'_\nu) = \nu^{-1}(\mathscr{L}^0(\mathscr{E}'))$

théorème, appliqué à ce cas particulier, montre que $\tau_{\omega_0}(S^1)$, identifié à un élément de $\mathfrak{M}_\nu(\mathscr{E}'_\nu)$, grâce à $\gamma_{\mathscr{E}_0}$, est égal à $\tau_{\bar{\omega}_0}(S^1)$ identifié à un élément de $\mathfrak{M}_\nu(\mathscr{E}'_\nu)$, grâce à $\gamma_{\mathscr{E}_0}$. C'est précisément ce qu'il s'agissait de montrer. Nous dirons alors que $m(l_x, \nu)$ est associé au lacet l_x et à son obturation ν.

Corollaire 1 du lemme 1. — *S'il existe un espace fibré principal* $\mathscr{E}(\mathfrak{X}, G)$ *et une connexion* ω *répondant aux conditions du problème, on a*

$$m(l_x, \nu) = \tau_\omega(l_x).$$

En effet, comme $\nu^{-1}(\mathscr{E})$ s'identifie à $Q \times G$, c'est là une conséquence immédiate de l'unicité de $m(l_x, \nu)$.

Corollaire 2 du lemme 1. — *On a l'égalité*

$$\gamma_{\mathfrak{M}(\mathscr{E}')}(m(l_x, \nu)) = \tau_{\omega'}(l_x).$$

En effet, il est clair que $\gamma_{\mathfrak{M}(\mathscr{E}')}(m(l_x, \nu))$ est l'élément de $\mathfrak{M}'_x(\mathscr{E}')$ associé à l_x et à ω lorsque $\mathscr{E}'(\mathscr{E}')$ est muni de la différentiation covariante Δ' associée à ω' et de la courbure $\Omega(\omega')$. D'après le corollaire précédent, cet élément est égal à $\tau_{\omega'}(l_x)$.

Considérons maintenant une application différentiable

$$\psi : \quad S^2 \to \mathfrak{X}$$

de la sphère orientée S^2 dans $\mathfrak{X}$. Soit Γ un grand cercle de S^2 paramétré régulièrement par $\alpha(t)$ à partir d'une origine $O[\alpha(1) = \alpha(0) = o]$. L'orientation de S^2 et l'orientation de Γ résultant du paramétrage permettent de distinguer un hémisphère positif H^+ et un hémisphère négatif H^-. Soient Q^+ et Q^- deux voisinages ouverts de H^+ et de H^- limités par des cercles Σ_1 et Σ_2. Nous pouvons considérer la restriction ψ_Q de ψ à Q ($Q = Q^+$ ou Q^-) comme une obturation du lacet ψ_Γ constitué lui-même par la restriction de ψ à Γ. Nous poserons

$$m_+ = m(\psi_\Gamma, \psi_{Q^+}), \qquad m_- = m(\psi_\Gamma, \psi_{Q^-})$$

et nous dirons que (m_+, m_-) est le couple de transformations associé à l'ensemble (O, Γ, ψ). Comme $m(l_x, \nu)$ ne dépend pas de l'extension de ν hors du cercle S^1, il est clair que le couple (m_+, m_-) ne dépend pas du choix des voisinages Q. De plus, en se reportant au corollaire 2 du lemme 1, on voit que $m_+(m_-)^{-1}$ fait partie du centre de $\mathfrak{M}(\mathscr{E}')$. Comme ce dernier est trivial et canoniquement isomorphe à $\mathfrak{X} \times H$, nous poserons

$$s(O, \Gamma, \psi) = m_+(m_-)^{-1}$$

et nous considérerons $s(O, \Gamma, \psi)$ comme appartenant au centre H de G.

Interprétation de $s(O, \Gamma, \psi)$. — Posons $\mathscr{E}'_\psi = \psi^{-1}(\mathscr{E}')$; $\mathfrak{M}_\psi(\mathscr{E}'_\psi) = \psi^{-1}(\mathfrak{M}(\mathscr{E}'))$,

$\mathfrak{M}'_\psi(\mathcal{E}'_\psi) = \psi^{-1}(\mathfrak{M}'(\mathcal{E}'))$, $\mathcal{L}^0_\psi(\mathcal{E}'_\psi) = \psi^{-1}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}'))$ et notons $\mathcal{L}_\psi(\mathcal{E}'_\psi)$ l'espace fibré des formes différentielles sur S^2 à valeurs dans $\mathcal{L}^0_\psi(\mathcal{E}'_\psi)$. La connexion induite par ψ à partir de ω' sera désignée par ω'_ψ et la section de $\mathcal{L}_\psi(\mathcal{E}'_\psi)$ induite à partir de Ω, par Ω_ψ. En revenant à la définition de $m(l_x, \nu)$, on est amené à poser

$$\mathcal{E}_Q = Q \times G, \qquad \mathcal{E}'_{\psi_Q} = \mathcal{E}'_\psi \mid Q \qquad (Q = Q^+ \text{ ou } Q^-)$$

et à désigner par ω'_{ψ_Q} et Ω_{ψ_Q} les restrictions de ω'_ψ et Ω_ψ à $Q (Q = Q^+$ ou $Q^-)$. Toujours d'après cette définition, on choisit deux γ-homomorphismes

$$\gamma_{\mathcal{E}_Q} : \quad \mathcal{E}_Q \to \mathcal{E}'_{\psi_Q} \qquad (Q = Q^+ \text{ ou } Q^-).$$

L'élément $m (m = m_+$ ou $m_-)$ est alors (à un homomorphisme induit près), égal à la transformation associée à Γ (lacet en O dans Q) lorsque $\mathcal{E}_Q$ est muni d'une connexion ω_Q telle que

$$\gamma_{C_Q(E_Q)}(\omega_Q) = \omega'_{\psi_Q} \qquad \text{et} \qquad \Omega(\omega_Q) = \Omega_{\psi_Q}.$$

On désignera enfin par Z l'intersection $Z = Q^+ \cap Q^-$ et les restrictions à Z des éléments définis sur Q^+ et Q^- seront notés en substituant à Q^+ et Q^- les symboles Z^+ et Z^- :

$$\mathcal{E}_{Z^+} = \mathcal{E}_{Q^+} \mid Z, \qquad \omega_{Z^+} = \omega_{Q^+} \mid Z, \qquad \mathcal{E}'_{\psi_Z} = \mathcal{E}'_\psi \mid Z, \qquad \omega'_{\psi_Z} = \omega'_\psi \mid Z.$$

En nous reportant au paragraphe VII.4, et en considérant les espaces et connexions $\mathcal{E}_{Z^+}$, ω_{Z^+} d'une part, $\mathcal{E}_{Z^-}$, ω_{Z^-} d'autre part, nous voyons que nous sommes exactement dans la situation de la proposition VII.4.1 et qu'en notant α la *classe d'homotopie de* Γ *dans* Z, on a

$$s(O, \Gamma, \psi) = \chi_0(\alpha).$$

Comme le groupe d'homotopie de Z en dimension 1 est engendré par Γ, la trivialité de $s(O, \Gamma, \psi)$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un G-isomorphisme de $\mathcal{E}_{Z^+}$ sur $\mathcal{E}_{Z^-}$ appliquant ω_{Z^+} sur ω_{Z^-} et induisant l'identité sur $\mathcal{E}'_{\psi_Z}$. En d'autres termes, c'est une condition nécessaire et suffisante de raccordement de $\mathcal{E}_{Q^+}$, ω_{Q^+} et $\mathcal{E}_{Q^-}$, ω_{Q^-} sur Z.

Il résulte de cette interprétation que si Γ' est un cercle homotope à Γ dans Z, on a $s(O, \Gamma', \psi) = s(O, \Gamma, \psi)$, En particulier, $s(O, \Gamma, \psi)$ ne dépend pas du choix de O sur Γ. Nous allons voir maintenant qu'en fait, $s(O, \Gamma, \psi)$ ne dépend ni de O, ni de Γ, mais uniquement de la classe d'homotopie de ψ.

Soit

$$\varphi : \quad S^2 \times I' \to \mathfrak{X}$$

une application différentiable telle que $\varphi(x, o) = \psi(x) (x \in S^2)$. Nous posons naturellement

$$\varphi(x, t) = \psi_t(x)$$

et nous nous intéressons plus spécialement à ψ_1. Il est malheureusement nécessaire de préciser encore quelques notations. On pose $\mathscr{E}'_\varphi = \varphi^{-1}(\mathscr{E}')$ et l'on note $\mathscr{E}'_{\psi_t}$ la restriction de $\mathscr{E}'_\varphi$ à (S^2, t) (ou, si l'on préfère, l'espace fibré induit par ψ_t). Dans le même esprit, on aura $\mathfrak{M}_\varphi(\mathscr{E}'_\varphi)$, $\mathfrak{L}_\varphi(\mathscr{E}'_\varphi)$, $\mathfrak{M}'_\varphi(\mathscr{E}'_\varphi)$, $\mathfrak{L}'_\varphi(\mathscr{E}'_\varphi)$, $C'_\varphi(E'_\varphi)$, $\mathfrak{L}_{\psi_t}(\mathscr{E}'_{\psi_t})$, $C'_{\psi_t}(E'_{\psi_t})$, etc.

Soient Γ et Γ' deux grands cercles de S^2 se coupant en O et orientés. Choisissons deux cercles Σ_1 et Σ_2, symétriques par rapport au centre de S^2 et situés dans les quadrants négatifs délimités par Γ et Γ', de telle sorte que, dans la zone Z comprise entre Σ_1 et Σ_2, les cercles orientés Γ et Γ' soient homotopes. Choisissons alors pour voisinage Q^+ et Q^- communs à Γ et à Γ', les portions de sphère délimitées respectivement par Σ_1 et Σ_2, et contenant O (et par suite Γ et Γ'), nous poserons encore

$$Z = Q^+ \cap Q^- \qquad \text{et} \qquad \overline{Z} = Z \times I'$$

et, avec $Q = Q^+$ ou Q^- :

$$\overline{Q} = Q \times I', \qquad \mathscr{E}_Q = Q \times G \qquad \mathscr{E}_{\overline{Q}} = \overline{Q} \times G, \qquad \mathscr{E}'_{\varphi_{\overline{Q}}} = \mathscr{E}'_\varphi \mid \overline{Q}.$$

En outre, on aura

$$\mathscr{E}_{Z^+} = \mathscr{E}_{Q^+} \mid Z, \qquad \mathscr{E}_{\overline{Z}^+} = \mathscr{E}_{\overline{Q}^+} \mid Z, \qquad \mathscr{E}'_{\varphi_{\overline{Z}}} = \mathscr{E}_\varphi \mid \overline{Z},$$

ainsi que les notations déduites de ces dernières par substitution du signe — au signe +.

φ induit à partir de ω' une connexion ω'_φ sur $\mathscr{E}'_\varphi$ qui induit à son tour ω'_{ψ_t} sur $\mathscr{E}'_{\psi_t}$, $\omega'_{\varphi_{\overline{Q}}}$ sur $\mathscr{E}'_{\varphi_{\overline{Q}}}$, $\omega'_{\varphi_{\overline{Z}}}$ sur $\mathscr{E}'_{\varphi_{\overline{Z}}}$, etc, On a également Ω_φ, Ω_{ψ_t}, $\Omega_{\varphi_{\overline{Q}}}$, $\Omega_{\varphi_{\overline{Z}}}$, etc.

Il suffit alors de recommencer, mais avec $\overline{Q}^+$ et $\overline{Q}^-$, cette fois, les opérations effectués ci-dessus sur Q^+ et Q^-. On se donne

$$\gamma_{\mathscr{E}_{\overline{Q}}} : \mathscr{E}_{\overline{Q}} \to \mathscr{E}'_{\varphi_{\overline{Q}}} \qquad (\overline{Q} = \overline{Q}^+ \text{ ou } \overline{Q}^-),$$

puis deux connexions $\omega_{\overline{Q}}$ telles que

$$\begin{matrix} \gamma_{C_{\overline{Q}}(E_{\overline{Q}})}(\omega_{\overline{Q}}) = \omega'_{\varphi_{\overline{Q}}} \\ \Omega(\omega_{\overline{Q}}) = \Omega_{\varphi_{\overline{Q}}} \end{matrix} \qquad (\overline{Q} = \overline{Q}^+ \text{ ou } \overline{Q}^-).$$

Tout cela est possible parce que les bases $\overline{Q}$ sont homéomorphes à R^3. On est alors, sur $\overline{Z}$, dans la situation du lemme 2 de la proposition VII.4.1 où il suffit de remplacer m'_0 et m_0 d'une part, m'_1 et m_1, d'autre part, par les couples de transformations associés respectivement à (O, Γ, ψ) et à (O, Γ', ψ_1). Comme les lacets (O, Γ) et (O, Γ') sont homotopes dans $\overline{Z}$, on a donc

$$s(O, \Gamma, \psi) = s(O, \Gamma', \psi_1).$$

En faisant $\psi = \psi_1$ dans cette égalité, on voit en particulier que $s(O, \Gamma, \psi)$ ne

dépend pas du choix du grand cercle Γ de S^2. Plus généralement, on peut énoncer :

LEMME 2 ([28]). — *L'élément $s(O, \Gamma, \psi)$ défini ci-dessus, ne dépend ni de O, ni de Γ. On le notera donc $s(\psi)$. De plus, si ψ_1 est une application de S^2 dans $\mathfrak{X}$ homotope à ψ, on a*

$$s(\psi_1) = s(\psi).$$

([28]) Dans le cas où le sous-groupe $\Pi(O, \Gamma, \psi)$ de H engendré par $s(O, \Gamma, \psi)$ est *fermé* dans G, on peut déduire facilement ce lemme du résultat suivant :

S'il existe un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}_\psi(S^2, G)$ lié à $\mathcal{E}'_\psi$ par un γ-homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_\psi} : \mathcal{E}_\psi \to \mathcal{E}'_\psi$$

et muni d'une connexion ω_ψ telle que

$$\gamma_{C_\psi(E_\psi)}(\omega_\psi) = \omega'_\psi \quad \text{et} \quad \Omega(\omega_\psi) = \Omega_\psi,$$

et si ψ_1 est homotope à ψ, il existe un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}_{\psi_1}(S^2, G)$ lié à $\mathcal{E}'_{\psi_1}$ par les mêmes propriétés.

Posons en effet

$$\mathcal{E}_\varphi = \mathcal{E}_\psi \times \Gamma.$$

Comme $\mathcal{E}'_\psi$ est l'espace fibré $\mathcal{E}'_\psi \times \Gamma$, et qu'il existe par hypothèse un γ-homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_\psi} : \mathcal{E}_\psi \to \mathcal{E}'_\psi,$$

on peut trouver d'abord un γ-homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_\varphi} : \mathcal{E}_\varphi \to \mathcal{E}'_\varphi,$$

identifier ensuite $\mathcal{L}_\varphi(\mathcal{E}_\varphi)$ et $\mathcal{L}_\varphi(\mathcal{E}'_\varphi)$, et choisir enfin une connexion ω_φ sur $\mathcal{E}_\varphi$ telle que $\gamma_{C_\varphi(E_\varphi)}(\omega_\varphi) = \omega'_\varphi$. En posant alors

$$\Theta = \Omega(\omega_\varphi) - \Omega_\varphi,$$

on voit que Θ est une section du centre de $L_\varphi(E'_\varphi)$ et que $\Delta\Theta = o$, de sorte que Θ peut être considérée comme une forme différentielle fermée à valeurs dans $\underline{H}$. Mais, sur $\mathcal{E}_{\psi_0} = \mathcal{E}_\psi = \mathcal{E}_\varphi \mid (S^2, o)$, on a (avec ω_{φ_0} = restriction de ω_φ à $\mathcal{E}_{\psi_0}$) :

$$\omega_{\varphi_0} - \omega_\psi = \theta_0 = \text{forme linéaire à valeurs dans } \underline{H}.$$

Par suite, la restriction de Θ à (S^2, o) est donnée par

$$\Theta_0 = \Omega(\omega_{\varphi_0}) - \Omega_\psi = d\theta_0$$

puisque $\Omega(\Omega_\psi) = \Omega_\psi$. En d'autres termes, Θ_0 est homologue à o. La formule de l'homotopie montre alors que la restriction Θ_1 de Θ à $(S^2, 1)$ est également homologue à o :

$$\Theta_1 = \Omega(\omega_{\varphi_1}) - \Omega_{\psi_1} = d\Theta_1 \qquad (\omega_{\varphi_1} = \omega_\varphi \mid \mathcal{E}_{\psi_1}, \qquad \mathcal{E}_{\psi_1} = \mathcal{E}_\varphi \mid (s^2, 1)).$$

On obtient donc un espace fibré principal satisfaisant aux conditions de l'énoncé en choisissant pour $\mathcal{E}_{\psi_1}$, la restriction de $\mathcal{E}_\varphi$ à $(S^2, 1)$ et, pour connexion

$$\omega_{\psi_1} = \omega_{\varphi_1} - \theta_1.$$

A partir de ce résultat, on vérifie que $s(O, \Gamma, \psi) = s(O, \Gamma_1, \psi_1)$ en formant le quotient de G par $\Pi(O, \Gamma, \psi)$ qu'on a supposé fermé. On est ainsi ramené au cas précédent. Il en résulte que $s(O, \Gamma_1, \psi_1) \in \Pi(O, \Gamma, \psi)$ et, pour des raisons de continuité :

$$s(O, \Gamma, \psi) = s(O, \Gamma_1, \psi_1).$$

On a aussi le

COROLLAIRE DU LEME 2. — *Si ν et ν' sont deux obturations homotopes d'un même lacet l_x, on a*

$$m(l_x, \nu) = m(l_x, \nu').$$

Comme la variété Q qui sert à définir les obturations ν et ν' est homéomorphe à R^2 et que S^1 est plongé dans Q, nous parlerons, pour simplifier, du centre de S^1 et des rayons de S^1. Nous nous ramènerons d'abord au cas où les dérivées de ν et ν' s'annulent toutes sur les rayons de S^1, aux points d'intersection de ces rayons avec le cercle, en composant ν et ν' avec un homéomorphisme de Q sur lui-même laissant S^1 invariant, homotope à l'identité et dont les dérivées possèdent elles même cette propriété. Soient ν_1 et ν'_1 les obturations ainsi obtenues. Il est clair que

$$m(l_x, \nu) = m(l_x, \nu_1) \qquad \text{et} \qquad m(l_x, \nu') = m(l_x, \nu'_1).$$

Mais en identifiant le disque limité par S^1 dans Q, à chaque hémisphère de S^2 de façon que le centre de S^1 s'applique sur l'un ou l'autre des pôles (géographiques) de Γ (considéré comme l'équateur) et que les rayons de S^1 s'identifient dans chaque cas aux méridiens (S^1 s'appliquant toujours de la même façon sur Γ), on peut raccorder ν_1 et ν'_1 en une application différentiable de S^2 dans $\mathfrak{X}$, Soit

$$\psi : \quad S^2 \to \mathfrak{X} \qquad (\psi \mid H^+ = \nu_1 \text{ et } \psi \mid H^- = \nu'_1),$$

cette application. On a évidemment

$$s(\psi) = m(l_x, \nu_1)\,(m(l_x\, \nu'_1))^{-1}$$

Mais, comme ν et ν', ν et ν_1, ν et ν'_1 sont homotopes, ν_1 et ν'_1 sont également homotopes. Il en résulte que ψ est homotope à o et, comme $s(\psi_0)$ est égal à l'élément neutre de H si $\psi_0(x)$ est indépendant de $x \in S^2$, on a également

$$s(\psi) = \text{élément neutre.}$$

Par suite, $m(l_x, \nu_1) = m(\psi_x, \nu'_1)$, ce qui entraîne $m(l_x, \psi) = m(l_x, \psi')$. Le corollaire est donc démontré.

Du lemme 2, il résulte que, si l'on choisit un point x_0 de $\mathfrak{X}$, l'application s définit une application σ_{x_0} du deuxième groupe d'homotopie en x_0, noté $\Pi^2_{x_0}(\mathfrak{X})$, dans le centre H de G. Nous allons voir maintenant qu'il s'agit d'un homomorphisme. Donnons-nous, dans ce but, deux classes d'homotopie de dimension 2 en x_0, c et c', et choisissons, pour les représenter, deux applications

$$\psi : \quad S^2 \to \mathfrak{X} \qquad [\psi \in c,\ \psi(O) = x_0],$$
$$\psi' : \quad S^2 \to \mathfrak{X} \qquad [\psi' \in c',\ \psi'(O) = x_0]$$

du type particulier décrit ci-dessous. Soient Σ_1 et Σ_2 deux cercles tracés sur S^2, symétriques par rapport au plan du grand cercle Γ et parallèle à ce plan. Nous

désignerons naturellement par Q^+ et Q^- les portions de sphère limitées respectivement par Σ_1 et Σ_2 et contenant Γ. Choisissons alors ψ et ψ' tels que

$$\psi(Q^+) = \psi'(Q^+) = x_0.$$

Il est toujours possible de trouver dans chaque classe d'homotopie une application différentiable satisfaisant à cette condition : si ψ et ψ' ne la remplissent pas, il suffit de les composer avec une application différentiable B de S^2 dans elle-même, homotope à l'identité et telle que $B(Q^+) = O$.

Dans ces conditions, (m_+, m_-) désignant le couple de transformations associé à (O, Γ, ψ) et (m'_+, m'_-), le couple associé à (O, Γ, ψ'), il est clair qu'on a

$$m_+ = m'_+ = \text{élément neutre},$$

puisque $\psi(Q^+) = \psi'(Q^+) = x_0$.

Par contre, s'il est évident que m_- et m'_- appartiennent au centre de $\mathfrak{M}(\mathscr{E}')$ et peuvent par suite être considérés comme des éléments de H, ils ne sont pas, en général égaux à l'élément neutre. On a simplement

$$s(\psi) = m_-^{-1} \qquad \text{et} \qquad s(\psi') = m_-'^{-1}.$$

Il reste à construire, à l'aide de ψ et de ψ' une application différentiable $\psi'' : S^2 \to \mathfrak{X}$ appartenant à la classe d'homotopie $c'' = cc'$. Il suffit pour cela de poser

$$\psi''(x) = \psi(x) \qquad \text{pour} \quad x \in Q^-,$$
$$\psi''(x) = \psi'(\mathfrak{S}(x)) \qquad \text{pour} \quad x \in Q^+,$$

où $\mathfrak{S}$ représente la symétrie de S^2 par rapport à un axe joignant O au centre de S^2. Comme $\psi(Q^+ \cap Q^-) = \psi'(Q^+ \cap Q^-) = x_0$, l'application ψ'' ainsi définie est une application différentiable de S^2 dans $\mathfrak{X}$ et $\psi''(O) = x_0$. De plus elle appartient à la classe d'homotopie c''. Enfin, comme $\mathfrak{S}$ permute les deux hémisphères et change le sens de Γ, on a, en désignant par (m''_+, m''_-) le couple attaché à (O, Γ, ψ'') :

$$m''_+ = m_-'^{-1} \qquad \text{et} \qquad m''_- = m_-.$$

Par suite

$$s(\psi'') = m''_+ (m''_-)^{-1} = (m'_-)^{-1} (m_-)^{-1} = (m_-)^{-1} (m'_-)^{-1},$$

d'où

$$s(\psi'') = s(\psi) s(\psi').$$

Il en résulte qu'en définissant $\sigma_{x_0}(c)$ par $\sigma_{x_0}(c) = s(\psi)$ et $\psi \in c$, on a aussi

$$\sigma_{x_0}(cc') = \sigma_{x_0}(c) \sigma_{x_0}(c').$$

De plus, comme $s(\psi) = s(\psi')$ si ψ et ψ' sont homotopes au sens large $[\psi(O) \neq \psi'(O)]$, il est clair que l'image du deuxième groupe d'homotopie en x_0 par l'homomorphisme σ_{x_0}, est un sous-groupe de H indépendant du choix

du point x_0. Nous pouvons donc énoncer :

LEMME 3. — *L'application* $\sigma_x : \Pi_x^2(\mathfrak{X}) \to H(x \in \mathfrak{X})$ *résultant de l'invariance de* $s(\psi)$ *par homotopie est un homomorphisme de deuxième groupe d'homotopie de* $\mathfrak{X}$ *dans le centre* H *de* G. *Le sous-groupe* $H^2 = \sigma_x(\Pi_x^2(\mathfrak{X}))$ *est indépendant du choix de* x *dans* $\mathfrak{X}$.

Comme nous avons supposé $\mathfrak{X}$ simplement connexe, le deuxième groupe d'homotopie de $\mathfrak{X}$ s'identifie au deuxième groupe d'homologie à coefficients entiers, de sorte qu'on a :

COROLLAIRE DU LEMME 3. — *On déduit de* σ_x *un homomorphisme*

$$\sigma : \quad H^2(\mathfrak{X}) \to H$$

du deuxième groupe d'homologie de $\mathfrak{X}$ *à coefficients entiers dans le centre* H *de* G.

Enfin, on a le

LEMME 4. — *Si l'homomorphisme* σ_x *est trivial* [*c'est-à-dire si* $\sigma_x(c) =$ *élément neutre quelle que soit la classe d'homotopie* c], *l'élément* $m(l_x, \nu)$ *associé à un lacet* l_x *et à une obturation* ν *ne dépend pas de l'obturation choisie.*

La démonstration est semblable à celle du corollaire du lemme 2. Si ν et ν' sont deux obturations distinctes de l_x, on peut toujours se ramener à des obturations ν_1 et ν'_1 dont les dérivées s'annulent sur les rayons de S^1, aux points d'intersection de ces rayons avec le cercle. On peut alors raccorder ν_1 et ν'_1 en une application différentiable de la sphère S^2 dans $\mathfrak{X}$ de sorte que $m(l_x, \nu_1)$, $m(l_x, \nu'_1)$ constitue le couple de transformations associé à (O, Γ, ψ). Puisque $s(\psi)$ est égal a l'élément neutre de H par hypothèse, on a

$$m(l_x, \nu_1) = m(l_x, \nu'_1).$$

Nous résumerons ce qui précède dans la proposition suivante :

PROPOSITION VIII.7.1. — *Étant donnés* $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, G)$, G, ω' *et* Ω *vérifiant les conditions exposées au début du paragraphe et en supposant, en particulier, que* $\mathfrak{X}$ *est simplement connexe, on définit un homomorphisme*

$$\sigma_x : \quad \Pi_x^2(\mathfrak{X}) \to H$$

du deuxième groupe d'homotopie en x *de* $\mathfrak{X}$, *dans le centre* H *de* G, *en posant*

$$\sigma_x(c) = m(\psi_\Gamma, \psi_{Q^+})(m(\psi_\Gamma, \psi_{Q^-}))^{-1},$$

où $\psi : S^2 \to \mathfrak{X}$ *est une application différentiable appartenant à la classe d'homotopie* c, *où* ψ_Γ *est le lacet constitué par la restriction de* ψ *à un grand cercle orienté* Γ *de* S^2 *passant par* $O[\psi(O) = x]$ *et où* ψ_{Q^+} *et* ψ_{Q^-} *sont les obturations de* ψ_Γ *formées par les restrictions de* ψ *à* Q^+ *et à* Q^-.

Le groupe $\Pi^2 = \sigma_x(\Pi_x^2(\mathfrak{X}))$ *est indépendant de* $x \in \mathfrak{X}$ *et l'on note*

$$\sigma : \quad H^2(\mathfrak{X}) \to H$$

l'homomorphisme du second groupe d'homologie à coefficients entiers de $\mathfrak{X}$, *dans* H, *déduit de* σ_x.

Dans le cas général, si σ n'est pas trivial, l'élément $m(l_x, \nu)$ associé à un lacet l_x et à une obturation ν de ce lacet ne dépend que de la classe d'homotopie de l'obturation ν. Si σ est trivial, $m(l_x, \nu)$ est indépendant de l'obturation choisie. On le notera alors $m(l_x) \in \mathfrak{M}_x(\mathfrak{E}')$.

Il est clair que, pour que le problème qui nous occupe admette une solution, il est nécessaire que σ soit trivial. C'est la dernière propriété énoncée par la proposition précédente qui va permettre de montrer que cette condition est également suffisante. Nous allons, pour cela, construire effectivement un espace fibré principal différentiable à l'aide, non pas de sections locales, mais de « chemins horizontaux ». Plus précisément, remarquons que si un tel espace $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ est muni d'une connexion ω satisfaisant à (VIII.7.1), $m(l_x)$ est nécessairement la transformation $\tau_\omega(l_x)$ associée au lacet l_x (corollaire 1 du lemme 1). On peut d'autre part considérer $\mathfrak{E}$ comme le quotient de l'ensemble des chemins ω-horizontaux amortis dont l'origine se projette sur un point x_0 fixe, par la relation d'équivalence qui identifie deux tels chemins λ et λ' s'ils ont même extrémité, c'est-à-dire si

$$\lambda'(1) = \tau_\omega(p(\lambda)p(\lambda')).\lambda(1),$$

relation où $(p(\lambda)p(\lambda'))$ désigne, bien entendu, le lacet en x_0 obtenu en parcourant successivement les projections de λ et de λ'. C'est de cette façon que nous allons reconstruire $\mathfrak{E}$, en remplaçant dans la dernière égalité $\tau_\omega(p(\lambda)p(\lambda'))$ que nous ne connaissons qu'en fonction de $\mathfrak{E}$, par $m(p(\lambda)p(\lambda'))$ dont l'existence résulte de la proposition VIII.7.1.

Nous supposons donc désormais que Π^2 se réduit à l'élément neutre. Soit Λ l'ensemble des chemins différentiables amortis $l : I \to \mathfrak{X}$ d'origine commune $x_0 \in \mathfrak{X}$. Λ est naturellement muni d'une projection

$$p_\Lambda : \quad \Lambda \to \mathfrak{X}$$

qui associe à tout chemin différentiable $l \in \Lambda$, son extrémité

$$p_\Lambda(l) = l(1).$$

Étant donnés deux chemins l_1, l_2, de même projection (c'est-à-dire de même extrémité), nous noterons $l_1 l_2$ le lacet obtenu en parcourant successivement l_1 et l_2, c'est-à-dire, en toute précision, l'application différentiable de S^1 dans $\mathfrak{X}$

définie par les égalités

$$\lambda_1\lambda_2(\alpha(t)) = \lambda_1(2t) \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right),$$
$$\lambda_1\lambda_2(\alpha(t)) = \lambda_2(2(1-t)) \qquad \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right).$$

Un élément $m(l_1 l_2) \in \mathfrak{M}_{x_0}(\mathscr{E}')$ parfaitement défini est donc associé à $l_1 l_2$.

Soit $\mathscr{E}_{x_0}$ un espace fibré principal différentiable de groupe structural G, dont la base se réduit au point x_0 de $\mathfrak{X}$. C'est sur $\mathscr{E}_{x_0}$ que la construction de $\mathscr{E}$ va s'articuler. Faisons tout d'abord opérer $\mathfrak{M}_{x_0}(\mathscr{E}')$ sur $\mathscr{E}_{x_0}$ en choisissant un point y_0 de $\mathscr{E}_{x_0}$ et un point y'_0 de $\mathscr{E}'_{x_0}$, et en définissant

$$\gamma_{\mathscr{E}x_0} : \quad \mathscr{E}_{x_0} \to \mathscr{E}'_{x_0}$$

par l'égalité

$$\gamma_{\mathscr{E}x_0}(y_0 . s) = y'_0 . \gamma(s) \qquad (s \in G).$$

On pose alors

$$m . y = y . j_{\mathfrak{M}}(\gamma_{\mathscr{E}x_0}(y))m \qquad [y \in \mathscr{E}_{x_0} \text{ et } m \in \mathfrak{M}_{x_0}(\mathscr{E}')],$$

et l'on vérifie sans difficulté que les opérations de G et de $\mathfrak{M}_{x_0}(\mathscr{E}')$ sur $\mathscr{E}_{x_0}$, commutent.

Nous définirons maintenant $\mathscr{E}$ comme le quotient du produit $\mathscr{E}_{x_0} \times \Lambda$ par la relation d'équivalence :

$$(y_1, l_1) \equiv (y_2, l_2) \qquad \text{si} \quad p_\Lambda(l_1) = p_\Lambda(l_2) \qquad \text{et} \qquad y_2 = m(l_1 l_2) . y_1$$

avec, bien entendu, $l_1, l_2 \in \Lambda$ *et* $y_1, y_2 \in \mathscr{E}_{x_0}$.

Encore faut-il vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. La symétrie et la réflexivité sont évidentes : elles résultent de $m(ll) =$ élément neutre et de $m(l_1 l_2) = (m(l_2 l_1))^{-1}$. Quant à la transitivité, c'est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 1. — *Étant donnés trois chemins* $l_1, l_2, l_3 \in \Lambda$, *on a*

$$m(l_1 l_3) = m(l_2 l_3) m(l_1 l_2).$$

Considérons en effet deux cercles de R^2 : S^1 et $(S^1)'$ se coupant en deux points distincts O et O', et paramétrés régulièrement par $\alpha(t)$ $\left[\alpha(0) = O, \alpha\left(\frac{1}{2}\right) = O', \alpha(1) = O\right]$ et par $\alpha'(t)$ $\left[\alpha'(0) = O, \alpha'\left(\frac{1}{2}\right) = O', \alpha'(1) = O\right]$. On définit une application différentiable Φ' de l'ensemble de ces deux cercles dans $\mathfrak{X}$, en posant

$$\Phi'(\alpha(t)) = l_1(2t) \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right),$$
$$\Phi'(\alpha(t)) = l_2(2(1-t)) \qquad \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right),$$
$$\Phi'(\alpha'(t)) = l_2(2t) \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right),$$
$$\Phi'(\alpha'(t)) = l_3(2(1-t)) \qquad \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right),$$

Cette application est différentiable en ce sens que, comme les dérivées de Φ' par rapport à t sont toutes nulles aux points O et O′ sur S^1 et $(S^1)'$, on peut la prolonger en une application différentiable d'un voisinage ouvert de $(S^1)\cup(S^1)'$ dans $\mathfrak{X}$. De plus, puisque $\mathfrak{X}$ est simplement connexe, on peut étendre Φ' en une application différentiable

$$\Phi : \quad R^2 \to \mathfrak{X},$$

l'extension se faisant successivement dans les quatre régions de R^2 séparées par les deux cercles. Il ne reste plus qu'à recommencer les opérations habituelles. Posons $\mathfrak{E}_Q = R^2 \times G$, choisissons $\gamma_{\mathfrak{E}_Q} : \mathfrak{E}_Q \to \Phi^{-1}(\mathfrak{E}')$ et une connexion ω_Q sur $\mathfrak{E}_Q$ appliquée sur la connexion induite ω_Φ par le couple $(\gamma, \gamma_{\mathfrak{E}_Q})$ et admettant pour courbure la forme induite Ω_Φ. Dans ces conditions, $m(l_1 l_2)$ est, à un homomorphisme induit près, la transformation $\tau_{\omega_Q}(S^1)$ associée à S^1 (considéré comme lacet en O), $m(l_2 l_3)$ est la transformation $\tau_{\omega_Q}((S^1)')$ associée à $(S^1)'$ et $m(l_1 l_3)$ est la transformation associée au lacet λ constitué par la portion de S^1 pour laquelle $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et par la portion de $(S^1)'$ pour laquelle $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$:

$$m(l_1 l_3) = \tau_{\omega_Q}(\lambda).$$

De même, $m(l_2 l_2)$ qui est égal à l'élément neutre, est aussi la transformation associée au lacet λ' formé par les portions de S^1 et de $(S^1)'$ qui ne figurent pas dans λ : $m(l_2 l_2) = \tau_{\omega_Q}(\lambda')$. Il en résulte que tout chemin ω_Q-horizontal de projection λ' se referme et que, par suite, si l'on appelle λ'' le lacet en O obtenu en intercalant λ' entre les deux parties de λ, on a

$$\tau_{\omega_Q}(\lambda'') = \tau_{\omega_Q}(\lambda).$$

Mais λ'' est le lacet obtenu en décrivant successivement S^1 et $(S^1)'$. On a donc

$$\tau_{\omega_Q}(\lambda'') = \tau_{\omega_Q}((S^1)')\tau_{\omega_Q}(S^1) = m(l_2 l_3)m(l_1 l_2),$$

et par suite

$$m(l_1 l_3) = m(l_2 l_3)m(l_1 l_2).$$

La transitivité de notre relation d'équivalence résulte immédiatement de cette égalité. En effet, étant donnés (y_1, l_1), (y_2, l_2), $(y_3, l_3) \in \mathfrak{E}_{y_0} \times \Lambda$, si $(y_1, l_1) \equiv (y_2, l_2)$ et si $(y_2, l_2) \equiv (y_3, l_3)$, on a, par définition

$$y_2 = m(l_1 l_2).y_1 \qquad \text{et} \qquad y_3 = m(l_2 l_3).y_2.$$

Par suite

$$y_3 = m(l_2 l_3)m(l_1 l_2).y_1,$$

ce qui entraîne, d'après le lemme 1 :

$$y_3 = m(l_1 l_3).y_1 \qquad \text{et par suite} \quad (y_3, l_3) \equiv (y_1, l_1).$$

L'ensemble $\mathfrak{E}$ est donc bien défini et il reste à vérifier maintenant qu'il est

possible de le doter d'une structure d'espace fibré principal différentiable à groupe structural. Nous définirons d'abord la projection $p_{\mathcal{E}}$ en remarquant que $\mathcal{E}_{x_0}\times\Lambda$ est naturellement muni de la projection induite par p_Λ, c'est-à-dire de l'application $p_{\mathcal{E}_{x_0}\times\Lambda}:\mathcal{E}_{x_0}\times\Lambda\to\mathfrak{X}$ définie par

$$p_{\mathcal{E}_{x_0}\times\Lambda}(y,l)=p_\Lambda(l)\qquad[(y,l)\in\mathcal{E}_{x_0}\times\Lambda].$$

Or, cette projection passe au quotient parce que, si $(y_1,l_1)\equiv(y_2,l_2)$, on a $p_\Lambda(l_1)=p_\Lambda(l_2)$. C'est cette application-quotient qui sera la projection $p_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ sur sa base $\mathfrak{X}$.

Nous allons préciser maintenant une notion de « chemin horizontal » dans $\mathcal{E}$. Étant donné un chemin différentiable $l:\mathrm{I}\to\mathfrak{X}$ d'origine x_0, le chemin horizontal $\mu:\mathrm{I}\to\mathcal{E}$ de projection l et d'origine $y\in\mathcal{E}_{x_0}$ est défini par

$$\mu(t)=\mathrm{T}(y,l_t),$$

où T est l'application canonique

$$\mathrm{T}:\quad\mathcal{E}_{x_0}\times\Lambda\to\mathcal{E}$$

et où l_t représente le chemin différentiable $l_t:\mathrm{I}\to\mathfrak{X}$ défini par

$$l_t(\theta)=l(t\theta)\qquad(\theta\in\mathrm{I}),$$

c'est-à-dire, en gros, la partie de l comprise entre o et t. Remarquonsque, si $z\in\mathcal{E}$ et si $l(1)=p_{\mathcal{E}}(z)$, il existe un point $\mathrm{K}_l(z)\in\mathcal{E}_{x_0}$ et un seul tel que $\mathrm{T}(\mathrm{K}_l(z),l)=z$. En effet, étant donné $(y,l')\in z$, le point $\mathrm{K}_l(z)=m(l'l).y$ satisfait bien à cette égalité et son unicité résulte du fait que $(y,l)\equiv(y',l)$ entraîne $y=y'$. Il est alors clair qu'il existe un chemin horizontal $\mu:\mathrm{I}\to\mathcal{E}$ et un seul d'extrémité z [c'est-à-dire tel que $\mu(1)=z$] et de projection l. C'est le chemin défini par

$$\mu(t)=\mathrm{T}(\mathrm{K}_l(z),l_t)\qquad(t\in\mathrm{I}).$$

Remarquons également que la fibre de $\mathcal{E}$ de projection x_0 s'identifie à $\mathcal{E}_{x_0}$ puisque, si l est un lacet en x_0 et si $y\in\mathcal{E}_{x_0}$, (y,l) est équivalent à $(m(l_0l).y,l_0)$ où l_0 est le chemin nul en x_0. La notation $\mathcal{E}_{x_0}$ se trouve donc justifiée.

Il est maintenant facile de définir sur $\mathcal{E}$ les translations à droite par les éléments de G. Étant donné $z\in\mathcal{E}$ et $l:\mathrm{I}\to\mathfrak{X}$ [chemin différentiable joignant x_0 à $x=p_{\mathcal{E}}(z)$], on posera

$$z.s=\mathrm{T}(\mathrm{K}_l(z).s,l)\qquad(s\in\mathrm{G}).$$

Il faut évidemment vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de l. Compte tenu de la commutativité des opérations de G et de celles de $\mathfrak{M}_{x_0}(\mathcal{E}')$ sur $\mathcal{E}_{x_0}$ ainsi que de la formule évidente $\mathrm{K}_l(z)=m(l'l)\mathrm{K}_{l'}(z)$, cela ne présente aucune difficulté. Il est également facile de voir que G est simplement transitif sur $\mathcal{E}_x$ puisqu'il l'est sur $\mathcal{E}_{x_0}$ et que le translaté d'un chemin horizontal est un chemin horizontal.

En résumé, $\mathcal{E}$ est maintenant doté d'une structure d'espace fibré principal s. l. à groupe structural. La prochaine étape est celle de la structure différentiable, structure qui dépend du lemme suivant :

LEMME 2. — *Si h_0 et h'_0 sont deux chemins différentiables de $\mathfrak{X}$, d'origine commune x_0 et d'extrémité commune $x(0)$ et si h_0 et h'_0 dépendent différentiablement de $0 \in I$ [ce qui entraîne que $x(0)$ est différentiable], alors $m(h'_0 h_0)$ est une application différentiable $I \to \mathfrak{M}_{x_0}(\mathcal{E}')$.*

Ce lemme se démontre en plongeant $S^1 \times I$ dans R^3, en définissant

$$\Theta' : \quad S^1 \times I \to \mathfrak{X},$$

par :

$$\Theta'(\alpha(t), 0) = h_0(2t) \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right),$$

$$\Theta'(\alpha(t), 0) = h'_0(2(1-t)) \qquad \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right)$$

et en étendant Θ' en une application différentiable

$$\Theta : \quad R^3 \to \mathfrak{X}$$

dont l'existence résulte du fait que $\mathfrak{X}$ est simplement connexe. On recommence ensuite sur R^3 les opérations habituelles (construction de $R^3 \times G$, choix d'un γ-homomorphisme, choix d'une connexion telle que ...) dont le lemme résulte immédiatement.

Il ne reste plus qu'à recouvrir $\mathfrak{X}$ par des voisinages de coordonnées U^α, à joindre x_0 au centre x_α de chaque U^α par un chemin différentiable $l^\alpha \in \Lambda$ et à construire, sur chaque U^α, une section locale de la façon suivante. Soit $\nu : I \to I$ un homéomorphisme différentiable de I sur lui-même dont toutes les dérivées s'annulent pour 0 et 1. Représentons U^α par un système de coordonnées polaires $(\rho, (a_i))$ où ρ est le rayon vecteur variant de 0 à 1 et où les a_i sont des paramètres directeurs. Notons alors $l^\alpha_x[x = (\rho, (a_i)) \in U^\alpha]$ le chemin différentiable défini par

$$l^\alpha_x(t) = l^\alpha(2t) \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right),$$

$$l^\alpha_x(t) = (\rho\nu(2t-1), (a_i)) \qquad \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right).$$

En d'autres termes, l^α_x s'obtient en mettant bout à bout l^α et $x_\alpha x$. Désignons maintenant par λ^α_x le chemin horizontal de projection l^α_x dont l'origine est un point y de $\mathcal{E}_{x_0}$ choisi une fois pour toutes, indépendamment de U^α. Nous poserons, dans ces conditions

$$f^\alpha(x) = \lambda^\alpha_x(1).$$

f^α est manifestement une section de $\mathcal{E}_{U^\alpha}$ car $p_{\mathcal{E}} \circ f^\alpha =$ identité sur U. On définit

alors la structure différentiable de $\mathscr{E}$ au moyen des homéomorphismes différentiables

$$\psi^\alpha : \quad \mathscr{E}_{U^\alpha} \to U^\alpha \times G,$$

déterminés par

$$(f^\alpha(x).s) = (x, s) \qquad (x \in U^\alpha, s \in G).$$

Plus précisément, la structure de variété différentiable de $\mathscr{E}$, si elle existe, est déterminée en supposant que les applications ψ^α sont des homéomorphismes différentiables. Il suffit de vérifier la compatibilité de cette définition sur l'intersection $U^\alpha \cap U^\beta$ de deux voisinages de coordonnées U^α et U^β. Pour un point $x \in U^\alpha \cap U^\beta$, on a

$$f^\alpha(x) = f^\beta(x).g^{\alpha\beta}(x) \qquad [g^{\alpha\beta}(x) \in G]$$

et il s'agit de montrer que $g^{\alpha\beta}(x)$ est une fonction différentiable de x. Or, conformément à ce qui précède, $g^{\alpha\beta}(x)$ s'obtient en considérant le chemin horizontal de projection l_x^β et d'extrémité $f^\alpha(x)$. On a

$$K_{l^\beta}(f^\alpha(x)) = y.g^{\alpha\beta}(x),$$

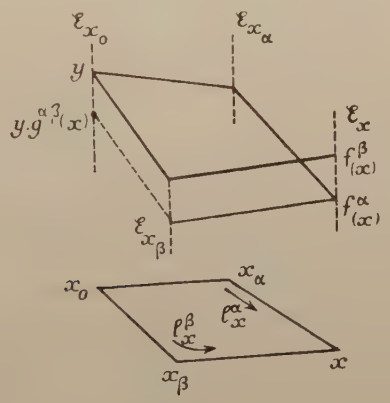


Fig. 14.

puisque le chemin horizontal de projection l_x^α et d'extrémité $f^\alpha(x)$ a pour origine le point y choisi une fois pour toutes dans $\mathscr{E}_{x_0}$. On a donc également

$$y.g^{\alpha\beta}(x) = m(l_x^\alpha l_x^\beta).y. \tag{VIII.7.3}$$

Mais, si x dépend différentiablement d'un paramètre 0, les deux chemins $l^\alpha_{x(0)}$ et $l^\beta_{x(0)}$ dépendent aussi différentiablement de 0. D'après le lemme 2, il en est alors de même de $m(l^\alpha_{x(0)} l^\beta_{x(0)})$. L'égalité (VIII.7.3) montre que $g^{\alpha\beta}(x)$ est également une fonction différentiable de 0 et, plus généralement, de x, le lemme 2 se généralisant immédiatement à un nombre quelconque de paramètres. Les applications ψ^α définissent donc bien une structure de variété différentiable dans $\mathscr{E}$.

Remarquons que cette structure est telle que, au-dessus de tout point x^α, les chemins horizontaux sont tous tangents à un élément plan transversal. Mais, comme il est toujours possible d'entourer un point x quelconque de $\mathfrak{X}$ d'un voisinage de coordonnées, le raisonnement de compatibilité précédent montre que tous les chemins horizontaux passant par un point $z \in \mathcal{E}$ arbitraire, sont tangents à un élément plan transversal à la fibre passant par z. Globalement, ces éléments constituent donc un champ qui est invariant par les translations à droite de G sur $\mathcal{E}$ puisque l'ensemble des chemins horizontaux est lui-même invariant par ces translations. C'est donc un champ de connexion $c(\omega)$.

Nous sommes maintenant très près du but. Nous définirons d'abord un γ-homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}} : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

en supposant que $\gamma_{\mathcal{E}}$ coïncide, sur $\mathcal{E}_{x_0}$, avec l'homomorphisme $\gamma_{\mathcal{E}x_0}$ déja défini, puis, en le prolongeant à $\mathcal{E}$ en faisant correspondre à tout chemin horizontal d'origine $\gamma \in \mathcal{E}_{x_0}$, le chemin ω'-horizontal d'origine $\gamma_{\mathcal{E}x_0}(\gamma)$ et de même projection. Le procédé a été décrit plusieurs fois déjà. La vérification du fait qu'il s'agit d'un homomorphisme et que cet homomorphisme est compatible avec $\gamma : G \to G_\gamma = G/H$, est immédiate en utilisant le corollaire 2 du lemme 1 de la proposition VIII.7.1 qui montre ici que

$$\gamma_{\pi(\mathcal{E}')}(m(l'l)) = \varphi_{\omega'}(l'l).$$

De cette définition même, il résulte que $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}})$ applique ω sur ω'. Il reste à vérifier que $\Omega(\omega) = \Omega$ après avoir identifié $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$ à $\mathfrak{L}(\mathcal{E}')$ grâce à $\gamma_{\mathcal{E}}$. C'est une conséquence du fait que cette égalité est vérifiée avec les espaces et les formes induits par une application différentiable $\nu : R^2 \to \mathfrak{X}$ qu'on peut toujours considérer comme une obturation, ce qui permet de se ramener à la définition de $m(l)$.

Le problème est donc complètement résolu et nous pouvons énoncer :

Théorème VIII.7.1. — *Étant donné un groupe de Lie connexe* G, *un espace fibré principal différentiable* $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G_\gamma)$ *de base* $\mathfrak{X}$ *simplement connexe et de groupe structural* $G_\gamma = G/H$ (H = *centre de* G), *une connexion* ω' *sur* $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G_\gamma)$ *et une section* Ω *de* $L^2(E')$ *telle que*

$$\Delta\Omega = 0$$

[Δ *étant la* $L(E')$*-différentiation covariante associée à* ω'], *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un espace fibré principal* $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ *de base* $\mathfrak{X}$ *et de groupe* G, *lié à* $\mathcal{E}'$ *par un* γ*-homomorphisme*

$$\gamma_{\mathcal{E}} : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

et muni d'une connexion ω *telle que*

$$\gamma_{G(E)}(\omega) = \omega' \qquad \text{et} \qquad \Omega(\omega) = \Omega$$

[$\gamma_{C(E)}$ *étant l'homomorphisme des faisceaux des connexions associé au couple* $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}})$] *est que le sous-groupe* Π^2 *défini par la proposition* VIII.7.1 *se réduise à l'élément neutre de* H.

En nous reportant maintenant à la proposition VIII.7.1 et à l'interprétation de $s(\psi)$, on voit qu'on a le

COROLLAIRE 1. — *Pour que l'espace* $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ *du théorème précédent existe, il faut et il suffit que, quelle que soit l'application différentiable*

$$\psi : S^2 \to \mathfrak{X}$$

il existe un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}_\psi(S^2, G)$ *lié à* $\mathcal{E}'_\psi$ *par un* γ*-homomorphisme*

$$\gamma_{\mathcal{E}_\psi} : \mathcal{E}_\psi \to \mathcal{E}'_\psi$$

et muni d'une connexion ω_ψ *telle que*

$$\gamma_{C_\psi(E_\psi)}(\omega_\psi) = \omega'_\psi \qquad \text{et} \qquad \Omega(\omega_\psi) = \Omega_\psi.$$

On a également les conséquences immédiates suivantes :

COROLLAIRE 2. — *Si le sous-groupe* Π^2 *de* H *n'est pas trivial et s'il est fermé dans* G, *il existe un espace fibré principal différentiable de groupe structural* G/Π^2 *satisfaisant aux conditions ci-dessus.*

COROLLAIRE 3. — *Si le deuxième groupe d'homotopie de* $\mathfrak{X}$ *est nul, il existe toujours un espace fibré principal différentiable* $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ *satisfaisant aux conditions du théorème précédent.*

Nous laissons au lecteur le soin de combiner ces résultats avec le théorème VIII.6.1 et d'énoncer la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un espace fibré principal de groupe structural donné, admettant $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$.

8. CAS OÙ Π^2 EST UN SOUS-GROUPE DE LA COMPOSANTE CONNEXE DE L'ÉLÉMENT NEUTRE DANS H.

PROPOSITION VIII.8.1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* Π^2 *soit un sous-groupe de la composante connexe* H^0 *de l'élément neutre dans* H *est qu'il existe un espace fibré principal différentiable* $\mathcal{E}^0(\mathfrak{X}, G/H^0)$ *lié à* $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G)$ *par un* γ^0*-homomorphisme* $(\gamma^0 : G^0_\gamma = G/H^0 \to G_\gamma = G/H)$:

$$\gamma_{\mathcal{E}^0} : \mathcal{E}^0 \to \mathcal{E}'$$

et muni d'une connexion ω^0 *appliquée sur* ω' *par* $(\gamma^0, \gamma_{\mathcal{E}^0})$.

Revenons en effet à la définition de $s(\psi)$ et reprenons les notations du

lemme 2 de la proposition VIII.7.1 et de l'interprétation de $s(\psi)$. La proposition VII.5.1 montre que, pour que $s(\psi)\in H^0$, il faut et il suffit qu'il existe un G^0-isomorphisme de $\mathscr{E}_{Z+}/H^0$ sur $\mathscr{E}_{Z-}/H^0$ appliquant les connexions-quotients ω^0_{Z-} et ω^0_Z l'une sur l'autre et induisant l'identité sur $\mathscr{E}'_Z$. Or, si $\mathscr{E}^0(\mathfrak{X}, G^0)$ existe, il existe aussi, quel que soit ψ, un G^0-isomorphisme $h_\psi : \mathscr{E}_{Z-}/H^0 \to \mathscr{E}_{Z-}/H^0$: c'est celui qui permet de construire $\psi^{-1}(\mathscr{E}^0)$. Réciproquement, si, quel que soit ψ, il existe un G^0-isomorphisme h_ψ, on peut construire $\mathscr{E}^0(\mathfrak{X}, G^0)$ et le corollaire 1 du théorème VIII.7.1 montre que l'espace $\mathscr{E}^0(\mathfrak{X}, G^0)$ existe.

Nous nous proposons maintenant de chercher à modifier Ω dans le but d'annuler Π^2, en supposant toujours que $\gamma_{L(E')}(\Omega) = \Omega(\omega')$, bien entendu. C'est-à-dire que nous remplaçons Ω par $\Omega' = \Omega + \Theta$ où Θ est une section du centre $K^2(E')$ de $L^2(E')$. On sait qu'on peut alors considérer Θ comme une 2-forme différentielle à valeurs dans $\underline{H}$. Remarquons tout de suite que, si $\Theta = d\theta$, on ne modifie pas Π^2 en substituant Ω' à Ω ([29]). En effet, on peut alors remplacer les connexions ω_Q (notations de la proposition VIII.7.1) par $\omega_Q + \theta_{\psi_Q}$ où θ_{ψ_Q} est la restriction à $Q = Q^+$ ou Q^- de la forme θ_ψ induite par ψ. Mais alors, on modifie m_+ et m_- par le même élément $\tau^0_\theta(\psi_\Gamma)\in H$ (*voir* prop. IV.5.4) et, par suite, $m_+ m_-^{-1} = s(\psi)$ reste invariant. Cette remarque est valable que Π^2 soit ou ne soit pas un sous-groupe de H^0. *Supposons désormais que* $\Pi^2 \subset H^0$. Pour que $\Delta\Omega' = 0$, il faut que $d\Theta = 0$ puisque $\Delta\Omega = 0$ et que, sur $K(E')$, Δ et d coïncident. Dans la suite, nous supposerons cette condition réalisée.

Proposition VIII.8.2. — *Soit* $R(H^0)$ *le revêtement universel de* H^0 *muni d'une structure de groupe de Lie et* $\rho : R(H^0) \to H^0$ *l'homomorphisme-projection de* $R(H^0)$ *sur* H^0. *En reprenant les notations de la proposition* VIII.7.1 *et en désignant par* $r(\psi)$ *l'élément de* H *obtenu en substituant* $\Omega + \Theta$ *à* Ω (Θ = 2-*forme différentielle fermée sur* $\mathfrak{X}$ *à valeurs dans* H), *on a* $r(\psi)\in H^0$ *et en considérant* $\psi : S^2 \to \mathfrak{X}$ *comme une* 2-*chaîne* :

$$r(\psi) = s(\psi)\rho\left(\int_\psi \bar{\rho}^{-1}\Theta\right).$$

En effet, pour former $r(\psi)$, on substitue à ω_Q ($Q = Q^+$ ou Q^-), les connexions $\omega_Q + \theta_Q$ où les θ_Q sont les 1-formes différentielles définies sur Q, à valeurs dans $\underline{H}$ et telles que

$$d\theta_Q = \Theta_{\psi_Q}.$$

Ces formes existent parce que Q est homéomorphe à R^2 et que $d\Theta = 0$.

([29]) Plus généralement, on peut vérifier qu'on ne modifie pas Π^2 en substituant à Ω la forme $\Omega + \Delta\eta + \frac{1}{2}[\eta, \eta]$ et à ω' la connexion $\omega' + \gamma_{L(E')}(\eta)$. Cf. remarque faite à l'occasion de la proposition VII.4.1.

Désignons par (m'_+, m'_-) le nouveau couple de transformations associé à (O, Γ, ψ). On a alors

$$m'_+ = m_+ u_+ \qquad \text{et} \qquad m'_- = m_- u_-,$$

avec

$$u_+ = \tau^0_{\theta_{Q+}}(\Gamma) \qquad \text{et} \qquad u_- = \tau^0_{\theta_{Q-}}(\Gamma),$$

où $\tau^0_{\theta_Q}(\Gamma)$ désigne, rappelons-le, l'élément de H associé au lacet en O, Γ, dans la connexion déterminée dans $H \times Q$ par la forme θ_Q. Il en résulte tout d'abord que $r(\psi)$ et $s(\psi)$ appartiennent à la même composante connexe de H, H^0 en l'occurence. De plus, comme $R(H^0)$ est isomorphe à R^p, donc à $\underline{H}$, on a, en identifiant les algèbres de Lie $\underline{R(H^0)}$ et $\underline{H}^0$ par $\underline{\rho}$:

$$u_+ = \rho\left(\int_\Gamma \underline{\rho}^{-1}\theta_{Q+}\right) \qquad \text{et} \qquad u_- = \rho\left(\int_\Gamma \underline{\rho}^{-1}\theta_{Q-}\right).$$

Or, en vertu de la formule de Stokes, on a

$$\int_\Gamma \underline{\rho}^{-1}\theta_{Q+} = \int_{H+} \underline{\rho}^{-1} d\theta_{Q+} \qquad \text{et} \qquad \int_\Gamma \underline{\rho}^{-1}\theta_{Q-} = \int_{H-} \underline{\rho}^{-1} d\theta_{Q-}.$$

Mais, on a également, en formant $r(\psi) = m'_+ m'^{-1}_-$:

$$r(\psi) = s(\psi) u_+ (u_-)^{-1}.$$

Cela entraîne

$$\begin{aligned} r(\psi) &= s(\psi)\rho\left[\left(\int_{H+} \underline{\rho}^{-1}\Theta_{\psi_{H+}}\right) + \left(\int_{H-} \underline{\rho}^{-1}\Theta_{\psi_{H-}}\right)\right] \\ &= s(\psi)\rho\left(\int_{S^2} \underline{\rho}^{-1}\Theta_\psi\right) \\ &= s(\psi)\rho\left(\int_\psi \underline{\rho}^{-1}\Theta\right), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule qu'il s'agissait de démontrer.

On en déduit immédiatement :

Proposition VIII.8.3. — *Si* $H^2(\mathfrak{X})$ *est engendré par les classes d'homologie des applications* ψ^i, *le groupe* Π'^2 *correspondant à la forme* $\Omega' = \Omega + \Theta$ (Θ *fermée à valeurs dans* $\underline{H}$) *se réduit à l'élément neutre si les périodes de* Θ *relatives aux cycles* ψ^i *sont telles que*

$$\rho\left(\int_{\psi^i} \underline{\rho}^{-1}\Phi\right) = [\sigma(\alpha(\psi^i))]^{-1},$$

où $\alpha(\psi)$ *représente la classe d'homologie à coefficients entiers de* ψ.

Proposition VIII.8.4. — *Pour qu'il existe une forme* $\Omega' = \Omega + \Theta$ (Θ *fermée à*

valeurs dans $\underline{H}$) *telle que le sous-groupe* Π'^2 *se réduise à l'identité, il est nécessaire que*

$$\Pi_1^2 = \sigma(T(H^2(\mathfrak{X}))) = \text{élément neutre},$$

$T(H^2(\mathfrak{X}))$ *représentant le sous-groupe de torsion de* $H^2(\mathfrak{X})$.

Proposition VIII.8.5. — *Si la variété* $\mathfrak{X}$ *est compacte et simplement connexe, il existe un espace fibré principal différentiable* $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G/\Pi_T^2)$ *de groupe structural* G/Π_T^2 *lié à* $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X}, G_\cdot)$ *par un* γ*-homomorphisme*

$$\gamma : \quad \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}'$$

et muni d'une connexion ω *telle que*

$$\gamma_{C(E)}(\omega) = \omega'.$$

Un tel espace peut en effet être construit à partir d'une forme $\Omega + \Theta$ où Θ est fermée et admet, relativement à des cycles ψ^r qui forment une base de $H^2(\mathfrak{X})/T(H^2(\mathfrak{X}))$, des périodes h^r choisies de telle sorte que

$$\rho(h^r) = [\sigma(\alpha(\psi^r))]^{-1}.$$

Remarque. — Si Π^2 n'est pas un sous-groupe de H^0, une méthode analogue peut cependant servir à modifier Π^2 (par exemple pour le rendre fermé dans G), mais on ne peut pas espérer l'annuler ainsi.

CHAPITRE IX.

Applications et compléments.

1. Espace fibré principal maximal. — Nous supposons essentiellement dans ce paragraphe que $\mathfrak{X}$ est *simplement connexe*. Soit $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ un espace fibré principal différentiable dont le groupe structural G est supposé *connexe*. Désignons par $R(G)$ le revêtement universel de G muni d'une structure de groupe homomorphe à G par la projection

$$\rho : \quad R(G) \to G.$$

Le quotient de $R(G)$ par son centre H_R s'identifie au quotient $G_\cdot = G/H$ de G par son centre, et l'on pose $\gamma_R = \gamma \circ \rho$. $G_\cdot$ opère donc sur $R(G)$ par les automorphismes intérieurs et l'on peut modeler $\mathfrak{M}_R = R(G) \times \mathfrak{X}$ sur $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$. On obtient ainsi $\mathfrak{M}_R(\mathfrak{E})$. D'autre part, soit ω une connexion sur $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}, G)$ et Δ la $L(E)$-différentiation covariante associée à ω. Nous poserons $\omega_\cdot = \gamma_{C(E)}(\omega)$. On peut alors chercher à construire, comme au chapitre précédent, un espace fibré principal différentiable $\mathfrak{E}_R(\mathfrak{X}, R(G))$ lié à $\mathfrak{E}_\cdot = \mathfrak{E}/H$ par un γ_R-homo-

morphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_R} : \quad \mathcal{E}_R \to \mathcal{E}_\gamma,$$

et muni d'une connexion ω_R appliquée sur ω_γ par le couple $(\gamma_R \gamma_{\mathcal{E}_R})$ et dont la courbure soit égale à $\Omega(\omega)$ après identification de $\mathfrak{M}_R(\mathcal{E}_R)$ et de $\mathfrak{M}_R(\mathcal{E}_\gamma)$ [et, par suite, de $\mathcal{L}_R(\mathcal{E}_R)$, $\mathcal{L}_R(\mathcal{E}_\gamma)$, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$], à $\Omega(\omega)$. D'après la proposition VIII.7.1, on est amené à considérer un sous-groupe Π^2 du centre H_R de $R(G)$.

Définition IX.1.1. — *On dira que l'espace fibré principal $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est maximal si le sous-groupe Π^2 coïncide exactement avec le noyau de ρ* ([30]).

Proposition IX.1.1. — *Tout espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est le quotient d'un espace fibré principal différentiable maximal $(\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ par un sous-groupe discret du centre H_1 de G_1.*

En effet, en reprenant la construction de $\mathcal{E}_R(\mathcal{X}, R(G))$, on déduit de l'existence même de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ que Π^2 est un sous-groupe du noyau de ρ. Comme ce dernier est fermé dans $R(G)$, Π^2 est également fermé dans $R(G)$ et, d'après le corollaire 3 du théorème VIII.7.1, il existe un espace fibré principal $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ de base $\mathcal{X}$ et de groupe $G_1 = R(G)/\Pi^2$ tel qu'en notant $\rho_1 : G_1 \to G$ l'homomorphisme déduit de ρ par passage au quotient et $\gamma_1 : G_1 \to G$ l'homomorphisme déduit de γ_R, il existe un γ_1-homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_1} : \quad \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_\gamma$$

et une connexion ω_1 sur $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ appliquée sur ω_γ par $(\gamma_1, \gamma_{\mathcal{E}_1})$ dont la courbure $\Omega(\omega_1)$ s'identifie à $\Omega(\omega)$. Or, par modelage de ρ_1, on obtient un homomorphisme

$$\rho_{\mathfrak{M}_1(\mathcal{E}_1)} : \quad \mathfrak{M}_1(\mathcal{E}_1) = \mathfrak{M}_1(\mathcal{E}_\gamma) \quad \to \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) = \mathfrak{M}(\mathcal{E}_\gamma)$$

de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ sur celui de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ auquel est associé l'identité sur l'espace de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, identifié à l'espace de Lie de $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ et à $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)$. Comme $\mathcal{X}$ est simplement connexe, il existe donc un couple d'homomorphismes compatibles $(\varphi : G_1 \to G, h : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E})$ tels que

$$\varphi^h_{\mathfrak{M}_1(\mathcal{E}_1)} = \rho_{\mathfrak{M}_1(\mathcal{E}_1)}, \qquad \varphi^h_{\mathcal{L}_1(\mathcal{E}_1)} = \text{identité}, \qquad \varphi^h_{\mathcal{C}_1(E_1)}(\omega_1) = \omega.$$

Un tel couple est déterminé par le choix de $y_1 \in \mathcal{E}_{1,x}$ et $y \in \mathcal{E}_x$ et l'on a

$$\varphi = i_{\mathfrak{M}}(y) \circ \rho_{\mathfrak{M}_1(\mathcal{E}_1)} \circ j_{\mathfrak{M}_1}(y_1),$$

de sorte qu'en choisissant y et y_1 tels que $\gamma_{\mathcal{E}_1}(y_1) = \gamma_{\mathcal{E}}(y)$, on a $\varphi = \rho_1$.

([30]) Cette définition ne dépend pas de ω. Ce caractère intrinsèque résulte d'une note du paragraphe VIII.8. Nous revenons sur ce point quelques lignes plus bas.

L'homomorphisme h correspondant (que nous noterons $\rho_{\mathcal{E}_1} : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}$) permet d'identifier $\mathcal{E}$ au quotient de $\mathcal{E}_1$ par le noyau de ρ_1, ce qui achève la démonstration puisque $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ est maximal par construction.

Remarques. — 1° Le fait que la définition IX.1.1 ne dépende pas du choix de Ω résulte de l'invariance de Π^2 par substitution de $\Omega + \Delta\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$ à Ω et de $\omega' + \gamma_{L(E)}(\theta)$ à ω'. C'est aussi une conséquence de la proposition précédente. En effet, si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ était maximal pour une connexion $\underline{\omega}$ et ne l'était pas pour une connexion $\underline{\omega} + \theta = \omega$, on pourrait construire $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ à partir de cette dernière. Il est immédiat de constater, en considérant la connexion $\omega_1 - \theta$ sur $\mathcal{E}_1(\mathcal{E}, G_1)$ que $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ ne serait pas alors maximal pour ω.

2° Étant donné un chemin $l_t : I \to \mathcal{E}$, dépendant continûment de $t \in I$, tel que $p(l_t(1)) = p(l_t(0)) = x_0$, $l_t(0) = y_0$ (indépendant de t), si, de plus, le chemin l_0 est le chemin nul en y_0, on peut, en posant $l_t(1) = m_t . y_0$, relever par continuité le chemin m_t de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ sur $\mathfrak{M}_R(\mathcal{E})$ et associer à m_1 un élément m'_1 de $\mathfrak{M}_R(\mathcal{E})$ dépendant évidemment de l'homotopie l_t. C'est là le germe d'une définition de l'espace fibré principal maximal valable pour des espaces fibrés topologiques.

Définition IX.1.2. — *S'il existe un homomorphisme $\rho_{\mathcal{E}_1} : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}$ d'un espace fibré principal maximal $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ compatible avec un homomorphisme $\rho_1 : G_1 \to G$ dont le noyau est discret dans G_1, nous dirons que $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ est un revêtement fibré maximal de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.*

Proposition IX.1.2. — *Si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est maximal et s'il existe un couple d'isomorphismes compatibles $\varphi : G \to G'$, $h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, alors $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ est aussi maximal.*

Soient, en effet, $R(G)$ et $R(G')$ les revêtements universels de G et G' munis de structures de groupes homomorphes à G et G' par $\rho : R(G) \to G$ et $\rho' : R(G') \to G'$. L'isomorphisme φ détermine alors un isomorphisme φ_R tel que le diagramme suivant soit compatible :

(IX.1.1)
$$\begin{array}{ccc} R(G) & \to & R(G') \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & {\scriptstyle\varphi_R} & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & G' \end{array}$$

Il est alors facile de voir que, étant donnée une connexion ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\omega' = \varphi^h_{C(E)}(\omega)$, les sous-groupes Π'^2 et Π^2 des centres H', H des groupes $R(G')$, $R(G)$, obtenus en cherchant à construire des espaces fibrés principaux de groupes $R(G)$ et $R(G')$ à partir de $(\mathcal{E}_\gamma, \omega_\gamma, \Omega(\omega))$ et de $(\mathcal{E}'_\gamma, \omega'_\gamma, \Omega(\omega'))$, se cor-

respondent par φ_R :

$$\Pi'^2 = \varphi_R(\Pi^2).$$

La proposition résulte alors du diagramme (IX.1.1).

On a enfin le théorème suivant :

THÉORÈME IX.1.1. — *Si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est un espace fibré principal différentiable maximal et s'il existe un homomorphisme*

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \quad \mathcal{L}(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace de Lie de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ sur l'espace de Lie d'un autre espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ (maximal ou non) et si l'on a

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta \qquad \text{et} \qquad \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)),$$

[où ω et ω' sont des connexions sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ resp. et Δ, Δ' les $L(E)$- et $(L'(E')$-différentiations covariantes associées] il existe un couple compatible d'homomorphismes sur

$$\varphi : \quad G \to G' \qquad et \qquad h : \quad \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

tels que

$$\varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \qquad et \qquad \varphi^h_{C(E)}(\omega) = \omega'.$$

Soient, en effet, Π^2 et Π'^2 les sous-groupes des centres de $R(G)$ et de $R(G')$ obtenus en cherchant à construire des espaces $\mathcal{E}_R(\mathcal{X}, R(G))$ et $\mathcal{E}'_R(\mathcal{X}, R(G'))$ [où $R(G)$ et $R(G')$ sont toujours les revêtements universels de G et G' munis de structures de groupes homomorphes à G et G' par ρ et ρ' et à G_γ et G'_γ par $\gamma_R = \gamma \circ \rho$, $\gamma'_R = \gamma' \circ \rho'$] liés à $\mathcal{E}_\gamma$ et $\mathcal{E}'_\gamma$ par des γ_R- et γ'_R-homomorphismes

$$\gamma_{\mathcal{E}_R} : \quad \mathcal{E}_R \to \mathcal{E}_\gamma, \qquad \varphi_{\mathcal{E}'_R} : \quad \mathcal{E}'_R \to \mathcal{E}'_\gamma$$

et munis de connexions ω_R et ω'_R telles que :

1° Les homomorphismes $\gamma_{C_R(E_R)}$, $\gamma_{C'_R(E'_R)}$ associés à $(\gamma_R, \gamma_{\mathcal{E}_R})$ et $(\gamma'_R, \gamma_{\mathcal{E}'_R})$ appliquent ω_R et ω'_R sur $\omega_\gamma = \gamma_{C(E)}(\omega)$ et $\omega'_\gamma = \gamma_{C'(E')}(\omega')$;

2°
$$\Omega(\omega_R) = \Omega(\omega), \qquad \Omega(\omega'_R) = \Omega(\omega)$$

lorsqu'on identifie l'espace de Lie éventuel $\mathcal{L}_R(\mathcal{E}_R)$ [resp. $\mathcal{L}'_R(\mathcal{E}'_R)$] à $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et à $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)$ [resp. à $\mathcal{L}'(\mathcal{E}')$ et à $\mathcal{L}'(\mathcal{E}'_\gamma)$].

Notons d'autre part $\mathfrak{M}_R(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathfrak{M}'_R(\mathcal{E}'_\gamma)$ les espaces obtenus en modelant

$$\mathfrak{M}_R = R(G) \times \mathcal{X} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}'_R = R(G') \times \mathcal{X}$$

sur $\mathcal{E}_\gamma(\mathcal{X}, G_\gamma)$ et $\mathcal{E}'_\gamma(\mathcal{X}, G'_\gamma)$, G_γ et G'_γ opérant naturellement sur $R(G)$ et $R(G')$ par les automorphismes intérieurs. Il est clair que $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathcal{L}'(\mathcal{E}'_\gamma)$ sont asso-

ciés respectivement à $\mathfrak{M}_R(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathfrak{M}'_R(\mathcal{E}'_\gamma)$. Comme ces derniers sont à fibres simplement connexes, il existe un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{M}_R(\mathcal{E}_\gamma)} : \quad \mathfrak{M}_R(\mathcal{E}_\gamma) \to \mathfrak{M}'_R(\mathcal{E}'_\gamma),$$

auquel l'homomorphisme $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)}$ [déduit de $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ après identification de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)$, etc.] est associé. Les conditions de la proposition VII.1.1 étant vérifiées, il existe un homomorphisme

$$\varphi_R : \quad R(G) \to R(G')$$

déterminant $\varphi_{\mathfrak{M}_R(\mathcal{E}_\gamma)}$ par modelage. On vérifie alors sans difficulté que

$$\Pi'^2 = \varphi_R(\Pi^2).$$

Comme Π'^2 est un sous-groupe du noyau de ρ', on déduit de ρ', par passage au quotient, un homomorphisme

$$\rho'_1 : \quad R(G')/\Pi'^2 \to G',$$

puis, à partir de φ_R et de ρ'_1 :

$$\varphi : \quad G = R(G)/\Pi^2 \to G'.$$

Enfin, par modelage de φ, on détermine

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})} : \quad \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{M}'(\mathcal{E}')$$

auquel $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ est associé, par construction. Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème VI.2.1, dont il suffit de servir pour achever complètement la démonstration.

En rapprochant le théorème IX.1.1 et la proposition IX.1.2, on obtient le

Corollaire 1 du Théorème IX.1.1. — *Si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est un espace fibré principal différentiable maximal et s'il existe un isomorphisme*

$$\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} : \quad \mathcal{E}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace de Lie de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, sur l'espace de Lie d'un autre espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ de même base et de même groupe structural, tel que

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta \qquad et \qquad \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega))$$

(notations habituelles), alors $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ est maximal lui-aussi.

Corollaire 2 du Théorème IX.1.1. — *Si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ sont deux espaces fibrés principaux différentiables maximaux et s'il existe un isomorphisme sur*

$$\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} : \quad \mathcal{E}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}'(\mathcal{E}')$$

tel que

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta \qquad et \qquad \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)),$$

alors, il existe un couple d'isomorphismes compatibles

$$\varphi : \ G \to G' \qquad \text{et} \qquad h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

de G *sur* G' *et de* $\mathcal{E}$ *sur* $\mathcal{E}'$, *tels que*

$$\varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \qquad \text{et} \qquad \varphi^h_{\mathrm{C}(\mathrm{E})}(\omega) = \omega'.$$

En effet, puisque $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathrm{G})$ est maximal, il existe un couple d'homomorphismes sur (φ, h) satisfaisant à ces conditions. Mais, comme $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ est un isomorphisme et que $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \mathrm{G}')$ est maximal lui aussi par hypothèse, il existe aussi un couple d'homomorphismes compatibles

$$\psi : \ \mathrm{G}' \to \mathrm{G} \qquad \text{et} \qquad g : \ \mathcal{E}' \to \mathcal{E}.$$

Il en résulte que φ et h sont des isomorphismes sur. C. Q. F. D.

2. Questions diverses. — Nous nous proposons d'examiner dans ce paragraphe quelques problèmes auxquels les résultats des chapitres précédents conduisent de façon naturelle.

1° Étant donné un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathrm{G})$ de groupe G connexe et de base simplement connexe, classer les opérateurs de différentiation covariante de L(E) susceptibles de conduire éventuellement à des espaces fibrés principaux différentiables non isomorphes à $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathrm{G})$.

Soit ω une connexion sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathrm{G})$ et $\underline{\underline{\omega}}$ la connexion adjointe sur $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$. La L(E)-différentiation covariante associée à ω étant notée Δ, on a vu que tout opérateur de différentiation covariante Δ' de L(E) satisfaisant aux trois premiers axiomes de la définition VIII.1.1 détermine une connexion sur $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ et que, réciproquement, toute connexion linéaire sur $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ détermine une telle différentiation covariante à condition que $\Delta' c = 0$ (notation du chapitre VIII). On a donc

$$\Delta' = \Delta + \alpha',$$

ou α' est une section de $\underline{\underline{\mathrm{L}}}^1(\mathrm{E})$ telle que $\alpha' c = 0$. De plus, si l'axiome 4 est vérifié, $\Omega(\underline{\underline{\omega}} + \alpha')$ est une section de $a_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\mathrm{L}^2(\mathrm{E}))$. Or,

$$\Omega(\underline{\underline{\omega}} + \alpha') = \Omega(\underline{\underline{\omega}}) + \Delta\alpha' + \frac{1}{2}[\alpha', \alpha'].$$

On considérera donc le sous-faisceau Φ de $\underline{\underline{\mathrm{L}}}^1(\mathrm{E})$ tel que $\alpha' \in \Phi$ soit équivalent à $\alpha' c = 0$ et $\Delta\alpha' + \frac{1}{2}[\alpha', \alpha'] =$ section de $a_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\mathrm{L}^2(\mathrm{E}))$. Évidemment, en général, du fait que $\Omega(\underline{\underline{\omega}} + \alpha')$ soit une section de $a_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}(\mathrm{L}^2(\mathrm{E}))$, il ne résulte pas que Δ' satisfasse à 4. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Rappelons d'autre part la formule (III.3.2) :

$$\mathrm{D}(\mu)\Delta = \mu \circ \Delta \circ \mu^{-1}$$

qui montre, en tenant compte de (III.3.3), et en posant

$$C(\mu)\,\underline{\underline{\omega}} = X_\omega(\mu) + \underline{\underline{\omega}}$$

qu'on a l'égalité

(IX.2.1) $$\mu \circ \Delta \circ \mu^{-1} = \Delta + X_\omega(\mu)$$

Revenant alors au problème qui nous occupe, nous savons en vertu du théorème VI.2.1 que si Δ' et Δ'' correspondent à deux espaces fibrés principaux $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ isomorphes (par un couple φ, h), il existe un automorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, c'est-à-dire une certaine section μ de $\underline{\underline{\mathfrak{M}}}(\mathcal{E})$, tel que

$$\mu \circ \Delta' \circ \mu^{-1}$$

soit une différentiation covariante associée à une connexion de $\mathcal{E}''(\mathcal{X}, G)$, c'est-à-dire telle qu'il existe une section η de $L^1(E)$ et que

$$\mu \circ \Delta' \circ \mu^{-1} = \Delta'' + a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\eta).$$

Comme $\Delta' = \Delta + \alpha'$ et $\Delta'' = \Delta + \alpha''$, on a

$$\Delta + X_\omega(\mu) + \mathrm{Adj}(\mu)\alpha' = \Delta + \alpha'' + a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\eta).$$

On est donc amené à considérer le quotient U de l'ensemble des sections globales de Φ par la relation d'équivalence $\alpha' \equiv \alpha''$ s'il existe une section μ de $\underline{\underline{\mathfrak{M}}}(\mathcal{E})$ qui soit un automorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et telle que

$$(\mathrm{Adj}(\mu)\alpha' + X_\omega(\mu)) - \alpha''$$

soit une section de $a_{L(E)}(L^1(E))$. C'est la classification cherchée.

Remarquons que, dans les conditions précédentes, la translation à gauche μ appliquée à $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ fait passer d'une variété intégrale V' du champ normal $\Gamma(a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E})), \underline{\underline{\omega}} + \alpha')$ à une variété intégrale V'' de $\Gamma(a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E})), \underline{\underline{\omega}} + \alpha'')$.

On retrouve donc l'ensemble des classes précédentes, en formant le quotient U de l'ensemble des sections σ de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))/a_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}(\mathfrak{M}(\mathcal{E}))$ qui correspondent à des sous-espaces fibrés à groupes structuraux de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$, par la relation $\sigma \equiv \sigma'$ s'il existe $s \in Gl(n, R)$ et une section μ de $\underline{\underline{\mathfrak{M}}}(\mathcal{E})$ qui soit un automorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, tels que

$$\sigma = (\mu.\sigma').s.$$

2° On peut se demander si, étant donné un espace fibré différentiable à fibres-algèbres de Lie $\tilde{\mathcal{L}}_0$, il existe toujours dans le faisceau $\tilde{L}$ un opérateur Δ satisfaisant aux trois premiers axiomes de la définition VIII.1.1. Il faut et il suffit pour cela qu'il existe une connexion $\underline{\underline{\omega}}$ dans $\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}^0)$ pour laquelle le tenseur c soit à différentielle covariante nulle. Or, localement, le problème est toujours résoluble. De plus, si $\underline{\underline{\omega}}$ convient, $\underline{\underline{\omega}} + \alpha$ convient également, à la seule condition que $\alpha c = 0$. Comme les sections de $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^1$ telles que $\alpha c = 0$ sont

les sections d'un sous-espace fibré vectoriel de $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^1$ [espace de Lie de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0)$] et que $\underline{\underline{L}}^1$ opère de façon simplement transitive sur le faisceau des connexions de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0)$, on voit qu'il existe toujours un tel opérateur Δ.

3° Avec les notations de VIII.7, étant donné $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_\gamma)$ muni d'une connexion ω' dont la $L(E')$-différentiation covariante associée est notée Δ, classer les sections Ω de $L^2(E')$ telles que

$$\gamma_{L(E)}(\Omega) = \Omega(\omega') \qquad \text{et} \qquad \Delta\Omega = 0$$

conduisant éventuellement à des espaces fibrés principaux $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ non isomorphes. On suppose qu'il existe au moins une section Ω^0 possédant les propriétés ci-dessus.

Toute section Ω est de la forme $\Omega^0 + \Theta$ où Θ est une forme différentielle fermée sur $\mathcal{X}$, de degré 2, à coefficients dans $\underline{H}$. Si $\Omega - \Omega'$ est homologue à 0, Ω et Ω' conduisent évidemment au même espace fibré principal (s'il existe). On est donc amené à former le quotient Ψ_1 de l'ensemble Ψ des sections Ω par la relation $\Omega \equiv \Omega'$ si $\Omega - \Omega'$ est homologue à 0. On obtient ainsi un ensemble de classes, qu'on peut mettre en correspondance biunivoque avec le groupe d'homologie de dimension 2 de $\mathcal{X}$ à coefficients dans $\underline{H}$.

Si μ est un automorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ conservant Δ et si $\Omega \equiv \Omega'$, on a

$$\Omega - \Omega' = d\theta = \Delta\theta$$

et aussi

$$\mu\Omega - \mu\Omega' = \mu\Delta\theta = \Delta\mu\theta.$$

Le groupe des automorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ conservant Δ opère donc sur Ψ_1. Comme les espaces auxquels peuvent conduire Ω et Ω' sont isomorphes (par un couple (φ, h) si Ω et Ω' se correspondent par un tel automorphisme, on est amené à former le quotient Ψ_2 de Ψ_1 par le groupe des automorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ conservant Δ. Ψ_2 est l'ensemble des classes cherchées.

Exemple. — Si G est abélien, on est amené à effectuer le quotient du deuxième groupe d'homologie des formes différentielles sur $\mathcal{X}$ à coefficients dans $\underline{G}$ par le groupe des automorphismes linéaires de $\underline{G}$.

3. Classe caractéristique. — Étant donnée, avec les notations habituelles, une connexion ω' sur $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_\gamma)$, soit Ω une section de $\gamma^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\Omega(\omega'))$.

Proposition IX.3.1. — *La forme $\Delta\Omega$ est une section de $K^3(E')$. On peut la considérer comme une forme différentielle fermée sur $\mathcal{X}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\underline{H}$ du centre de G.*

En effet, d'une part

$$\Delta' \circ \gamma_{L(E')} = \gamma_{L(E')} \circ \Delta$$

et d'autre part

$$\Delta'(\Omega(\omega')) = 0,$$

ce qui montre que $\Delta\Omega$ est une section de $K^3(E')$,

Par ailleurs, on a

$$\Delta^2\Omega = \Omega(\omega').\Omega = [\Omega, \Omega] = 0,$$

ce qui montre que $\Delta\Omega$ considérée comme une forme différentielle sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans H est fermée

Proposition IX.3.2. — *La classe d'homologie de $\Delta\Omega$ est indépendante du choix de la section Ω telle que $\gamma_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\Omega) = \Omega(\omega')$.*

En effet, étant donnée une deuxième forme Ω_1 telle que

$$\gamma_{L(E)}(\Omega_1) = \Omega(\omega'),$$

on a

$$\Delta\Omega - \Delta\Omega_1 = \Delta(\Omega - \Omega_1).$$

Mais $\Omega - \Omega_1$ est une section de $K(E')$ et l'on peut écrire

$$\Delta\Omega - \Delta\Omega_1 = d(\Omega - \Omega_1),$$

ce qui démontre la proposition.

Proposition IX.3.3. — *La classe d'homologie de $\Delta\Omega$ est indépendante de la connexion ω' choisie.*

Soit en effet, $\omega' + \theta$ une autre connexion sur $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G)$. Considérons l'espace fibré principal $\mathcal{E}' \times I'$ où I' est un intervalle ouvert contenant $[0, 1]$. Nous pouvons doter cet espace de la connexion ω^0 dont la restriction à $(\mathfrak{X}, t)(t \in I')$ est $\omega' + t\theta$ et dont les chemins horizontaux de projection (x, I') sont les chemins $(y, I')(y \in \mathcal{E}'_x, x \in \mathfrak{X})$. La différentiation covariante associée à ω^0 étant notée Δ^0, on considère une section Θ de $\mathcal{L}(\mathcal{E}') \times I'$ dont l'image, par passage au quotient, soit $\Omega(\omega^0)$. On a évidemment

$$d\Delta^0\Theta = 0.$$

Par suite, les restrictions de $\Delta^0\Theta$ à $(\mathfrak{X}, 0)$ et à $(\mathfrak{X}, 1)$ sont homologues. Or, ces restrictions, notées $\Delta\Omega$ et $\Delta\Omega_1$ sont telles que

$$\gamma_{L(E')}(\Omega) = \Omega(\omega') \qquad \text{et} \qquad \gamma_{L(E')}(\Omega_1) = \Omega(\omega' + \theta).$$

La proposition est donc démontrée.

Définition IX.3.4. — *La classe d'homologie de la forme $\Delta\Omega$ où Ω est une section de $L^2(E')$ telle que*

$$\gamma_{L(E')}(\Omega) = \Omega(\omega')$$

pour une connexion quelconque ω' *de* $\mathscr{E}'(\mathfrak{X}, G)$ *sera appelée la classe caractéristique de* $\mathscr{E}'(\mathfrak{X}, G_\gamma)$ *relative à* $\underline{G}$. $\Delta\Omega$ *est une* 3*-forme différentielle sur* $\mathfrak{X}$ *à coefficients dans* $\underline{H}$ (*centre de* $\underline{G}$).

PROPOSITION IX.3.4. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section de* Ω *de* $\gamma^{-1}_{\mathfrak{L}(\mathscr{E}')}(\Omega(\omega'))$ *telle que* $\Delta\Omega = 0$ *est que la classe caractéristique de* $\mathscr{E}'(\mathfrak{X}, G)$ *relative à* $\underline{G}$ *soit nulle.*

NÉCESSITÉ ÉVIDENTE. — Réciproquement, si Ω est une section quelconque de $\gamma^{-1}_{\mathfrak{L}(\mathscr{E}')}(\Omega(\omega'))$ et si

$$\Delta\Omega = d\alpha = \Delta\alpha,$$

on a

$$\Delta(\Omega - \alpha) = 0, \qquad \gamma_{\mathfrak{L}(\mathscr{E}')}(\alpha) = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

4. AUTRES CLASSES CARACTÉRISTIQUES. — Nous supposons ici que la classe caractéristique de $\mathscr{E}'(\mathfrak{X}, G_\gamma)$ relative à $\underline{G}$ est nulle. Il existe alors, quelle que soit la connexion ω' une section Ω de $L^2(E')$ telle que

$$\Delta\Omega = 0.$$

Nous poserons $\underset{p}{\mathfrak{L}}{}^0 = \left(\bigotimes_p \underline{G}\right) \times \mathfrak{X}$, nous noterons $\underset{p}{\mathfrak{L}}{}^q$ l'espace fibré des q-formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\bigotimes_p \underline{G}$ et

$$\underset{p}{\mathfrak{L}} = \bigcup_{q=1,\ldots,d} \underset{p}{\mathfrak{L}}{}^q.$$

Considérons $\underset{p}{\mathfrak{L}}(\mathscr{E}')$ et son faisceau $\underset{p}{L}(E')$ des sections différentiables. Enfin, soit $\underset{p}{\Omega}$ le produit tensoriel antisymétrisé de p facteurs égaux à Ω. Étant donnée une application linéaire

$$\varphi : \quad \bigotimes_p \underline{G} \to \mathfrak{V}_0$$

de $\bigotimes_p \underline{G}$ dans un espace vectoriel $\mathfrak{V}_0$, *invariante par* G_γ, il est clair que

$$\varphi\left(j_{\underset{p}{\mathfrak{L}}}(y)\underset{p}{\Omega}\right) \qquad (y \in \mathscr{E}'_x),$$

est indépendante de y, ce qui permet de définir une forme différentielle de degré $2p$ sur $\mathfrak{X}$ par

$$\left[\varphi\left(\underset{p}{\Omega}\right)\right]_x = \varphi\left(j_{\underset{p}{\mathfrak{L}}}(y)\underset{p}{\Omega}\right) \qquad (y \in \mathscr{E}'_x).$$

PROPOSITION IX.4.1. — *La forme* $\varphi\left(\underset{p}{\Omega}\right)$ *est fermée et sa classe d'homologie est la même que celle de* $\varphi\left(\underset{p}{\Omega'}\right)$ *où* Ω', *définie par*

$$\Omega' = \Omega + \Delta\theta + \frac{1}{2}[\theta\,;\,\theta] \qquad [\theta = \text{section de } L^1(E')]$$

est une section de $L^2(E')$ *telle que,* Δ^1 *étant associé à* $\omega'^1 = \omega' + \gamma_{L(E')}(\theta)$, *on ait*

$$\Delta^1\Omega' = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_{L(E')}(\Omega') = \Omega(\omega'^1).$$

En effet, il est évident que

$$d\varphi\left(\underset{p}{\Omega}\right) = 0$$

puisque $\Delta\Omega = 0$ [*voir* formule (III.4.6)]. Soit alors U un ouvert de $\mathfrak{X}$ homéomorphe à R^d, $\mathcal{E}_U(U, G)$ un espace fibré principal de base U et de groupe G et

$$\gamma_{\mathcal{E}_U} : \quad \mathcal{E}_U \to \mathcal{E}'_U,$$

un γ-homomorphisme. Identifions $\mathcal{L}_U(\mathcal{E}'_U)$ à l'espace de Lie de $\mathcal{E}_U$. Il existe alors une connexion ω_U sur $\mathcal{E}_U$ admettant Ω_U pour courbure.

Soit ω^0 la connexion de $\mathcal{E}_U \times I'$ dont la restriction à $(\mathcal{E}_U, t)(t \in I')$ est

$$\omega_U + t\theta$$

et qui admet pour chemins horizontaux de projections $(x, I')(x \in \mathfrak{X})$, les chemins $(y, I')(y \in \mathcal{E}_x)$. Notons $\underset{p}{\Omega}{}^0_U$ le produit tensoriel antisymétrisé de p facteurs égaux à $\Omega(\omega^0_U)$. On peut définir $\varphi\left(\underset{p}{\Omega}{}^0_U\right)$ comme $\varphi\left(\underset{p}{\Omega}\right)$. $\varphi\left(\underset{p}{\Omega}{}^0_U\right)$ ne dépend pas du choix de $\gamma_{\mathcal{E}_U}$. En effet, un autre γ-homomorphisme nous amènerait à remplacer ω_U par $C(m)\omega_U$ et θ par $\mathrm{Adj}(m)\theta$ [m = section de $\mathfrak{M}_U(\mathcal{E}_U)$]; mais en notant m^0 la section de $\mathfrak{M}_U(\mathcal{E}_U) \times I'$ déduite de m, la connexion $C(m^0)\omega^0_U$ se réduit à

$$C(m)(\omega'_U + t\theta)$$

sur $(\mathcal{E}_U, t)$ et elle admet les chemins (y, I') pour chemins horizontaux. Comme en outre,

$$\Omega(C(m^0)\omega^0_U) = \mathrm{Adj}(m^0)\Omega(\omega^0_U),$$

et de plus φ est invariant par G, on a, avec $\Omega^{1\,0}_U = \Omega(C(m^0)\omega^0_U)$:

$$\varphi\left(\underset{p}{\Omega}{}^{1\,0}_U\right) = \varphi\left(\underset{p}{\Omega}{}^0_U\right).$$

On définit donc une forme différentielle Θ sur $\mathfrak{X} \times I'$ en posant

$$\Theta_U = \varphi\left(\underset{p}{\Omega}{}^0_U\right),$$

quel que soit U.

Il est clair que $d\Theta = 0$ et que la restriction de Θ à $(\mathfrak{X}, 0)$ [resp. $(\mathfrak{X}, 1)$] est $\varphi\left(\underset{p}{\Omega}\right)$ [resp. $\varphi\left(\underset{p}{\Omega'}\right)$]. Il en résulte que $\varphi\left(\underset{p}{\Omega}\right)$ et $\varphi\left(\underset{p}{\Omega'}\right)$ sont homologues.

Étant donnée une section Ω de $L^2(E')$ telle qu'il existe une connexion ω' pour laquelle $\Delta\Omega = 0$ et $\gamma_{L(E')}(\Omega) = \Omega(\omega')$, on appellera classe caractéristique de Ω relativement à φ, la classe d'homologie de la forme $\varphi\left(\underset{p}{\Omega}\right)$. On peut appeler ensemble caractéristique de $L(E')$ relativement à φ l'ensemble des classes des formes $\varphi\left(\underset{p}{\Omega}\right)$. D'après la proposition précédente, l'ensemble caractéristique ne dépend pas de la connexion ω' choisie.

Plus précisément, écrivons $\varphi((X+Z)\otimes\ldots\otimes(X+Z))(X\in\underline{G}$ et $Z\in\underline{H})$ sous la forme d'un polynome symétrique en Z, soit $P_{\varphi,X}(Z)$, dont les coefficients sont des polynomes symétriques en X, à valeurs dans $\mathfrak{W}_0$, et invariants par G_γ, puisque φ et Z sont l'un et l'autre invariants. Dans ces conditions,

$$P_{\varphi,\Omega}(Z)$$

est un polynome en Z dont les coefficients sont des formes différentielles fermées à valeurs dans $\mathfrak{W}_0$ et, si $\Omega'=\Omega+\Theta$ (Θ fermée à valeurs dans $\underline{H}$), on a

$$\varphi\left(\frac{\Omega'}{\prime\prime}\right)=P_{\varphi,\Omega}(\Theta).$$

Les classes d'homologie des coefficients de $P_{\varphi,\Omega}(Z)$ sont les coefficients d'un polynome $\overline{P}_{\varphi,\Omega}$ sur le groupe d'homologie $H^2(\mathfrak{X},\underline{H})$ des formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ à coefficients dans $\underline{H}$. On dira que $\overline{P}_{\varphi,\Omega}$ est le *polynome caractéristique de* Ω, relativement à φ. La proposition précédente montre que l'ensemble des polynomes caractéristiques ne dépend pas du choix de ω'. D'une façon plus précise on obtient tous les polynomes à partir de l'un d'entre eux en y remplaçant Z par $Z+\Theta$ ($\Theta=2$-classe sur $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\underline{H}$). On a

$$P_{\varphi,\Omega+\Theta+\frac{1}{2}[0,0]}=\overline{P}_{\varphi,\Omega}$$

et

$$\overline{P}_{\varphi,\Omega+\Theta}=\overline{P}_{\varphi,\Omega}(\Theta+Z).$$

Remarque. — Compte tenu de la parité de Ω, on peut évidemment se borner aux formes φ symétriques et considérer, en outre, l'application de l'espace vectoriel des formes φ dans celui des polynomes sur $H^2(\mathfrak{X},\underline{H})$ à coefficients dans $\mathfrak{W}_0$, homomorphisme qui associe $\overline{P}_{\varphi,\Omega}$ à φ.

S'il existe un espace fibré principal $\mathfrak{E}(\mathfrak{X},G)$ admettant $(\mathfrak{L}(\mathfrak{E}_\gamma),\Omega,\Delta)$ et si $\mathfrak{W}_0=R$, la considération des classes caractéristiques de $\Omega(\omega)$ où ω est une connexion sur $\mathfrak{E}(\mathfrak{X},G)$ conduit à l'homomorphisme de Weil. On remarquera que, dans ce cas, la démonstration de la proposition IX.1.1 se simplifie : aux espaces $\mathfrak{E}_U$, on substitue $\mathfrak{E}(\mathfrak{X},G)$.

5. Une généralisation. Espaces fibrés différentiables principaux a espace structural. — Soient $\mathfrak{E}(\mathfrak{X},G)$ et $\mathfrak{E}'(\mathfrak{X},G)$ deux espaces fibrés principaux différentiables de même base et de même groupe structural. Modelons $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{E}'$, G opérant à droite sur $\mathfrak{E}$. D'après les résultats du premier chapitre, $\mathfrak{M}(\mathfrak{E}')$ opère sur $\mathfrak{E}(\mathfrak{E}')$ à droite, et de façon simplement transitive. Nous pouvons donc modeler sur $\mathfrak{E}(\mathfrak{E}')$, les espaces fibrés $\mathfrak{M}(\mathfrak{E}')$ et $\mathfrak{L}(\mathfrak{E}')$ sur lesquels $\mathfrak{M}(\mathfrak{E}')$ opère par les automorphismes intérieurs et par les automorphismes adjoints respectivement. On obtient ainsi $\mathfrak{M}(\mathfrak{E}')[\mathfrak{E}(\mathfrak{E}')]$ et $\mathfrak{L}(\mathfrak{E}')[(\mathfrak{E}(\mathfrak{E}')]$.

De même, on peut former $C(E')[E(E')]$, $M(E')$ opérant sur $C(E')$ par $C(m)$. Enfin, pour les différentiations covariantes, on aura le faisceau $\nabla(E')[E(E')]$.

Désignons par le symbole DIA le diagramme reliant les espaces ou faisceaux $\mathcal{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathcal{E}$, M, L, E, C, ∇, par les homomorphismes « points », courbure, etc. et par les diverses opérations qui interviennent entre eux : D_m, G_m, $\mathrm{Adj}(m)$, $\mathrm{Int}(m)$, $C(m)$, Δ, $\omega + 0$, etc. Les résultats du premier chapitre nous ont permis de montrer (chap. II et III), que, de la compatibilité du diagramme DIA résultait l'existence et la compatibilité du diagramme $\mathrm{DIA}(\mathcal{E})$ qui relie $\mathcal{E}$, $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, M, E, L(E), M(E), C(E), ∇(E) par les mêmes homomorphismes et opérations qui figurent dans DIA. De même, de la compatibilité de $\mathrm{DIA}(\mathcal{E}')$ résultent l'existence et la compatibilité du diagramme $\mathrm{DIA}(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')]$ où l'on retrouve les espaces et faisceaux définis au cours du précédent alinéa. De plus, $\mathrm{DIA}(\mathcal{E}')$ et $\mathrm{DIA}(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')]$ sont reliées par les isomorphismes $j(\gamma)$, du type suivant :

$$j_{Z(\varepsilon')}(\gamma) : \quad (Z(\varepsilon')[\varepsilon(\varepsilon')])_x \to (Z(\varepsilon'))_x \qquad [\gamma \in \varepsilon(\varepsilon')_x]$$

avec

$$Z = \mathcal{L}, \mathfrak{M} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \mathcal{E}$$

ou

$$Z = M, L, C, \nabla \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = E.$$

Plaçons-nous alors sur les espaces ou faisceaux de base I′ induits par une application différentiable

$$l : \quad I' \to \mathfrak{X}.$$

Nous affecterons de l'indice l les espaces et faisceaux associés à

$$\mathcal{E}_l = l^{-1}(\mathcal{E}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}'_l = l^{-1}(\mathcal{E}').$$

Soient ω et ω' deux sections globales de C(E) et de $C(E')[E(E')]$ et ω_l, ω'_l les sections de $C_l(E'_l)$ et de $C_l(E'_l)[E_l(E'_l)]$ induites par l.

Définition IX.5.1. — *Nous dirons que le chemin différentiable* $\lambda : I' \to \mathcal{E}(\mathcal{E}')$ *est* (ω, ω')*-horizontal de projection l si* $\lambda = l^{\#}_{\mathcal{E}(\mathcal{E}')} \circ s$ *où s est une section de* $\mathcal{E}_l(\mathcal{E}'_l)$ *telle qu'on ait*

$$j_{C_l(E'_l)}(s)\omega'_l = \omega_l.$$

Existence des chemins horizontaux. — Choisissons une fois pour toutes une section σ de $\mathcal{E}_l(\mathcal{E}'_l)$ et soit m une section variable de $\mathfrak{M}_l(\mathcal{E}'_l)$. On est amené à chercher à déterminer une section m telle que

$$j_{C_l(E'_l)}(\sigma . m)\omega'_l = \omega_l,$$

ce qui s'écrit

$$C(m^{-1}) j_{C_l(E'_l)}(\sigma)\omega'_l = \omega_l,$$

ou encore

$$j_{C_l(E'_l)}(\sigma)\omega'_l = C(m)\omega_l.$$

D'après la proposition IV.2.2, si m est une solution de cette équation, la translation à gauche $C_m : \mathscr{E}'_l \to \mathscr{E}'_l$ transforme tout chemin ω_l-horizontal en un chemin $\left[j_{C_l(E'_l)}(\sigma)\omega'_l\right]$-horizontal. La réciproque est immédiate. On détermine donc toutes les solutions en choisissant un chemin ω-horizontal λ_1 fixe et un chemin $\left[j_{C_l(E'_l)}(\sigma)\omega'_l\right]$-horizontal variable λ_2 : la section m définie par $\lambda_2 = m.\lambda_1$ est une solution. En revenant à $\mathscr{E}_l(\mathscr{E}'_l)$ puis à $\mathscr{E}(\mathscr{E}')$, on en déduit immédiatement :

1° Par tout point $y \in \mathscr{E}(\mathscr{E}')$, il passe un chemin (ω, ω')-horizontal de projection l et un seul $[p(y) = l(0)]$.

2° Si λ est un chemin (ω, ω')-horizontal, le chemin $\lambda.m$ est également (ω, ω')-horizontal si, et seulement si, m se déplace parallèlement à lui-même par rapport à ω.

Il en résulte qu'à (ω, ω') est associé un champ $c(\omega, \omega')$ transversal aux fibres de $\mathscr{E}(\mathscr{E}')$ et invariant par les vecteurs tangents à $\mathfrak{M}(\mathscr{E}')$ appartenant aux éléments de $c^{\mathfrak{M}(\mathscr{E}')}(\omega)$.

Quant au transport parallèle relativement à (ω, ω') dans $\mathfrak{Z}(\mathscr{E}')[\mathscr{E}(\mathscr{E}')]$ (notation du paragraphe IV.6 : $\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}^0$ ou $\mathfrak{W}^0$ par exemple), on peut le définir soit par un champ transversal, soit en décidant que $m_t \in \mathfrak{M}(\mathscr{E}')[\mathscr{E}(\mathscr{E}')]$ se déplace parallèlement à lui-même relativement à (ω, ω') si $j_{\mathfrak{Z}(\mathscr{E}')}(y_t)m_t$ se déplace parallèlement à lui-même relativement à ω lorsque y_t décrit un chemin (ω, ω')-horizontal.

Enfin, à tout lacet l en x est associé un $\mu^{l,\omega}_{\mathfrak{M}(\mathscr{E}')}$-isomorphisme de $[\mathscr{E}(\mathscr{E}')]_x$ qu'on peut noter $\tau_{\omega,\omega'}(l)$, et qui est aussi un φ-isomorphisme de $[\mathscr{E}(\mathscr{E}')]_x$ où φ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}(\mathscr{E}')[\mathscr{E}(\mathscr{E}')]_x$ défini par le transport parallèle relativement à (ω, ω'),

Remarque. — $\mathfrak{M}(\mathscr{E}')$ et $\mathfrak{M}(\mathscr{E}')[\mathscr{E}(\mathscr{E}')]$ jouent ici des rôles complètement symétriques. Il y a même lieu de considérer un espace de Lie à droite, un espace de Lie à gauche, une courbure à droite et une courbure à gauche, etc.

Cas particulier. — Si $\mathscr{E}'$ est trivial et si ω est la connexion triviale également (celle définie par l'égalité $\mathscr{E}' = \mathscr{X} \times G$), on retombe sur le cas habituel. On voit cependant qu'on peut, même dans ce cas, faire de la géométrie différentielle sur un espace fibré à groupe structural à partir d'une connexion sur $\mathscr{X} \times G$ qui ne soit pas la connexion triviale.

Nous nous proposons de montrer maintenant que les espaces figurant dans $\mathrm{DIA}(\mathscr{E}')[(\mathscr{E}(\mathscr{E}')]$ sont ceux qui figurent dans $\mathrm{DIA}(\mathscr{E})$.

Reprenons pour cela les notations du paragraphe I.2 : L, M, $E(\mathscr{X}, M)$ et $E'(\mathscr{X}, M)$ sont provisoirement des espaces fibrés s. l. et M opère sur L par $R(m)$. Remarquons d'abord que, de toute évidence, $E(E') = E'(E)$ car,

l'un et l'autre sont les quotients de $E \boxtimes E'$ par la relation d'équivalence

$$(y, z) \equiv (y.m, z.m) \qquad (y \in E_x,\ z \in E'_x \text{ et } m \in M_x).$$

On note alors

$$\alpha : \quad E \boxtimes E' \to E(E')$$

l'application canonique qui résulte de ce passage au quotient.

Proposition IX.5.1. — *L'application*

$$h(y, z) = i_L(y) \circ j_L(z) \circ j_{L(E')}(\alpha(y, z)) \qquad (y \in E_x,\ z \in E'_x)$$

ne dépendant que de x, définit un isomorphisme de $L(E')[E(E')]$ *sur* $L(E)$.

Il suffit de montrer en effet que

$$h(y.m, z) = h(y, z) = h(y, z.m)$$

quel que soit $m \in M_x$. Or

$$\alpha(y.m, z) = \alpha(y, z.m^{-1})$$

et

$$i_L(y.m) = i_L(y) \circ R(m)$$

tandis que

$$R(m) \circ j_L(z) = j_L(z.m^{-1}),$$

de sorte que $h(y.m, z) = h(y, z)$ est une conséquence de $h(y, z) = h(y, z.m^{-1})$. On aura donc complètement démontré la proposition si l'on montre que

$$h(y, z) = h(y, z.m)$$

quel que soit $m \in M_x$, c'est-à-dire si l'on vérifie l'égalité

$$j_L(z.m) \circ j_{L(E')}(\alpha(y, z.m)) = j_L(z) \circ j_{L(E')}(\alpha(y, z)).$$

Cette vérification résulte immédiatement du fait que, d'une part, on a

$$\begin{aligned} j_{L(E')}(\alpha(y, z.m)) &= j_{L(E')}(\alpha(y.m^{-1}, z)) \\ &= j_{L(E')}(\alpha(y, z).i_M(z)m^{-1}) = R(i_M(z)m) \circ j_{L(E')}(\alpha(y, z)), \end{aligned}$$

et, que d'autre part

$$j_L(z.m) = j_L((i_M(z)m).z) = j_L(z) \circ R(i_M(z)m^{-1}).$$

Corollaire. — *Le diagramme* $DIA(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')]$ *est isomorphe à* $DIA(\mathcal{E})$.

On remarquera, en particulier, que le transport parallèle dans $\mathfrak{D}(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')]$ relativement à (ω, ω') correspond au transport parallèle dans $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ relativement à ω'.

BIBLIOGRAPHIE.

ARAGNOL :

[1] *C. R. Acad. Sc.*, 244, 1957, p. 437-440.
[2] *Ibid.*, 244, 1957, p. 2683-2686.
[3] *Ibid.*, 244, 1957, p. 3014-3016.
[4] *Ibid.*, 244, 1957, p. 3124-3126.
[5] *Ibid.*, 245, 1957, p. 134-136.
[6] *Ibid.*, 242, 1956, p. 1117-1120.

EHRESMANN :

[1] *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable* (*Coll. Topologie de Bruxelles*, 1950, p. 29-55).

LICHNEROWICZ :

[1] *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.*
[2] *Groupes d'holonomie* (*Conf. du Cong. int. de Math. d'Amsterdam*, 1954).

NIJENHUIS :

[1] *On the holonomy groups of linear connexions* (*Proc. KOn. Ned. Akad.*, I, t. 56, 1953, p. 233-249 et II, t. 57, 1954, p. 17-25).

AMBROSE et SINGER :

[1] *A theorem on holonomy* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 75, 1953, p. 428-443).

ERRATA.

Problème généralisé de Hilbert pour les arcs non fermés,

par M. W. POGORZELSKI

(*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. LXXV, fasc. 3).

Page 205, *au lieu de* $0 \leq r < 1$, *lire* $0 \leq r \leq 1$.

» 213, dénominateur de la formule (54) :

au lieu de $\left[\prod_{c_j \in Z} |t - c_j|\right]^A$, *lire* $\prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{A\theta^j + \mu}$.

» 214, *au lieu de* $(A + \mu) r \leq A$, *lire* $A + \mu < 1$

» 214, *au lieu de* $\| U \| \leq \rho$, *lire* $\prod_{j=1}^{2p} |t - c_j|^{\theta^j A} |\varphi_\nu(t)| \leq \rho$.

» 215, aux exposants des formules (62) et (62′) : *au lieu de* $(\theta^j A + \mu) r$, *lire* $\theta^j A r$

» 216 et 221, dans les formules (66), (67), (85) : *au lieu de* C_4, *lire* $C_4 = 1$.

» 220, formule (82), *au lieu de* ε, *lire* $\frac{\varepsilon}{2}$,

» 220, formule (83), *au lieu de* $s < N_\varepsilon$, *lire* $s > N_\varepsilon$.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-QUINZIÈME

Pages.

Un théorème sur l'intégrale de Laplace-Stieltjes, par M. *Hubert Delange*..... 1

Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique, par M. *W. Pogorzelski*..... 19

Certaines propriétés de la fonction maximum d'une fonction méromorphe, par MM. *S. K. Bose* et *R. P. Srivastav*..... 37

Sur l'équivalence de deux problèmes de la théorie constructive des fonctions, par MM. *P. Malliavin* et *S. Mandelbrojt*..... 49

Sur l'équation fonctionnelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson, par MM. *J. P. Kahane* et *S. Mandelbrojt*..... 57

Sur les anneaux indexables, par M. *Daniel Pham*..... 81

Sur le théorème de Kuroš dans les produits libres, par M. *Julian Petresco*..... 107

Sur la non-totalité de certaines suites d'exponentielles sur des intervalles assez longs, par M. *Paul Koosis*..... 125

Sur certaines équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, par M. *Paul Vincensini*..... 153

Rigidités des surfaces convexes à bords, par M^me^ *Simone Baudoin-Gohier*..... 167

Problème généralisé de Hilbert pour les arcs non fermés, par M. *W. Pogorzelski*... 201

Définitions de la somme et du produit par scalaire en termes de distance, par M. *Maurice Fréchet*..... 223

Sur la géométrie différentielle des espaces fibrés, par M. *André Aragnol*..... 257

ERRATA..... 409

TABLE DES MATIÈRES..... 411

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55

152832-58

Imprimé en France.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΤΕΩΜΕΤΡΕΙ